

---

# A frenagem eletromagnética de um ímã que cai<sup>+</sup>

---

*Caderno Brasileiro de Ensino de Física, Florianópolis, v.24, n.3: p. 295-318, dez. 2007.*

Fernando Lang da Silveira

Yan Levin

Felipe Barbedo Rizzato

*Instituto de Física – UFRGS*

## **Resumo**

*É apresentado um modelo para calcular a velocidade terminal de queda de magnetos cilíndricos em um tubo condutor não-ferromagnético. Resultados experimentais para diversos magnetos associados em série são relatados, corroborando as previsões teóricas. Os experimentos e o modelo teórico desenvolvido fornecem uma interessante ilustração da Lei de Faraday-Lenz.*

Palavras-chave: *Lei de Faraday-Lenz, freio eletromagnético, ímãs.*

## **Abstract**

*A model is presented which allows to analytically calculate the terminal velocity of cylindrical magnets falling through non-ferromagnetic pipes. Experimental results are presented for various magnets associated in series. The results are found to agree very well with the theoretical predictions. The experiments and the theory provide a very instructive demonstration of the Faraday-Lenz law.*

Keywords: *Faraday-Lenz law, electromagnetic braking, magnets.*

## **1. Introdução**

A frenagem de um ímã se dá quando ele é deixado cair no interior de um tubo de material condutor não-ferromagnético posicionado verticalmente. Como ímã usa-se de preferência um desses “poderosos” pequenos magnetos de *neodímio-ferro-boro* que

---

<sup>+</sup> - The electromagnetic braking of a falling magnet

ultimamente surgiram no mercado. O que de fato acontece quando realizamos este singelo experimento constitui-se em uma dramática demonstração da *Lei da Faraday-Lenz*! O magneto leva muito mais tempo para atravessar o tubo do que um objeto não-magnético de mesmo formato. Por exemplo, para atravessar um cano de cobre de  $1,7\text{ m}$  de comprimento, um ímã de *neodímio* levou mais de  $20\text{ s}$  (!) enquanto um corpo não-magnético percorreu toda a extensão do cano em cerca de  $0,5\text{ s}$  apenas!

O objetivo deste artigo é o de apresentar inicialmente uma explicação conceitual e qualitativa para o comportamento de magnetos em queda através de canos de material condutor não-ferromagnético e depois desenvolver um modelo quantitativo simples<sup>1</sup> que prediga a velocidade terminal do ímã que cai. Finalmente apresentaremos resultados experimentais para a velocidade terminal do magneto (e da associação em série de diversos magnetos), cotejando as medidas realizadas com o que o nosso modelo prediz.

## **2. A Lei de Faraday-Lenz aplicada a um magneto em movimento em relação a uma espira condutora**

É bem sabido que quando um ímã é movimentado nas imediações de uma espira condutora a *Lei de Faraday* prediz a ocorrência de uma força eletromotriz induzida na espira. A força eletromotriz induzida é consequência da variação do fluxo magnético produzido pelo magneto que se aproxima ou se afasta da espira. A existência de uma força eletromotriz sobre um circuito condutor fechado (a espira) causa uma corrente elétrica na espira e, devido à resistência elétrica da espira, ocorre dissipação de energia. Da *Lei de Lenz* podemos prever que o ímã sofrerá uma força magnética em oposição ao seu movimento de aproximação ou de afastamento da espira. Ou seja, quando um magneto é movimentado nas imediações de uma espira condutora, em consequência da corrente induzida, o ímã é freado! Esta força de frenagem no ímã é maior se a velocidade dele em relação à espira for maior pois, de acordo com a *Lei de Faraday*, o valor da força eletromotriz induzida na espira depende da rapidez com a qual o fluxo magnético varia através da espira. Por outro lado, quanto maior for a força eletromotriz, tanto maior será a corrente induzida. Conseqüentemente, como a força magnética de frenagem depende da corrente induzida, a força aumenta quando cresce a velocidade do magneto em relação à espira (este comportamento é análogo ao que acontece quando um objeto se move através de fluido viscoso).

## **3. O tubo condutor é equivalente à justaposição de espiras condutoras**

A figura 1 representa um magneto se deslocando no interior de um tubo condutor. Podemos imaginar o tubo condutor como sendo constituído pela justaposição de muitas espiras condutoras das quais apenas duas estão indicadas na figura.

---

<sup>1</sup> - O modelo matemático que desenvolveremos aqui se constitui em uma simplificação de outro modelo por nós apresentado (Levin, Silveira e Rizzato, 2006). No presente artigo calcularemos a velocidade terminal dos magnetos em queda utilizando conhecimentos mais elementares de matemática e física do que no trabalho anteriormente publicado.

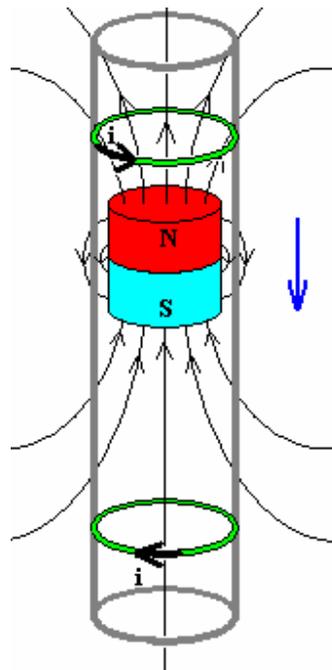


Figura 1 – O tubo condutor é constituído pela justaposição de muitas espiras onde, devido ao movimento do magneto, ocorrem correntes elétricas induzidas.

Como o fluxo magnético através das espiras que constituem o tubo está variando em decorrência do movimento de queda do magneto, há o aparecimento de correntes induzidas<sup>2</sup> nas espiras e, conseqüentemente, surgem forças magnéticas que oferecem resistência à queda do ímã. Conforme aumenta a velocidade de queda do magneto, cresce a força magnética resistiva total até que, finalmente, o magneto atinge uma velocidade terminal constante quando a força magnética tiver a mesma intensidade da força gravitacional (força peso) exercida no ímã. Neste caso toda a potência desenvolvida pela força peso deverá ser idêntica em módulo à potência induzida sobre as espiras e dissipada por efeito Joule. Ou seja, o magneto que cai com velocidade constante perde energia potencial gravitacional e esta quantidade de energia é dissipada por efeito Joule no tubo<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> - Estas correntes são comumente denominadas *correntes de Foucault* em homenagem ao físico Jean Bernard Léon Foucault (1819 – 1868) que estudou o fenômeno em pedaços de metal submetidos a variações de fluxo magnético. Uma forma de minimizar as *correntes de Foucault* é por interromper as “espiras”. A laminação dos núcleos de transformadores elétricos e o isolamento elétrico entre as diversas lâminas minimiza as indesejáveis *correntes de Foucault* ou *correntes parasitas* que o aquecem, aumentando o rendimento do transformador. Da mesma forma as armaduras ferromagnéticas dos motores elétricos são protegidas contra as indesejáveis *correntes de Foucault* por meio deste procedimento de laminação. A frenagem dos magnetos em queda é reduzida quando o tubo sofre um corte de alto a baixo, paralelo ao seu eixo de simetria.

<sup>3</sup> - Quando observamos o magneto descendo por um cano vertical, constatamos que ele não toca nas paredes do cano! Assim sendo podemos desprezar outros efeitos resistivos, tal como o atrito com as paredes e atrito viscoso com o ar. Como a velocidade terminal do magneto é pequena, a dissipação de energia para o ar é também desprezível.

Um ímã em movimento paralelo à superfície de um condutor sofre, devido às correntes induzidas, uma força que possui uma componente resistiva ao movimento relativo à superfície e outra componente perpendicular à

#### 4. Experimentos relativos à queda de magnetos em um tubo de cobre

Utilizamos ímãs de *neodímio-ferro-boro*<sup>4</sup> com forma cilíndrica, com raio da base  $r = 6,35 \text{ mm}$  e altura  $d = 6,35 \text{ mm}$ . Estes magnetos de *neodímio* geram uma intensa indução magnética de cerca de  $0,4 \text{ Tesla}$  (!) nas suas faces circulares (adiante forneceremos valores mais exatos para a indução magnética). Quando dois ou mais magnetos são aproximados, eles se atraem fortemente, se unindo e constituindo uma associação em série de magnetos. A atração dos ímãs justapostos é tão intensa que temos dificuldades em separá-los. Não é para menos que esses magnetos são conhecidos como *super-ímãs*!

Os experimentos foram realizados com um cano de cobre com o comprimento  $l = 1,70 \text{ m}$ , sendo o raio interno do cano  $a = 7,85 \text{ mm}$  e sendo espessura da parede  $w = 1,90 \text{ mm}$ . O cano era colocado em posição vertical e, com um cronômetro medíamos o tempo de passagem para um magneto através do cano (ou para a associação em série de dois ou mais magnetos), abandonado a partir da extremidade superior do cano.

Estes tempos de passagem são surpreendentemente longos, quando comparados com o tempo de  $0,5 \text{ s}$  que um corpo em queda livre leva para descer a mesma altura de  $1,7 \text{ m}$ . A tabela 1 apresenta os resultados experimentais para os tempos de passagem  $t$  para  $n$  magnetos em série, bem como o valor da velocidade média  $V_m$  nessa passagem<sup>5</sup>.

$n$	$t \text{ (s)}$	$V_m \text{ (} 10^{-2} \text{ m/s)}$
1	22,9	7,4
2	26,5	6,4
3	23,6	7,2
4	20,7	8,2
5	16,7	10,2
6	14,4	11,8
7	12,4	13,7

Tabela 1 – Resultados experimentais para a passagem dos magnetos através do tubo.

É importante notar na tabela 1 que os tempos de passagem, e conseqüentemente as velocidades, não variam de maneira monotônica com o número  $n$  de magnetos associados. O maior tempo medido (ou a menor velocidade) corresponde a dois magnetos associados em série. Este comportamento interessante não é explicado pelos modelos quantitativos que

---

superfície do condutor, no sentido de afastar o magneto do condutor. Uma aplicação notável desta força que ocorre quando o magneto e o condutor estão em movimento um em relação ao outro, afastando o ímã do condutor e produzindo *levitação*, pode ser encontrada em Paula e Vianna (2007).

Se o magneto em movimento no interior de um tubo vertical se encontrar fora do centro do tubo, o efeito da força repulsiva produzida pelas correntes induzidas na parede mais próxima do ímã acaba por afastá-lo dessa parede, conduzindo-o para o centro tubo. Desta forma, a queda do magneto ocorre sem que ele toque a superfície interna do tubo vertical.

<sup>4</sup> - Se o leitor estiver interessado em adquirir ímãs de *neodímio-ferro-boro* recomendamos a empresa Cidepe (<http://www.cidepe.com.br/site/index.php>) que os disponibiliza em diversos formatos.

<sup>5</sup> - Na verdade a tabela 1 sintetiza, na segunda coluna, o tempo médio de cinco passagens através do tubo. Os tempos individuais de cada passagem não se desviam por mais do que  $0,5 \text{ s}$  em relação ao tempo médio. Ou seja, os tempos individuais de passagem são muito estáveis.

encontramos na literatura! A literatura relacionada ao problema trata de dipolos magnéticos puntuais, prevendo um decrescimento monotônico, para a velocidade terminal dos magnetos, à medida que aumenta o momento de dipolo. Maiores detalhes podem ser encontrados em Levin, Silveira e Rizzato (2006).

A explicação para a variação não-monotônica dos tempos de passagem dos magnetos será apresentada nas seções seguintes.

## 5. A indução magnética associada a um magneto equivale à indução magnética produzida por uma bobina com as mesmas dimensões do magneto

A indução magnética produzida por um ímã cilíndrico, uniformemente magnetizado, é equivalente à indução magnética produzida por uma bobina solenóide (Nussenzweig, 1997; p. 235) com as mesmas dimensões características do ímã. A figura 2 representa de maneira simplificada as linhas de indução magnética de um ímã cilíndrico e de uma bobina solenóide, ambos com altura  $D$  e raio da base  $r$ .

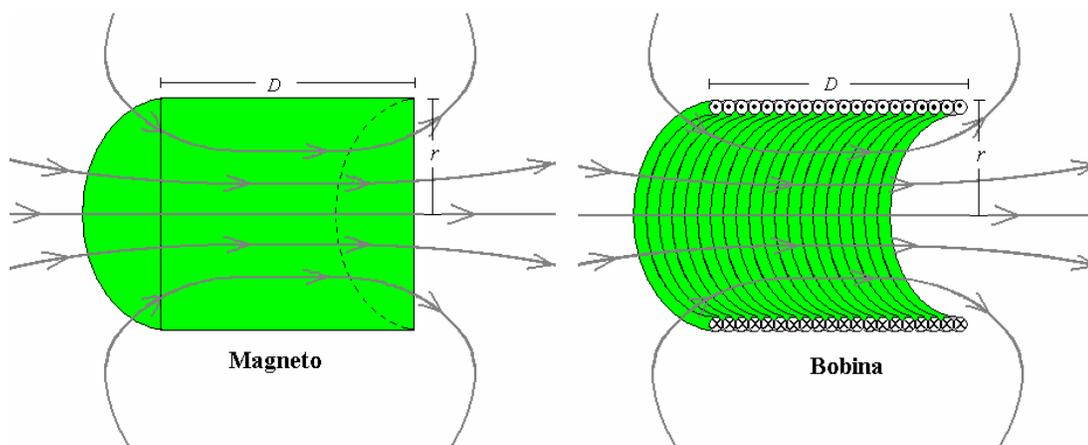


Figura 2 – Representação das linhas de indução magnética produzidas por um ímã e por uma bobina.

Escolhendo um eixo  $z$ , coincidente com o eixo de simetria do ímã ou da bobina, fixando sua origem em uma das bases, e orientado como mostra a figura 3, obtém-se para o valor da indução magnética  $B$  sobre este eixo a seguinte expressão:

$$B = \frac{B_{\infty}}{2} \left[ \frac{z+D}{\sqrt{(z+D)^2 + r^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right], \quad (1)$$

onde  $B_\infty$  é o valor da indução magnética no centro de um solenóide muito extenso<sup>6</sup>, ou seja, de um solenóide que cumpre a condição  $D \gg r$ .

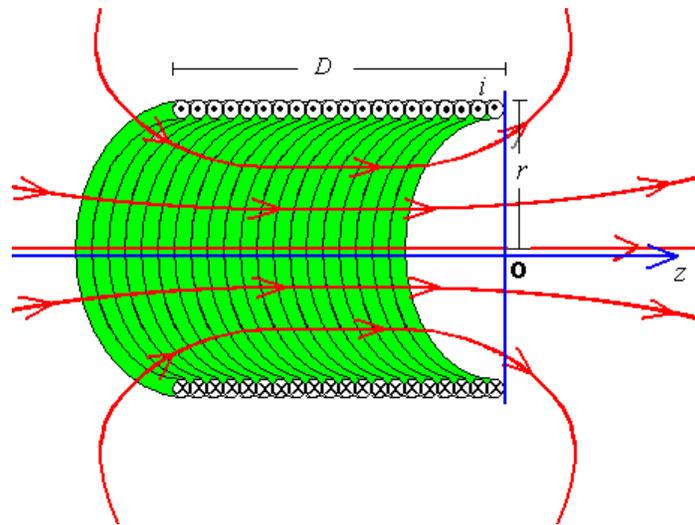


Figura 3 – Definição do sistema de referência para o cálculo do valor da indução magnética no eixo de simetria da bobina.

A expressão (1) implica que o valor máximo da indução magnética  $B_{Máx}$  ocorre exatamente no centro da bobina ou do ímã – isto é, em  $z = -0,5 D$  –, sendo dado por

$$B_{Máx} = B(z = -0,5 D) = \frac{B_\infty}{2} \left[ \frac{I}{\sqrt{0,25 + \left(\frac{I}{D/r}\right)^2}} \right] \quad (2)$$

O valor da indução magnética nas extremidades do ímã ou da bobina – isto é, em  $z = 0$  ou em  $z = -D$  – é dado por

<sup>6</sup> -  $B_\infty$  depende da densidade de corrente na bobina ( $B_\infty = \mu_0 \lambda$  onde  $\lambda$  é a densidade de corrente) ou da densidade de momento magnético no ímã. Os ímãs de neodímio-ferro-boro se caracterizam por ter  $B_\infty \approx IT$  (!) conforme mostraremos adiante. Assim, eles são equivalentes a bobinas com uma alta densidade de corrente, da ordem de 10.000 A/cm (!).

$$B_{Ext} = B(z=0) = B(z=-D) = \frac{B_{\infty}}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{D}{r}\right)^2}} \right] \quad (3)$$

O gráfico da figura 4 indica como varia a intensidade da indução magnética no centro e nas extremidades da bobina ou do ímã em função da razão entre o comprimento  $D$  e o raio  $r$  da bobina ou do ímã. Pode-se observar que ambas as intensidades crescem à medida que aumenta o comprimento do sistema em relação ao seu raio, tendendo para um valor constante quando esta razão cresce muito, isto é, quando  $D/r \gg 1$ .

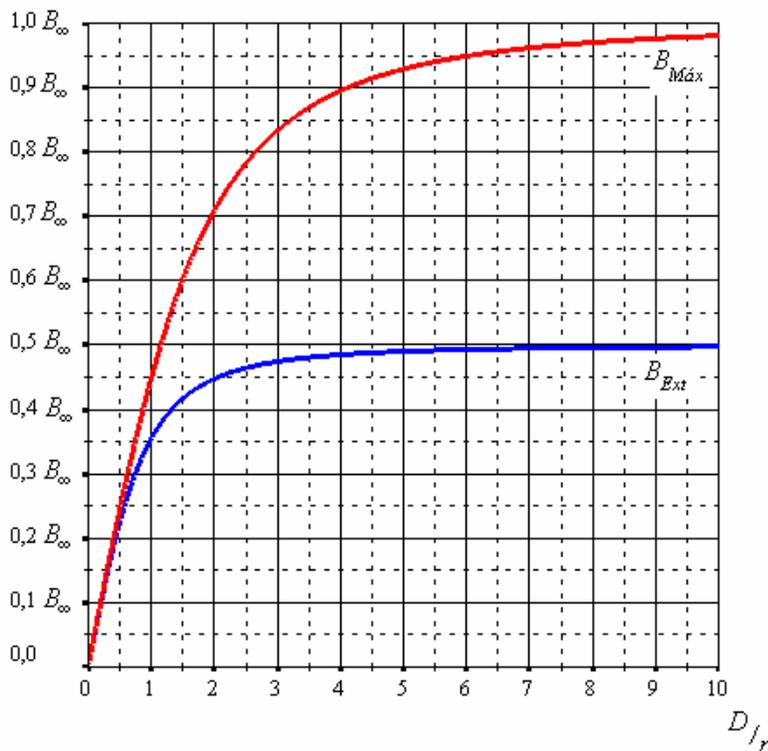


Figura 4 – Gráfico representando as intensidades da indução magnética no centro –  $B_{Máx}$  – e na extremidade –  $B_{Ext}$  – da bobina ou do magneto.

O gráfico da figura 4 mostra que quando um ímã é estendido, isto é, quando tem o seu comprimento aumentado (mantendo-se constante o seu raio e a sua magnetização), a indução magnética que ele produz cresce, tendendo a um valor constante. Este valor já é cerca de 90% do valor máximo possível quando o comprimento do magneto é cerca de quatro vezes maior do que o seu raio. A implicação prática de tal comportamento é que não

adianta se produzir ímãs muito extensos se o objetivo é maximizar a indução magnética que ele produz.

Outro aspecto interessante do comportamento dos magnetos ou das bobinas é que para sistemas razoavelmente extensos (isto é, quando a razão  $D$  por  $r$  é maior do que 4), o valor da intensidade da indução magnética na extremidade é cerca de 50% do valor máximo possível, isto é, do valor da intensidade da indução magnética no centro do sistema. Vale destacar também que a indução magnética externamente ao ímã ou à bobina tende rapidamente para zero, a partir do valor dado em (3), quando consideramos pequenos afastamentos das extremidades do magneto. Todas essas propriedades podem ser notadas facilmente observando-se o gráfico da figura 5 que representa a intensidade da indução magnética para um magneto ou bobina com comprimento  $D$  cinco vezes maior do que o seu raio  $r$ .

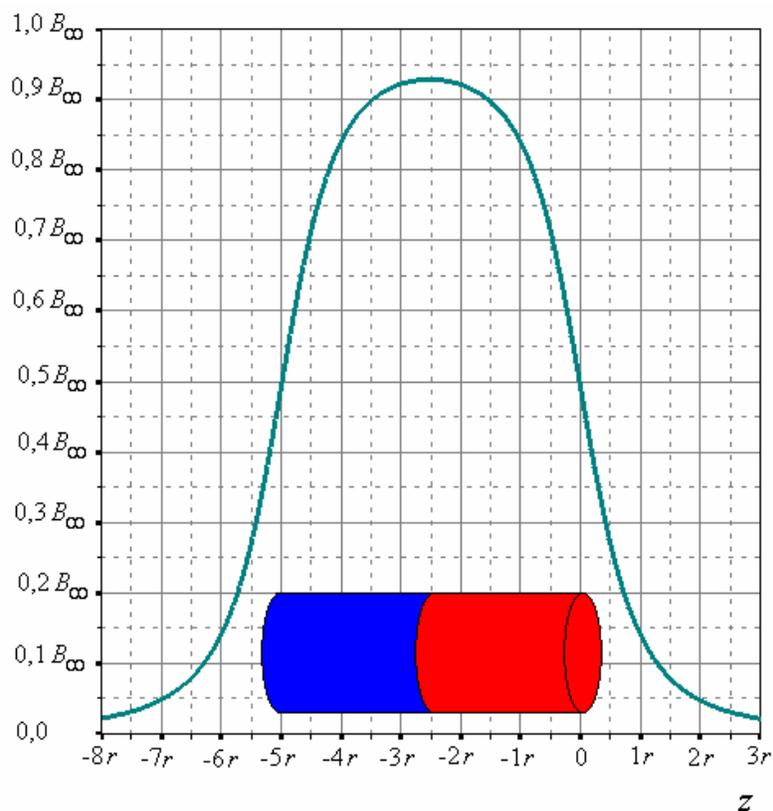


Figura 5 – Módulo da indução magnética sobre o eixo da bobina ou ímã com comprimento  $D$  cinco vezes maior do que o raio  $r$ .

No gráfico da figura 5 observa-se que a indução magnética é desprezível a uma distância superior a  $3r$  em relação às bases do cilindro; também se observa que no interior do ímã ou da bobina a indução magnética varia rapidamente em pontos próximos das suas extremidades. Conforme demonstraremos adiante, esses comportamentos são válidos para qualquer sistema, quase que independentemente da razão  $D/r$ .

## 6. Cálculo da força eletromotriz induzida sobre uma espira condutora

Vamos agora calcular a força eletromotriz (*fem*) induzida em uma espira do tubo (vide figura 1) quando o magneto se desloca através dele. Para tanto utilizaremos a *Lei de Faraday-Lenz*. De acordo com essa lei a *fem* induzida –  $\varepsilon$  – é aproximadamente igual ao negativo da razão entre a variação do fluxo magnético –  $\Delta\Phi$  – e o intervalo de tempo –  $\Delta t$  – em que ocorre a variação do fluxo. Desta forma

$$\varepsilon \cong -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (4)$$

Quando o magneto se desloca através do tubo, uma espira condutora cujo centro coincide com o centro do magneto sofre o máximo fluxo magnético possível –  $\Phi_{Máx}$  –. Esta mesma espira estará sob fluxo magnético desprezível (nulo ou muito pequeno se comparado ao fluxo máximo) quando o magneto se afastar muito dela (veremos adiante que o afastamento –  $\Delta z$  – para que o fluxo seja desprezível é apenas da ordem de alguns raios da base  $r$  do magneto). Faremos uma estimativa do fluxo magnético máximo multiplicando a intensidade da indução magnética no centro do solenóide –  $B_{Máx}$  – pela área –  $\pi r^2$  – da seção transversal do magneto<sup>7</sup>. Portanto

$$\Phi_{Máx} \cong B_{Máx} \pi r^2 \quad (5)$$

Da *Lei da Faraday-Lenz* decorre que

$$\varepsilon \cong -\frac{0 - \Phi_{Máx}}{\Delta t} \cong \frac{B_{Máx} \pi r^2}{\Delta t} \quad (6)$$

Se o magneto estiver se deslocando com velocidade constante  $V$ , podemos afirmar que, enquanto o fluxo magnético varia sobre uma espira desde o seu valor máximo até zero, o ímã se desloca por uma distância  $\Delta z = V \Delta t$ . Portanto a *fem* induzida pode ser expressa como

$$\varepsilon \cong \frac{B_{Máx} \pi r^2}{\Delta z} V \quad (7)$$

Substituindo-se (2) em (7) se obtém

---

<sup>7</sup> - Calculando dessa maneira, o fluxo magnético máximo estará sendo superestimado, pois além de a indução magnética não ser uniforme sobre a seção transversal do ímã, externamente ao magneto, isto é, entre o magneto e as paredes do tubo, há um fluxo magnético que deve ser subtraído do fluxo interno: as linhas de indução atravessam a seção transversal do tubo em pontos internos ao ímã em um sentido e em sentido contrário nos pontos compreendidos entre o magneto e o tubo (vide a figura 2).

$$\varepsilon \cong \frac{B_{\infty}}{2} \left[ \frac{I}{\sqrt{0,25 + \left(\frac{I}{D/r}\right)^2}} \right] \frac{\pi r^2}{\Delta z} V \quad (8)$$

## 7. Cálculo da potência dissipada no tubo condutor

Em conseqüência da variação do fluxo magnético sobre uma espira condutora, causada pelo do afastamento do magneto, ocorrerá uma corrente induzida  $i$  na espira<sup>8</sup>. Sendo  $R$  a resistência elétrica de uma espira, a potência elétrica  $P_l$  nela dissipada por efeito Joule é dada por

$$P_l = i^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2 R = \frac{\varepsilon^2}{R} \quad (9)$$

Todas as espiras compreendidas na extensão  $\Delta z$  do tubo (extensão sobre a qual há variações espaciais de fluxo magnético) estarão dissipando potência elétrica quando o ímã estiver em movimento. Portanto a potência dissipada em toda esta extensão será a soma das potências dissipadas em todas as espiras compreendidas na extensão  $\Delta z$  do cano, ou seja

$$P = \sum P_l = \sum \frac{\varepsilon^2}{R} \quad (10)$$

Fazendo uso da expressão (8), a expressão (10) pode ser reescrita como

$$P \cong \left( \frac{B_{\infty}}{2} \left[ \frac{I}{\sqrt{0,25 + \left(\frac{I}{D/r}\right)^2}} \right] \frac{\pi r^2}{\Delta z} V \right)^2 \sum \frac{1}{R} \quad (11)$$

A resistência  $R$  de uma espira depende da resistividade  $\rho$  do metal, do comprimento da espira  $2 \pi a$  (onde  $a$  é o raio interno do tubo), e da área da seção transversal  $h.w$  da espira (onde  $w$  é a espessura da parede do cano e  $h$  é a altura da espira), ou seja

---

<sup>8</sup> - Desprezaremos os efeitos auto-indutivos do cano metálico, bem como as suas propriedades para os diamagnéticos. É importante destacar que o cano metálico não seja constituído por material ferromagnético. Como já notamos anteriormente, utilizamos um cano de cobre.

$$R = \rho \frac{2\pi a}{hw} \quad (12)$$

Portanto o somatório dos inversos das resistências das espiras resulta em

$$\sum \frac{l}{R} = \frac{w}{\rho 2\pi a} \sum h \quad (13)$$

Mas o somatório das alturas das espiras é a extensão  $\Delta z$  do tubo em que ocorrem variações espaciais da indução magnética e, portanto,

$$\sum \frac{l}{R} = \frac{w}{\rho 2\pi a} \Delta z \quad (14)$$

Substituindo-se (14) em (11) obtém-se

$$P \cong \left( \frac{B_\infty}{2} \frac{l}{\sqrt{0,25 + \left(\frac{l}{D/r}\right)^2}} \right)^2 \frac{\pi r^4 w}{\rho 2a \Delta z} V^2 \quad (15)$$

Para cada espira da qual o magneto se afasta há uma correspondente espira da qual ele se aproxima (simétrica em relação ao centro do magneto) e, portanto, a potência elétrica total dissipada  $P_{Total}$  é o dobro da potência dada em (15). Ou seja,

$$P_{Total} = 2P \cong \left( \frac{B_\infty}{2} \right)^2 \frac{l}{\sqrt{0,25 + \left(\frac{l}{D/r}\right)^2}} \frac{\pi r^4 w}{\rho a \Delta z} V^2 \quad (16)$$

## 8. Velocidade terminal de queda do magneto

Quando o magneto em queda se desloca com velocidade constante  $V$ , a força gravitacional  $Mg$  (onde  $M$  é a massa do magneto e  $g$  é a intensidade do campo gravitacional) desenvolve uma potência  $P_{Grav}$  dada por

$$P_{Grav} = M g V \quad (17)$$

Por considerações de conservação da energia, a potência total dissipada deve ser igual à potência da força gravitacional. Desta forma

$$P_{Total} = P_{Grav}, \quad (18)$$

a partir da qual, substituindo as duas potências por (16) e (17), fornece:

$$\left(\frac{B_{\infty}}{2}\right)^2 \left[ \frac{l}{0,25 + \left(\frac{l}{D/r}\right)^2} \right] \frac{\pi r^4 w}{\rho a \Delta z} V^2 \cong M g V \quad (19)$$

$$V \cong \frac{M g \rho a}{\left(\frac{B_{\infty}}{2}\right)^2 \pi r^4 w} \Delta z \left[ 0,25 + \left(\frac{l}{D/r}\right)^2 \right] \quad (20)$$

Para efetivamente avaliar a velocidade terminal dos magnetos através do tubo, temos de estimar  $\Delta z$ , isto é, descobrir sobre que extensão do eixo do magneto a indução magnética sofre variações importantes no seu valor. Para que ocorra uma *fem* induzida em uma espira do tubo, a indução magnética deve, no sistema de referência do magneto, variar espacialmente – isto é, no eixo  $z$  – pois assim, devido ao movimento do magneto, ocorrerão mudanças temporais do fluxo magnético na espira.

## 9. Extensão espacial através da qual a indução magnética varia

O gráfico da figura 6 representa, para diversos valores da razão  $n = D/r$ , como varia a razão  $B/B_{Max}$  a partir da extremidade do ímã (para  $n \leq 10$ , as curvas estão construídas somente até o centro de cada magneto). O objetivo desse gráfico é o de estimar sobre que extensão do eixo do magneto, a começar do seu centro, efetivamente ocorrem variações importantes na indução magnética (veja figura 2). Cada curva foi traçada de forma que no eixo das ordenadas apareça a razão entre o valor da indução magnética –  $B$  – e o valor da indução magnética máxima para aquele magneto –  $B_{Max}$  – (a indução magnética máxima ocorre no centro do magneto, portanto em  $z = -0,5 D$ ).

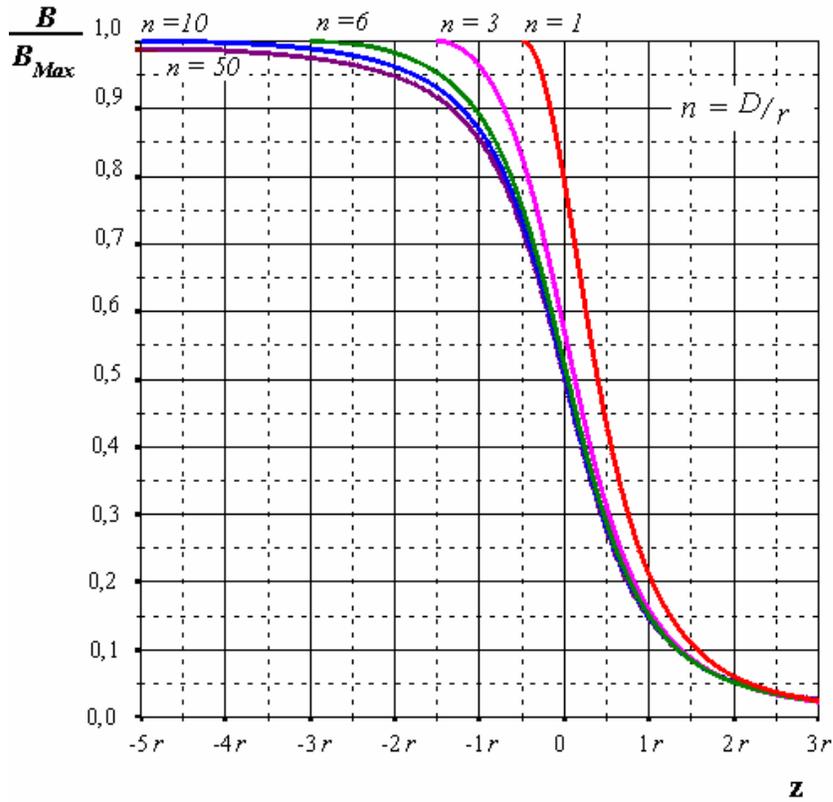


Figura 6 – Variação espacial da indução magnética sobre o eixo do magneto para diversos valores da razão  $n = D/r$ .

Observa-se na figura 6 que a indução magnética está praticamente extinta em pontos externos ao magneto para distâncias maiores do que  $3r$ , independentemente da razão  $n$ . Internamente ao magneto, a indução magnética somente varia sensivelmente próximo às extremidades do ímã. Quando o comprimento do magneto é muito estendido, a indução magnética é praticamente constante em pontos internos, afastados por mais de  $2r$  das extremidades do ímã (vide as curvas para  $n=10$  e  $n=50$  e o Apêndice). O leitor poderá verificar no Apêndice que em pontos internos ao ímã, dados por  $z \cong -\left(1 - e^{-n/5}\right)2r$ , a indução magnética é cerca de 95% da indução magnética máxima. Portanto, mais de 90% da variação espacial da indução ocorre entre  $z \cong -\left(1 - e^{-n/5}\right)2r$  e  $z \cong 3r$ . Dessa forma, o intervalo sobre o eixo do tubo onde acontecem importantes variações do fluxo magnético quando o magneto se movimenta, pode ser expressa por

$$\Delta z \cong \left(5 - 2e^{-n/5}\right)r \quad (21)$$

É interessante notar que todo o efeito dissipativo devido às correntes induzidas ou *correntes de Foucault* no tubo ocorre em regiões próximas às extremidades do magneto.

Para os ímãs que utilizamos ( $r = 6,35 \text{ mm}$ ) a extensão do tubo onde efetivamente se estabelecem correntes induzidas se situa entre  $2 \text{ cm}$  e  $3 \text{ cm}$ .

Podemos agora calcular a velocidade terminal do magneto.

## 10. Cálculo da velocidade terminal

Substituindo (21) em (20) obtém-se

$$V \cong \frac{M g \rho a}{\left(\frac{B_{\infty}}{2}\right)^2 \pi r^4 w} \left[5 - 2e^{-n/5}\right] r \left[0,25 + \left(\frac{I}{D/r}\right)^2\right] \quad (22)$$

$$V \cong \frac{M g \rho a}{\left(\frac{B_{\infty}}{2}\right)^2 \pi r^3 w} \left[5 - 2e^{-n/5}\right] \left[0,25 + \left(\frac{I}{D/r}\right)^2\right] \quad (23)$$

Quando associamos  $n$  magnetos iguais em série, a massa da associação é  $M = n m$ , onde  $m$  é a massa de um magneto. Lembrando que a razão  $D/r$  é igual a  $n$ , obtém-se de (23)

$$V \cong \frac{n m g \rho a}{\left(\frac{B_{\infty}}{2}\right)^2 \pi r^3 w} \left[5 - 2e^{-n/5}\right] \left[0,25 + \left(\frac{I}{n}\right)^2\right] \quad (24)$$

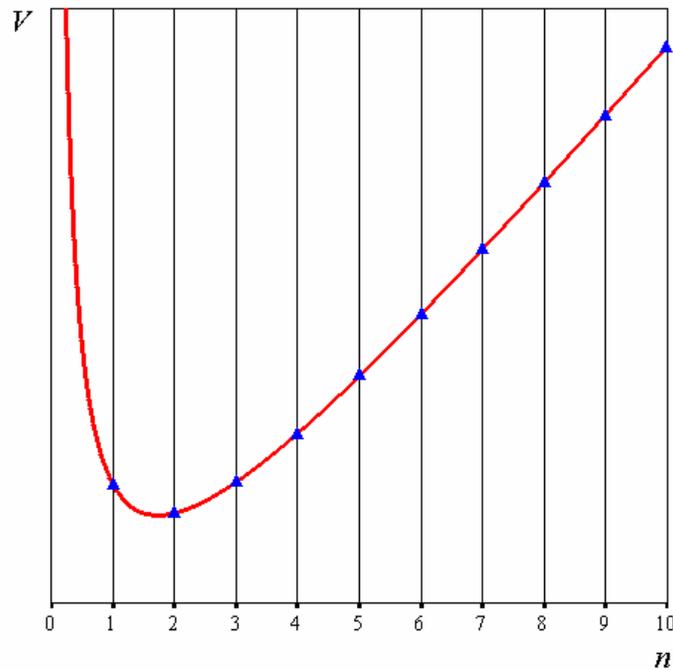
$$V \cong \frac{m g \rho a}{\left(\frac{B_{\infty}}{2}\right)^2 \pi r^3 w} \left[5 - 2e^{-n/5}\right] \left[0,25 n + \frac{I}{n}\right] \quad (25)$$

Supondo que os magnetos possuam aproximadamente a mesma magnetização (portanto  $B_{\infty}$  é constante para cada magneto e para a associação de magnetos), a velocidade terminal pode ser expressa como

$$V \cong K \left[5 - 2e^{-n/5}\right] \left[0,25 n + \frac{I}{n}\right] \quad (26)$$

onde  $K$  é uma constante que depende de características de um magneto, das dimensões do tubo, da resistividade do metal no tubo e da intensidade do campo gravitacional.

A figura 7 apresenta o gráfico da velocidade terminal  $V$ , em unidades de  $K$ , em função do número  $n$  de magnetos associados (ou da razão  $D/r$ ).



*Figura 7 – Velocidade terminal dos magnetos em função da razão  $n = D/r$  ou do número  $n$  de magnetos associados.*

O gráfico da figura 7 mostra um comportamento não-monotônico para a velocidade terminal quando  $n$  magnetos são associados em série. Note-se que a velocidade mínima ocorre para dois magnetos associados em série. Este resultado teórico é qualitativamente consistente com o que observamos experimentalmente (vide a tabela 1).

O cotejo quantitativo da expressão (25) com os resultados experimentais será efetivado na seção seguinte.

## 11. Previsão teórica e resultados experimentais

Os resultados experimentais da tabela 1 para a velocidade média de passagem dos magnetos através do tubo serão tomados como estimativas da velocidade terminal de queda dos magnetos. Esta aproximação é válida tendo em vista que os tempos de passagem são muito maiores do que o tempo que um magneto em queda livre levaria para percorrer a mesma distância (o tempo de passagem é no mínimo cerca de *20 vezes maior* do que o tempo para percorrer a mesma distância em queda livre). Ou ainda, admitindo-se um decaimento exponencial para a velocidade de queda do magneto até que ele atinja as velocidades registradas na tabela 1, estima-se um intervalo de tempo de no máximo 0,07 s para que tal ocorra. Desta forma, o erro efetivo nos tempos de passagem (vide a nota de rodapé número 5) é superior ao erro decorrente de considerar a velocidade média como igual à velocidade terminal.

Para utilizarmos a expressão (25) no cálculo da velocidade terminal necessitamos conhecer, além da resistividade do cobre – a resistividade do cobre, segundo Kochkin e Chirkévitch (1986), é  $\rho = 1,75.10^{-8} \Omega.m$  –, o valor de  $B_{\infty}$  para o ímãs de *neodímio-ferro-boro* utilizados. Utilizamos um *magnetômetro Phywe* para fazer medidas da intensidade da indução magnética no centro da face circular de um magneto e das associações em série de diversos magnetos. Estas medidas nos permitem estimar o valor que denominamos na expressão (3) como  $B_{Ext}$ . A partir dessas medidas podemos, pela expressão (3), obter  $B_{\infty}$ . Ou seja,

$$B_{\infty} = 2 B_{Ext} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \quad (27)$$

A tabela 2 apresenta na segunda coluna a média de diversas medidas da indução magnética efetuadas no centro da face circular. A última coluna apresenta os valores calculados para  $B_{\infty}$ .

$n$	$B_{Ext}$ (Tesla)	$B_{\infty} = 2 B_{Ext} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ (Tesla)
1	0,393	1,11
2	0,501	1,12
3	0,516	1,09
4	0,524	1,08
5	0,553	1,13
6	0,556	1,13
7	0,567	1,15
	<b>Média</b>	1,12

Tabela 2 – Resultados experimentais para medidas da indução magnética no centro da face dos magnetos e cálculo de  $B_{\infty}$ .

Tomaremos como estimativa de  $B_{\infty}$  a média registrada na última linha da tabela 2, ou seja, *1,12 Tesla*. Conforme já notamos anteriormente, os ímãs de *neodímio-ferro-boro* apresentam magnetizações muito intensas e por isto são conhecidos como *super-ímãs*.

Substituindo-se na expressão (25) os valores já referidos para todas as grandezas, obtemos nas unidades do SI o seguinte resultado para a velocidade terminal dos magnetos:

$$V \cong 0,0169 \left[ 5 - 2e^{-\frac{n}{5}} \right] \left[ 0,25 n + \frac{1}{n} \right] \quad (28)$$

Podemos agora calcular os valores previstos em (28) e confrontá-los com os valores medidos. Na tabela 3 apresentamos, na segunda coluna, os valores medidos e, na terceira coluna, os valores calculados ( $V_{Calc}$ ) pela expressão (28).

$n$	$V (10^{-2} \text{ m/s})$	$V_{Calc} (10^{-2} \text{ m/s})$
1	7,4	7,1
2	6,4	6,2
3	7,2	7,1
4	8,2	8,7
5	10,2	10,4
6	11,8	12,4
7	13,7	14,4

Tabela 3 – Valores medidos e calculados para a velocidade terminal de queda dos magnetos.

A figura 8 apresenta o gráfico com os valores medidos e calculados para a velocidade terminal dos magnetos. Conforme se observa nesse gráfico e na tabela 3, há uma boa concordância entre ambos os valores (o coeficiente de correlação entre os valores medidos e calculados é  $R = 0,99$ ).

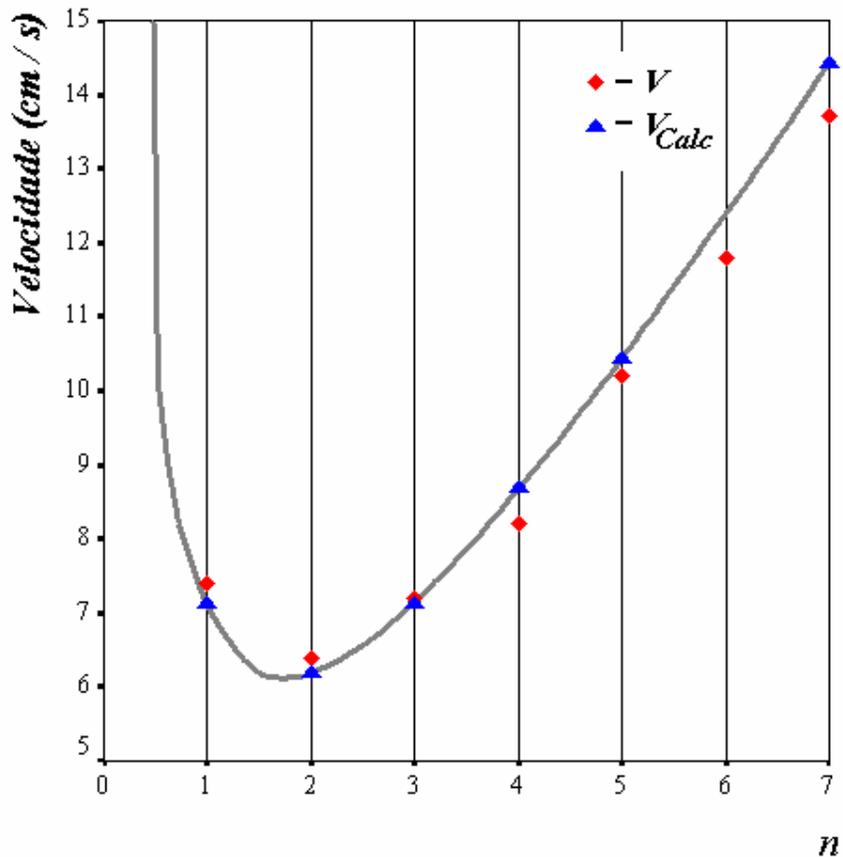
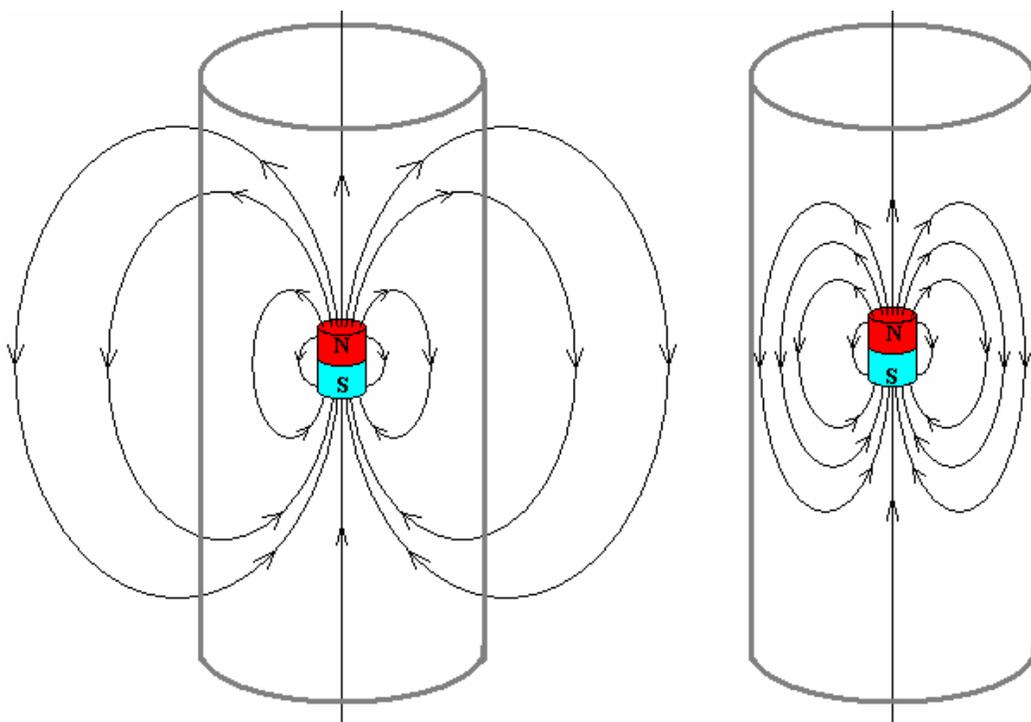


Figura 8 – Gráfico com os valores medidos e calculados para a velocidade terminal de  $n$  magnetos associados em série.

## 12. Tubo com resistividade nula

A expressão (23) para a velocidade terminal do magneto, bem como a expressão à qual chegamos mediante uma outra abordagem para o mesmo problema (Levin, Silveira e Rizatto, 2006), implica que, em consequência da diminuição da resistividade do metal no tubo, o movimento do magneto se torne mais lento. No limite em que a resistividade vai para zero (condutor perfeito), a velocidade terminal se anula de acordo com (23).

Na dedução da expressão (23) modelamos o condutor com permeabilidade magnética idêntica à do vácuo. Adicionalmente desprezamos efeitos de auto-indução (os efeitos auto-indutivos implicam que as correntes elétricas induzidas não variem no tempo da mesma forma que a força eletromotriz induzida, exclusivamente devido às variações de fluxo magnético do ímã). Ora, os efeitos de auto-indução se tornam cada vez mais importantes na medida em que a resistividade do condutor diminua. A diminuição da resistividade também implica que os campos magnéticos produzidos pelas correntes induzidas reduzam a quantidade de linhas de indução que atravessam a parede condutora, determinando que no limite em que resistividade tender para zero, as linhas de indução magnética acabem por ser expulsas do interior da parede condutora (a parede condutora se torna um diamagneto perfeito), ficando confinadas no volume interno ao tubo (vide na figura 9 uma representação esquemática da configuração de linhas de indução magnética em um tubo com permeabilidade magnética idêntica à do vácuo e de um tubo com resistividade nula e portanto, impermeável às linhas de indução magnética). Quando isso acontece, o movimento do magneto não mais produz variações de fluxo magnético através das espiras que constituem o tubo e, portanto, o magneto se precipita em queda livre, excetuando-se os efeitos de borda quando o ímã está próximo das extremidades do tubo. Maiores detalhes do comportamento do magneto em queda no tubo constituído por um condutor ideal são encontrados em Levin e Rizatto (2006).



*Figura 9 – As linhas de indução magnética atravessam as paredes de um condutor permeável mas ficam confinadas no volume interno ao tubo constituído por um condutor perfeito.*

### 13. Conclusão

Neste trabalho demonstramos que é possível prever, com boa concordância experimental, a velocidade terminal de queda das associações em série de diversos magnetos em um tubo de cobre. Abordamos neste artigo o tema já desenvolvido em outro (Levin, Silveira e Rizzato, 2006), agora com menos formalismo matemático e físico, além de apresentarmos um conjunto mais extenso de resultados experimentais, corroborando as previsões teóricas de nosso modelo para a queda freada dos magnetos.

A demonstração concreta em sala de aula desse efeito constitui-se, em nossa opinião, em um dos mais belos experimentos ilustrativos da *Lei de Faraday-Lenz*.

**Agradecimentos.** Agradecemos a Profa. Maria Cristina Varriale do IM-UFRGS e ao Prof. Rolando Axt do IF-UFRGS pela leitura crítica e pelas sugestões que permitiram aprimorar este artigo.

## Referências

**KOCHKIN, N. I. E CHIRKÉVITCH, M. G.** *Prontuário de Física elementar*. Moscou: MIR, 1986.

**LEVIN, Y e RIZATTO, F. B.** Superconducting pipe and levitating magnets. *Physical Review E*, 74, 0666605, 2006.

**LEVIN, Y., SILVEIRA, F. L. E RIZZATO, F. B.** Eletromagnetic braking: a simple quantitative model. *American Journal of Physics*, 74 (9): 815-817, 2006.

**PAULA, A. G. E VIANNA, D. M.** Levitação eletrodinâmica: o ensino de física, baseado no enfoque CTS, na discussão para a melhoria da qualidade do nosso ar. *Física na Escola*, 8(1): 35-39, 2007.

**NUSSENZVEIG, H. M.** *Curso de Física Básica – Eletromagnetismo*. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1997.

## Apêndice

Os magnetos para os quais estamos querendo prever a velocidade terminal contemplam a condição  $n = 1$  (isto é, são pequenos cilindros de altura  $D$  e raio da base  $r$ , ambos iguais a  $6,35 \text{ mm}$ ). Quando associamos  $n$  magnetos em série, construímos um novo magneto cilíndrico cuja altura  $D$  é  $n$  vezes maior do que o raio  $r$ . A figura 4 mostra que, quando  $n \geq 1$ , o valor da indução magnética máxima (isto é, no centro do magneto) é quase o dobro do valor da indução magnética na extremidade do magneto. Na figura 6 vemos que a indução magnética atinge cerca de 95% do valor da indução magnética máxima (isto é, da indução magnética no centro do magneto) em  $z \cong -2r$ , mesmo quando a razão  $n \gg 1$ . A tabela 4 relaciona para  $n$  magnetos em série a coordenada  $z$  que corresponde a 95% da indução magnética máxima – 95%  $B_{Máx.}$ .

$n$	$z$
$100$	$-2,06 r$
$50$	$-2,03 r$
$20$	$-1,97 r$
$12$	$-1,84 r$
$10$	$-1,77 r$
$8$	$-1,65 r$
$7$	$-1,57 r$
$6$	$-1,46 r$
$5$	$-1,33 r$
$4$	$-1,15 r$
$3$	$-0,93 r$
$2$	$-0,63 r$
$1$	$-0,27 r$

*Tabela 4 – Coordenada  $z$  correspondente ao ponto interno ao magneto onde o valor da indução magnética é 95% do valor máximo.*

A tabela 4 demonstra novamente que para  $n \gg 1$  a indução magnética é praticamente constante em quase todo o espaço interno ao magneto, somente variando em pontos internos afastados da face do magneto por distâncias inferiores a  $2r$ , isto é, próximo às extremidades do ímã. O gráfico de  $z$  versus  $n$  na figura 10 nos sugere que podemos descrever esse comportamento com uma curva do tipo  $z = Z \left( 1 - e^{-\frac{n}{N}} \right)$ . O valor  $Z$  é então estimado em aproximadamente  $-2r$  e a *constante característica*  $N$  é o valor de  $n$  para o qual  $z \cong 63\%(-Z)$ , ou seja,  $z \cong 0,63(-2) \cong -1,3$ . Na tabela 4 vemos que quando  $z \cong -1,3$  então  $n \cong 5$ . Portanto, adotando  $N = 5$ ; a função de  $n$  que reproduz aproximadamente os valores de  $z$  da tabela 4 é dada por  $z \cong -2 \left( 1 - e^{-\frac{n}{5}} \right)$ . Esta função está representada no

gráfico da figura como uma linha contínua (ela se ajusta aos pontos da tabela 4 com coeficiente de correlação  $R = 0,997$ ).

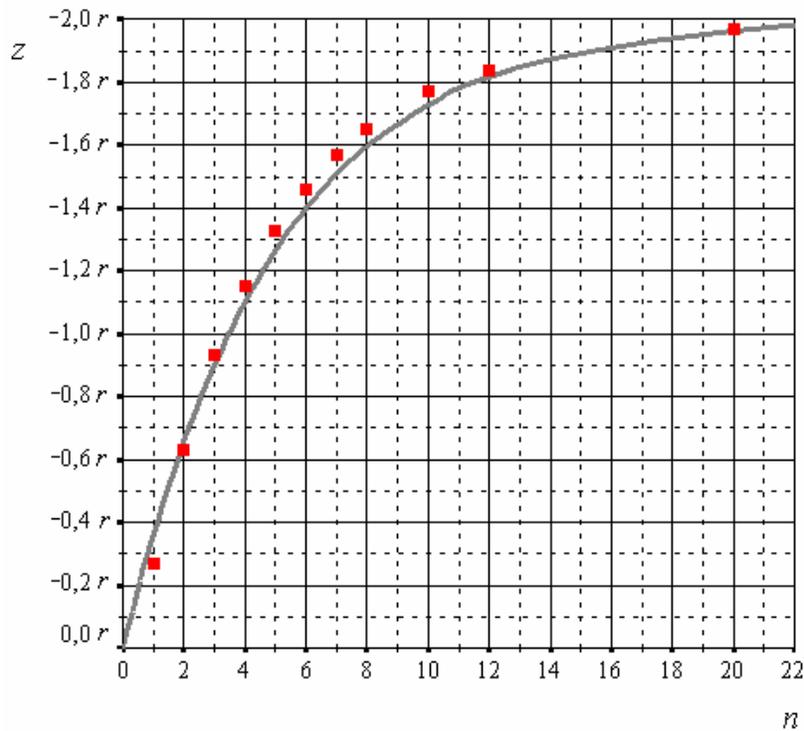


Figura 10 – Gráfico da coordenada  $z$  para a qual o valor da indução magnética é 95% do valor máximo em função da razão  $n = D/r$ .