1. No problema do decaimento radioativo,

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\, x \;;\; x(0) \;=\; x_0 \;,$$

determine o limite superior do passo de tempo Δt para o qual o método de Euler converge para uma solução assintótica nula.

2. No problema do decaimento radioativo,

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\, x \;;\; x(0) \;=\; x_0 \;,$$

determine o limite superior do passo de tempo Δt para o qual o método do Ponto Médio (Runge-Kutta em segunda ordem) converge para uma solução assintótica nula.

3. No problema do decaimento radioativo,

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\, x \;;\; x(0) \;=\; x_0 \;,$$

determine o limite superior do passo de tempo Δt para o qual o método de Heun converge para uma solução assintótica nula.

O método de Heun usa a média entre as derivadas no início e final do intervalo Δt:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \times \tag{1}$$
$$\{f(t, x(t)) + f[t+\Delta t, x(t) + \Delta t f(t, x(t))]\}/2. \tag{2}$$

4. No problema do decaimento radioativo,

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha\, x \;;\; x(0) \;=\; x_0 \;,$$

determine o limite superior do passo de tempo Δt para o qual o método de Ralston converge para uma solução assintótica nula.

O método de Ralston usa uma média ponderada entre as derivadas no início e final do intervalo Δt:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t\{f(t, x(t)) + \tag{3}$$
$$2f[t+\frac{3}{4}\Delta t, x(t) + \frac{3}{4}\Delta t f(t, x(t))]/3. \tag{4}$$

5. Mostre que o método de Runge Kutta 4 descrito por

$$\begin{aligned}
K_1 &= hf(t, x_n)\\
K_2 &= hf(t+\frac{h}{2}, x_n + \frac{K_1}{2})\\
K_3 &= hf(t+\frac{h}{2}, x_n + \frac{K_2}{2})\\
K_4 &= hf(t+h, x_n + K_3)\\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
\end{aligned}$$

Quando aplicado a uma equação diferencial $\frac{dx}{dt} = \lambda x_n$,pode ser reescrita como:

$$x_{n+1} = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4)x_n$$

de modo a demonstrar o método como expansão da série de taylor até quarta ordem.

6. Usando o método de Adams-Bashforth

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2}\,\Delta t\, f(x_n) \;-\; \frac{1}{2}\,\Delta t\, f(x_{n-1})$$

e Adams-Moulton

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\,\Delta t\, f(x_{n+1}) \;+\; \frac{1}{2}\,\Delta t\, f(x_n)$$

a) Escreva um algoritmo do tipo predição-correção para o problema do sistema abaixo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x.$$

b) Na linguagem que lhe for familiar, escreva o programa correspondente.

c) Com base na solução analítica, faça uma estimativa para um valor inicial de Δt. Justifique a sua resposta.

7. Dada a tabela de Butcher,

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 2/3 & 1/6
\end{array}$$

escreva o algoritmo Runge-Kuta correspondente.

8. Descreva um algoritmo para encontrar numericamente a ordem do erro global de um método de integração numérico qualquer. Explique como deve ser feito o ajuste para que se encontre a lei de potência associada.

9. Na aproximação de ângulos pequenos, a energia total de um pêndulo simples é

$$E = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2\ .$$

Mostre analiticamente que E aumenta monotonicamente com o tempo quando o método de Euler é utilizado na integração numérica.

O que acontece quando utilizamos o método de Euler-Cromer?