Exercícios Resolvidos de Teoria Eletromagnética

Jason Alfredo Carlson Gallas, **professor titular de física teórica,**

Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a QUARTA prova. Numeração conforme a **quarta** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`lista4.tex`)

33 Indutância

33.1 Questões

Q 33-2.

Quando o fluxo magnético que atravessa cada espira de uma bobina é o mesmo, a indutância da bobina pode ser calculada por $L = N\Phi_B/i$ (Eq. 33-2). Como poderíamos calcular L de uma bobina para a qual tal hipótese não é válida?

▶ Basta computar a fem para cada uma das espiras, soma-las, e depois usar $\mathcal{E} = -L\, di/dt$ para obter o valor de L.

Q 33-4.

Desejamos enrolar uma bobina de modo que ela tenha resistência mas essencialmente nenhuma indutância. Como fazer isto?

▶ Uma maneira de fazer é enrolar o fio que compõe a bobina em duas camadas, de modo que a corrente passe nelas em sentidos contrários. Deste modo a indutância tenderá para zero.

33.2 Problemas e Exercícios

33.2.1 Indutância – (1/8)

E 33-1.

A indutância de uma bobina compacta de 400 espiras vale 8 mH. Calcule o fluxo magnético através da bobina quando a corrente é de 5 mA.

▶ Como $N\Phi = Li$, onde N é o número de espiras, L é a indutância e i a corrente, temos

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{Li}{N} &= \frac{(8\times 10^{-3}\text{ H})(5\times 10^{-3}\text{ A})}{400}\\ &= 1\times 10^{-7}\text{ Wb.}\end{aligned}$$

E 33-2.

Uma bobina circular tem um raio de 10 cm e é formada por 30 espiras de arame enroladas muito próximas. Um campo magnético externo de 2.60 mT é perpendicular à bobina. **(a)** Não havendo corrente na bobina, qual é o fluxo através dela? **(b)** Quando a corrente na bobina é de 3.8 A, num certo sentido, o fluxo líquido através da bobina é nulo. Qual é a indutância da bobina?

▶ **(a)**

$$\begin{aligned}\Phi_B = NBA &= NB(\pi r^2)\\ &= (30)(2.6\times 10^{-3})(\pi)(10\times 10^{-2})^2\\ &= 2.45\times 10^{-3}\text{ Wb.}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}L = \frac{\Phi_B}{i} &= \frac{2.45\times 10^{-3}}{3.80}\\ &= 6.45\times 10^{-4}\text{ H/m.}\end{aligned}$$

Preste atenção nas *unidades* envolvidas.

E 33-3.

Um solenóide é enrolado com uma única camada de fio de cobre isolado (diâmetro $= 2.5$ mm). Ele tem 4 cm de diâmetro e um comprimento de 2 m. **(a)** Quantas espiras possui o solenóide? **(b)** Qual é a indutância por metro de comprimento, na região central do solenóide? Suponha que as espiras adjacentes se toquem e que a espessura do isolamento seja desprezível.

▶ **(a)** O número N de espiras multiplicado pelo diâmetro de cada espira deve ser igual ao comprimento do solenóide. Portanto, temos

$$N = \frac{\ell}{d_{\text{fio}}} = \frac{2}{2.5\times 10^{-3}} = 800\text{ espiras.}$$

(b) $N\ \Phi_B = N\ B\ A = (n\ell)(\mu_0\, n\, i)(A) = L\, i$. Portanto, simplificando a corrente, segue

$$\begin{aligned}\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A &= (4\pi\times 10^{-7})\left(\frac{800}{2}\right)^2 \pi\ (0.02)^2\\ &= 2.53\times 10^{-4}\text{ H/m.}\end{aligned}$$

P 33-4.

Um solenóide longo e estreito, pode ser curvado de modo a formar um toróide. Mostre que, para um solenóide suficientemente longo e estreito, a equação que dá a indutância do toróide (Eq. 33-7) assim formado é equivalente à de um solenóide (Eq. 33-4) com um comprimento apropriado.

▶ Para um solenóide muito comprido, com o qual desejamos construir um toróide, escrevemos a indutância em função do número total de espiras, N, e não de

$n = N/\ell$, a densidade de espiras por unidade de comprimento. As expressões da indutância para um solenóide e um toróide são, respectivamente,

$$L_S = \mu_0 n^2 \ell A = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A,$$
$$L_T = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\Big(\frac{b}{a}\Big).$$

Para poder comparar estas fórmulas, expandimos o logarítmo que aparece em L_T. Para que isto seja possível assumimos que o toróide tenha dimensões suficientemente grandes tais que $x = b/a \simeq 1$, ou seja, tal que $b \simeq a$. Calculando (ou simplesmente olhando numa Tabela qualquer), vemos que para um valor arbitrário $x \geq 1/2$ o logarítmo pode ser representado pela seguinte série de potências:

$$\ln x = \Big(\frac{x-1}{x}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{x-1}{x}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{x-1}{x}\Big)^3 + \cdots$$

Considerando apenas o primeiro termo na série acima, segue, para $x = b/a$:

$$\ln x \simeq \frac{x-1}{x} = \frac{b/a - 1}{b/a} = \frac{b-a}{b},$$

de modo que

$$L_T \simeq \frac{\mu_0 N^2 h(b-a)}{2\pi b}.$$

Observando agora que $h(b-a) = A$ e que $2\pi b \simeq \ell$ obtemos, nestas condições, que, realmente,

$$L_S \simeq L_T.$$

Como para um toróide sempre temos $b > a$, da expansão do logarítmo acima vemos que a aproximação feita é bastante boa.

P 33-5.

Indutores em série. Dois indutores L_1 e L_2 estão ligados em série e separados por uma distância grande. **(a)** Mostre que a indutância equivalente é dada por $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$. **(b)** Por que a separação entre os indutores tem de ser grande para que a relação acima seja válida? **(c)** Qual é a generalização do item (a) para N indutores em série?

▶ **(a)** Nas condições discutidas abaixo, no item (b), a conservação da energia requer que a queda de tensão $\mathcal{E}$, ao atravessarmos os dois indutores, seja igual à soma das quedas ao atravessarmos cada indutor separadamente:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Como a corrente que atravessa os três indutores em questão é exatamente a mesma, da definição de indutância, podemos escrever

$$\mathcal{E} = -L_{\text{eq}}\frac{di}{dt}, \qquad \mathcal{E}_1 = -L_1\frac{di}{dt}, \qquad \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{di}{dt}.$$

Substituindo estes valores na equação acima e simplificando obtemos

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2.$$

(b) A expressão acima será válida sempre que o fenômeno de *indução mútua* puder ser desprezado. Para tanto é preciso que L_1 e L_2 estejam bem afastados, como requerido pelo problema. O caso em que a indutância mútua não pode ser desprezada é tratado explicitamente no Problema 33-49, adiante.

(c) Quando tivermos N indutores em série (e *sem* a presença de indução mútua!), vemos facilmente que $\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{E}_k$ e, conseqüentemente, que $L_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^{N} L_k$.

P 33-6.

Indutores em paralelo. Dois indutores L_1 e L_2 estão ligados em paralelo e separados por uma distância grande. **(a)** Mostre que a indutância equivalente é dada por

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(b) Por que a separação entre os indutores tem de ser grande para que a relação acima seja válida? **(c)** Qual a generalização do item (a) para N indutores separados?

▶ Este problema é análogo e sua resposta tem a mesma fundamentação teórica do Problema 33-5.

(a) Da definição de ligação em paralelo vemos que agora vale $i = i_1 + i_2$, sendo que a queda de tensão nos três componentes em questão é a mesma, $\mathcal{E}$. Portanto

$$\mathcal{E} = -L_{\text{eq}}\frac{di}{dt}, \quad \mathcal{E} = -L_1\frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E} = -L_2\frac{di_2}{dt}.$$

Substituindo estes valores na relação

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt},$$

obtida derivando-se $i = i_1 + i_2$, segue facilmente que

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(b) A justificativa é idêntica à do item (b) do Problema 33-5.
(c) Para N indutores em paralelo, extendendo o cálculo feito no item (a) acima, obtemos

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}.$$

P 33-7.

Uma tira larga de cobre (largura W) é curvada formando um tubo de raio R com duas extensões planas, como mostra a Fig. 33-14. Uma corrente i flui através da tira, distribuida uniformemente sobre sua largura. Fez-se, deste modo, um "solenóide de uma única espira". **(a)** Deduza uma expressão para o módulo do campo magnético $\mathbf{B}$ na parte tubular (longe das bordas). (Sugestão: Suponha que o campo magnético fora deste solenóide de uma única espira seja desprezível.) **(b)** Determine a indutância deste solenóide de uma única espira, desprezando as duas extensões planas.

▶ **(a)** Aplicando-se a lei de Ampère à parte tubular, tal como feito no caso do solenóide, produz

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B\,W = \mu_0\, i,$$

donde tiramos

$$B = \frac{\mu_0\, i}{W}.$$

(b) O fluxo é

$$\Phi_B = B\,A = \frac{\mu_0\, i}{W}\pi R^2.$$

Sabemos que $N\Phi_B = L\,i$. Como temos uma única espira, $N=1$, e, portanto,

$$N\,\Phi_B = \frac{\mu_0\, i}{W}\pi R^2 = L\,i$$

o que implica que

$$L = \frac{\mu_0 \pi R^2}{W}.$$

▶ **(a)** Observe que podemos considerar o tubo como "composto" por N espiras, cada uma transportando uma corrente $\Delta i = i/N$. Neste caso, estaremos tratando de um solenóide para o qual a densidade de espiras por unidade de comprimento é $n = N/W$.

Assim sendo, usando a Eq. 31-12, pág. 194, para o solenóide ideal, encontramos, notando que $i_0 \equiv \Delta i$,

$$B = \mu_0 i_0 n = \mu_0\Big(\frac{i}{N}\Big)\Big(\frac{N}{W}\Big) = \frac{\mu_0 i}{W},$$

que coincide com o valor acima.

P 33-8.

Dois fios longos e paralelos, cada um com raio a, cujos centros estão separados por uma distância d, são percorridos por correntes iguais mas em sentidos opostos. Mostre que, desprezando o fluxo dentro dos próprios fios, a indutância para um comprimento ℓ deste par de fios é dada por:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi}\ \ln\frac{d-a}{a}.$$

Veja o Exemplo 31-3, pag. 188. (*Sugestão*: calcule o fluxo através de um retângulo que tem os fios como lados).

▶ A área de integração para o cálculo do fluxo magnético é limitada pelas duas linhas tracejadas na Figura abaixo e pelas bordas do fio.

Se a origem for escolhida como estando sobre o eixo do fio à direita e r medir a distância a partir deste eixo, a integração se estenderá desde $r=a$ até $r=d-a$. Considere primeiramente o fio à direita. Na região de integração o campo que ele produz *entra* na página e tem magnitude $B = \mu_0 i/2\pi r$. Divida a região em tirinhas de comprimento ℓ e largura dr, como indicado. O fluxo através da tirinha a uma distância r do eixo do fio é $d\Phi = B\ell dr$ e o fluxo através da região toda é

$$\Phi = \frac{\mu_0 i\ell}{2\pi}\int_a^{d-a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i\ell}{2\pi}\ \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

O outro fio produz o mesmo resultado, de modo que o fluxo total através do retângulo tracejado é

$$\Phi_{\text{Total}} = 2\Phi = \frac{\mu_0 i\ell}{\pi}\ \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

Portanto, temos para a indutância total

$$L = \frac{\Phi_{\text{Total}}}{i} = \frac{\mu_0\ell}{\pi}\ \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

▶ A indutância L também pode ser encontrada combinando-se a lei da indução de Faraday e a Eq. 33-11, de modo que

$$-L\frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

O fluxo é calculado pela seguinte integral:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

A área de integração para o fluxo é a área de uma espira formada por dois fios imaginários adicionados para conectar os dois fios dados, fechando o circuito. O comprimento dos novos fios é muito pequeno comparado com o comprimento dos fios iniciais; assim, podemos ignorar a contribuição daqueles. Então, o campo magnético B é a soma dos dois campos magnéticos dos fios iniciais. Note que os dois campos possuem o mesmo sentido (para dentro da página) e, portanto, segundo a Lei de Ampère (Eq. 17 do Cap. 31, pag. 191), temos:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-r)}.$$

$B(r)$ não varia na direção paralela aos fios e, portanto, para dA utilizamos um retângulo muito estreito de comprimento ℓ e largura dr; escolhendo o sentido de dA para dentro da página (o mesmo sentido de B), temos:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int B(r)\ \ell dr \cos 0^0 \\ &= \frac{\mu_0 i\ell}{2\pi} \int \Big[\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\Big] dr \\ &= \frac{\mu_0 i\ell}{\pi} \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).\end{aligned}$$

Donde se conclui que

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0\ell}{\pi}\frac{di}{dt} \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big) = L\frac{di}{dt}.$$

Portanto, sem levar em consideração o fluxo dentro do fio, encontramos:

$$L = \frac{\mu_0\ell}{\pi} \ln\Big(\frac{d-a}{a}\Big).$$

33.2.2 Auto-Indução – (9/13)

E 33-9. Num dado instante, a corrente e a fem induzida num indutor têm os sentidos indicados na Fig. 33-15. **(a)** A corrente está crescendo ou decrescendo? **(b)** A fem vale 17 V e a taxa de variação da corrente é 25 kA/s; qual é o valor da indutância?

▶ **(a)** Como $\mathcal{E}$ aumenta i, a corrente i deve estar decrescendo.
(b) De $\mathcal{E} = Ldi/dt$ obtemos

$$L = \frac{\mathcal{E}}{di/dt} = \frac{17}{2.5\times 10^3} = 6.8\times 10^{-4}\ \text{H}.$$

E 33-10.

Um indutor de 12 H transporta uma corrente constante de 2 A. De que modo podemos gerar uma fem auto-induzida de 60 V no indutor?

▶ Como $\mathcal{E} = -L(di/dt)$, basta fazer com que a corrente varie a uma taxa de

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{60\ \text{V}}{12\ \text{H}} = 5\ \text{A/s}.$$

E 33-11.

Um solenóide cilíndrico longo com 100 espiras/cm tem um raio de 1.6 cm. Suponha que o campo magnético que ele produz seja paralelo ao eixo do solenóide e uniforme em seu interior. **(a)** Qual é a sua indutância por metro de comprimento? **(b)** Se a corrente variar a uma taxa de 13 A/s, qual será a fem induzida por metro?

▶ **(a)** O "difícil" aqui é converter corretamente o número de espiras:

$$\begin{aligned} n = 100\ \text{espiras/cm} &= 100\ \text{espiras/}(10^{-2}\ \text{m}) \\ &= 10^4\ \text{espiras/m}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A &= (4\pi\times 10^{-7})(10^4)^2\pi(0.016)^2 \\ &= 0.1\ \text{H/m}.\end{aligned}$$

(b) Desprezando o sinal, temos

$$\frac{\mathcal{E}}{\ell} = \frac{L}{\ell}\frac{di}{dt} = 0.1\ \text{H/m}\times 13\ \text{A/s} = 1.3\ \text{V/m}.$$

E 33-12.

A indutância de uma bobina compacta é tal que uma fem de 3 mV é induzida quando a corrente varia a uma taxa de 5 A/s. Uma corrente constante de 8 A produz um fluxo magnético de 40 μWb através de cada espira. **(a)** Calcule a indutância da bobina. **(b)** Quantas espiras tem a bobina?

► **(a)** A menos do sinal, temos

$$L = \frac{\mathcal{E}}{di/dt} = \frac{3\times 10^{-3}\text{ V}}{5\text{ A/s}} = 6\times 10^{-4}\text{ H}.$$

(b) Da definição do fluxo concatenado obtemos

$$N = \frac{L\,i}{\Phi_B} = \frac{(6\times 10^{-4}\text{ H})(8\text{ A})}{40\times 10^{-6}\text{ Wb}} = 120\text{ espiras}.$$

P 33-13.

A corrente i que percorre um indutor de 4.6 H varia com o tempo t conforme é mostrado no gráfico da Fig. 33-16. A resistência do indutor vale 12 Ω. Determine a fem induzida $\mathcal{E}$ durante os intervalos de tempo **(a)** de $t = 0$ até $t = 2$ ms; **(b)** de $t = 2$ até $t = 5$ ms; **(c)** de $t = 5$ até $t = 6$ ms. (Ignore o comportamento nas extremidades dos intervalos.)

► Use $\mathcal{E} = L di/dt$ extraindo di/dt do gráfico dado. Aqui, perceba que as diferenças devem sempre ser tomadas entre o *valor final* menos o *valor inicial* para que o sinal da inclinação esteja correto.
(a) Para $0 < t < 2$ ms:

$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6\;\frac{7.0 - 0.0}{(2.0-0.0)\times 10^{-3}} = 1.6\times 10^4\text{ V}.$$

(b) Para 2 ms $< t <$ 5 ms:

$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6\;\frac{5.0 - 7.0}{(5.0-2.0)\times 10^{-3}} = -3.1\times 10^3\text{ V}.$$

(c) Para 5 ms $< t <$ 6 ms:

$$\mathcal{E} = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 4.6\;\frac{0.0 - 5.0}{(6.0-5.0)\times 10^{-3}} = -2.3\times 10^4\text{ V}.$$

Observe que o sinal das tensões reproduz a inclinação das curvas no gráfico dado, apesar de estarmos aqui ignorando o sinal negativo da fem induzida.

E 33-14.

A corrente num circuito RL atinge um terço de seu valor de equilíbrio em 5 segundos. Calcule a constante indutiva de tempo.

► Nesta situação de carga, a corrente no circuito é determinada pela equação

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big).$$

O valor de equilíbrio, $\mathcal{E}/R$, "é atingido" em $t = \infty$. Conseqüentemente, a equação que fornece a resposta do problema é

$$\frac{1}{3}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-5R/L}\Big),$$

ou seja,

$$-\frac{5R}{L} = \ln\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) = -0.4055.$$

Portanto,

$$\tau_L \equiv \frac{L}{R} = \frac{5}{0.4055} = 12.33\text{ s}.$$

33.2.3 Circuitos RL – (14/28)

E 33-15.

Em termos da *constante de tempo* τ_L, quanto tempo devemos esperar para que a corrente num circuito RL cresça ficando a 0.1% do seu valor de equilíbrio?

► Usando a Eq. 33-18, obtemos:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-t/\tau_L}\Big).$$

Desejamos determinar o valor de t para o qual $i = 0.999\,\mathcal{E}/R$. Isto significa

$$\Big(1 - \frac{0.1}{100}\Big)\,\frac{\mathcal{E}}{R} = 0.999\,\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-t/\tau_L}\Big),$$

isto é

$$0.999 = 1 - e^{-t/\tau_L}$$

ou seja

$$e^{-t/\tau_L} = 0.001.$$

Calculando o logarítmo natural obtemos

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln(0.001) = -6.908,$$

ou seja, $t = 6.908\tau_L$, que é a resposta procurada.

E 33-16.

A corrente num circuito RL cai de 1 A para 10 mA no primeiro segundo após a remoção da bateria do circuito. Sendo $L = 10$ H, calcule a resistência R do circuito.

► A corrente no circuito é dada por

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L},$$

onde i_0 é a corrente (no instante $t = 0$) e τ_L $(= L/R)$ é a constante de tempo indutiva. Desta equação obtemos

$$\begin{aligned} \tau_L &= -\frac{t}{\ln[i/i_0]} \\ &= -\frac{1\text{s}}{\ln[(10 \times 10^{-3}\text{ A})/(1\text{ A})]} = 0.217\text{ s.} \end{aligned}$$

Portanto $R = L/\tau_L = (10\text{ H})/(0.217\text{ s}) = 46\Omega$.

E 33-17.

Quanto tempo, após a remoção da bateria, a diferença de potencial através do resistor num circuito RL (com $L = 2$ H, $R = 3\ \Omega$) decai a 10% de seu valor inicial?

▶ A corrente durante a descarga é controlada pela equação $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-Rt/L}$, sendo que, como sempre, a diferença de potencial é dada por $v_R(t) = R\,i(t)$. Portanto, o problema consiste em determinar-se o onstante t que satisfaz a condição

$$0.1\ v_R(0) = v_R(t),$$

ou seja $0.1\,\mathcal{E} = \mathcal{E}e^{-3t/2}$, de onde tiramos

$$\begin{aligned} \ln 0.1 &= -3t/2 \\ t &= 1.54\text{ s.} \end{aligned}$$

E 33-19.

Um solenóide de indutância igual a $6.3\ \mu$H está ligado em série a um resistor de 1.2 kΩ. **(a)** Ligando-se uma bateria de 14 V a esse par, quanto tempo levará para que a corrente através do resistor atinja 80% de seu valor final? **(b)** Qual é a corrente através do resistor no instante $t = \tau_L$?

▶ **(a)** Se a bateria for ligada ao circuito no instante $t = 0$, a corrente num instante t posterior é dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-t/\tau_L}\Big),$$

onde $\tau_L = L/R$. O problema pede para achar o instante t para o qual $i = 0.8\ \mathcal{E}/R$. Isto significa termos

$$0.8 = 1 - e^{-t/\tau_L}$$

ou seja

$$e^{-t/\tau_L} = 0.2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t &= -\ln(0.2)\tau_L = 1.609\ \tau_L \\ &= \frac{1.609\ L}{R} \\ &= \frac{1.609 \times 6.3 \times 10^{-6}\text{ H}}{1.2 \times 10^{-3}\ \Omega} = 8.45 \times 10^{-9}\text{ s.} \end{aligned}$$

(b) Para $t = \tau_L$ a corrente no circuito é

$$\begin{aligned} i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-1}) &= \Big(\frac{14\text{ V}}{1.2 \times 10^3\ \Omega}\Big)(1 - e^{-1}) \\ &= 7.37 \times 10^{-3}\text{A.} \end{aligned}$$

E 33-20.

O fluxo concatenado total através de uma certa bobina de $0.75\ \Omega$ de resistência vale 26 mW, quando é percorrida por uma corrente de 5.5 A. **(a)** Calcular a indutância da bobina. **(b)** Se uma bateria de 6 V for subitamente ligada à bobina, quanto tempo levará para que a corrente cresça de 0 até 2.5 A?

▶ **(a)** A indutância pedida é

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{26 \times 10^{-3}}{5.5} = 4.7 \times 10^{-3}\text{ H.}$$

(b) Isolando-se t da Eq. (33-18), que dá o crescimento da corrente, temos

$$\begin{aligned} t &= -\tau_L \ln\Big(1 - \frac{iR}{\mathcal{E}}\Big) \\ &= -\frac{L}{R}\ln\Big(1 - \frac{iR}{\mathcal{E}}\Big) \\ &= -\frac{4.7 \times 10^{-3}}{0.75}\ln\Big(1 - \frac{(2.5)(0.75)}{6.0}\Big) \\ &= 2.4 \times 10^{-3}\text{ s.} \end{aligned}$$

P 33-21.

▶ Usando a regra das malhas obtemos

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = iR,$$

ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= L\frac{di}{dt} + iR \\ &= L\frac{d}{dt}\big(3 + 5t\big) + (3 + 5t)R \\ &= (6)(5) + (3 + 5t)(4) \\ &= (42 + 20\ t)\text{ V.} \end{aligned}$$

P 33-22.

▶ A equação que rege a tensão no indutor é

$$V_i = \mathcal{E} e^{-t_i/\tau_L},$$

onde o subíndice $i = 1, 2, \ldots, 8$, serve para indicar convenientemente o instante de tempo que queremos considerar. Utilizando agora dois pontos quaisquer da Tabela dada, por exemplo $t = 1$ ms e $t = 2$ ms, vemos que:

$$V_1 = \mathcal{E} e^{-t_1/\tau_L}, \qquad V_2 = \mathcal{E} e^{-t_2/\tau_L},$$

ou seja, que

$$\frac{V_2}{V_1} = e^{[-t_2-(-t_1)]/\tau_L} = e^{(t_1-t_2)/\tau_L}.$$

Portanto

$$\ln\Big(\frac{V_2}{V_1}\Big) = \frac{t_1 - t_2}{\tau_L},$$

de onde obtemos que

$$\tau_L = \frac{t_1 - t_2}{\ln(V_2/V_1)} = \frac{1.0 \text{ ms} - 2.0 \text{ ms}}{\ln(13.8/18.2)} = 3.6 \text{ ms}.$$

Agora, para obter o valor de $\mathcal{E}$, basta usar o fato que $V_i = \mathcal{E} e^{-t_i/\tau_L}$, substituindo-se nesta fórmula qualquer um dos pontos da Tabela. Por exemplo, usando-se o *primeiro* ponto da Tabela obtemos:

$$\mathcal{E} = V_1 e^{-t/\tau_L} = (18.2) e^{-1.0/3.6} = 24 \text{ V}.$$

Observe que na expressão acima usamos milisegundos como unidade de tempo, para abreviar os cálculos.
É fácil conferir agora que a equação

$$V_i = 24 e^{-t_i/(3.6\times 10^{-3})} \text{ Volts}$$

permite obter-se corretamente qualquer um dos outros pontos na Tabela.

P 33-23.

▶ Para obter o resultado pedido, basta computar a derivada de ambos lados da Eq. (33-18):

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt}\Big[\frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big)\Big] \\ &= \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-RT/L} \\ &= \Big(\frac{45.0}{50.0\times 10^{-3}}\Big) e^{\frac{-(180)(1.20\times 10^{-3})}{50.0\times 10^{-3}}} \\ &= 12.0 \text{ A/s}. \end{aligned}$$

P 33-24.

▶ **(a)** Como a circunferência interna do toróide é $\ell = 2\pi a = 2\pi(10 \text{ cm}) = 62.8$ cm, o número de espiras do toróide é aproximadamente $N = 62.8 \text{ cm}/1.0 \text{ mm} = 628$. Portanto, da Eq. (33-7), temos

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \\ &= \frac{(4\pi 10^{-7})(628)^2(0.12 - 0.10)}{2\pi} \ln \frac{12}{10} \\ &= 2.9 \times 10^{-4} \text{ H}. \end{aligned}$$

(b) Como o comprimento total do fio é $\ell = (628)(4)(2.0 \times 10^{-2}) = 50$ m, a resistência do fio é $R = (50 \text{ m})(0.02\ \Omega/\text{m}) = 1\Omega$. Portanto,

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{2.9\times 10^{-4}}{1} = 2.9 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

P 33-25.

Na Figura 33-17, $\mathcal{E} = 100$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ e $L = 2$ H. Determine os valores de i_1 e i_2 **(a)** imediatamente após o fechamento da chave S; **(b)** muito tempo depois do fechamento de S; *(c)* imediatamente após S ser aberta outra vez; *(d)* muito tempo depois da abertura de S.

▶ **(a)** O indutor impede um crescimento rápido da corrente através dele, de modo que imediatamente após a chave S ser fechada a corrente no indutor é zero (= circuito aberto). Isto significa que

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{100\text{V}}{10\ \Omega + 20\ \Omega} = 3.33 \text{ A}.$$

(b) Muito tempo depois do fechamento do circuito a corrente através do indutor atinge o valor de equilíbrio e praticamente não mais se altera. A fem através do indutor é zero e ele comporta-se como se estivesse sido substituido por um pedaço de fio. A corrente em R_3 é $i_1 - i_2$. A lei de Kirchhoff para as malhas fornece

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 &= 0, \\ \mathcal{E} - i_1 R_1 - (i_1 - i_2) R_3 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \\ &= \frac{100 \times (20+30)}{10\times 20 + 10\times 30 + 20\times 30} = 4.55 \text{ A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{\mathcal{E} R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ &= \frac{100 \times 30}{10 \times 20 + 10 \times 30 + 20 \times 30} = 2.73 \text{ A.} \end{aligned}$$

(c) Neste caso a malha do lado esquerdo está aberta. Como a indutância desta malha é nula, a corrente nela cai imediatamente para zero quando a chave é aberta. Ou seja, $i_1 = 0$. A corrente em R_3 varia lentamente apenas pois existe um indutor nesta malha. Imediatamente após a chave ser aberta a corrente tem o mesmo valor que tinha no momento anterior ao fechamento da chave. Este valor é $4.55 - 2.73$ A = 1.82 A. A corrente em R_2 é idêntica à corrente em R_3, 1.82 A.
(d) Nesta situação não existem mais fontes de fem no circuito de modo que eventualmente todas correntes terão decaido para zero.

P 33-26.

No circuito mostrado na Fig. 33-18, $\mathcal{E} = 10$ V, $R_1 = 5\ \Omega$ $R_2 = 10\ \Omega$ e $L = 5$ H. Considere as situações: (I) a chave S acaba de ser fechada e (II) a chave S ficou fechada durante muito tempo. Calcule para estas duas situações: **(a)** a corrente i_1 através de R_1, **(b)** a corrente i_2 através de R_2, **(c)** a corrente i através da chave, **(d)** a diferença de potencial através de R_2, **(e)** a diferença de potencial através de L, **(f)** di_2/dt.

▶ (I) Chave S acaba de ser fechada: neste instante a reação do indutor à variação da corrente (que era nula) é máxima, atuando de modo a tentar manter a corrente (nula) naquele ramo. Portanto:
(a) $i_1 = i = \mathcal{E}/R_1 = 10/5 = 2$ A.
(b) $i_2 = 0$, pois no instante em que a chave é fechada o indutor se opõe ao máximo à passagem de corrente.
(c) $i = i_1 = 2$ A.
(d) $V_2 = i_2\, R_2 = 0 \times 2 = 0$ V.
(e) $V_L = \mathcal{E}_L = 10$ V, oposta a $\mathcal{E}$.
(f) $\frac{di_2}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{10}{5} = 2$ A/s.

(II) Um longo tempo após o fechamento da chave S o indutor estará carregado, pronto para reagir caso apareça algum $di_2/dt \neq 0$. Entretanto, enquanto não houver variação de corrente através do indutor ele se comporta como um *curto circuito*, ou seja, não reage à passagem da corrente.
(a) $i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = 2$ A.
(b) $di_2/dt = 0$ A/s e $i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{10}{10} = 1$ A.
(c) $i = i_1 + i_2 = 3$ A.
(d) $V_2 = i_2\, R_2 = 1 \times 10 = 10$ V.
(e) $V_L = -L\,\frac{di_2}{dt} = 0$ V.
(f) $\frac{di_2}{dt} = 0$ A/s.

P 33-28*.

No circuito mostrado na Fig. 33-20, a chave S é fechada no instante $t = 0$. A partir desse momento, a fonte de corrente constante, através da variação da sua fem, mantém uma corrente constante i saindo de seu terminal superior. **(a)** Deduza uma expressão para a corrente através do indutor em função do tempo. **(b)** Mostre que a corrente através do resistor é igual à corrente através do indutor no instante $t = (L/R)\ln 2$.

▶ **(a)** Suponha que i flui da esquerda para a direita através da chave fechada. Chame de i_1 a corrente no resistor, suposta fluindo para baixo. A lei dos nós fornece $i = i_1 + i_2$ enquanto que a lei das malhas dá $i_1 R - L(di_2/dt) = 0$.
De acordo com a lei dos nós, uma vez que $di/dt = 0$ pois i é constante, encontramos que $di_1/dt = -(di_2/dt)$. Substituindo este resultado na equação obtida pela lei das malhas segue

$$L\frac{di_1}{dt} + i_1\, R = 0.$$

Esta equação é semelhante à dada na secção 33-4, um pouco antes da Eq. 33-20, e sua solução é a Eq. 33-20:

$$i_1 = i_0 e^{-Rt/L},$$

onde i_0 é a corrente através do resistor em $t = 0$, imediatamente após a chave ser fechada. Imediatamente após o fechamento da chave o indutor age de modo a evitar o rápido crescimento da corrente na malha que o contém, de modo que naquele instante temos $i_2 = 0$ e $i_1 = i$. Portanto $i_0 = i$, de modo que

$$i_1 = i\ e^{-Rt/L}$$

e

$$i_2 = i - i_1 = i\Big[1 - e^{-Rt/L}\Big].$$

(b) Quando $i_2 = i_1$,

$$e^{-Rt/L} = 1 - e^{-Rt/L},$$

de modo que

$$e^{-Rt/L} = \frac{1}{2}, \qquad \text{ou seja,} \qquad t = \frac{L}{R}\ \ln 2.$$

33.2.4 Energia Armazenada num Campo Magnético – (29/37)

E 33-29.

A energia armazenada num certo indutor é 25 mJ quando a corrente é 60 mA. **(a)** Calcular a indutância. **(b)** Que corrente é necessária para a energia magnética armazenada ser quatro vezes maior?

▶ **(a)** Como $U_B = \frac{1}{2}Li^2 = 25$ mJ, obtemos facilmente

$$L = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{2\times 25\times 10^{-3}}{(6\times 10^{-3})^2} = 13.89 \text{ H}.$$

(b) Para que tenhamos $U'_B = 4U_B = 100$ mJ, precisamos de uma corrente igual a

$$\begin{aligned} i = \sqrt{\frac{2U'_B}{L}} &= \sqrt{\frac{2\times 100\times 10^{-3}}{13.89}} \\ &= 0.12 \text{ A} = 120 \text{ mA}. \end{aligned}$$

E 33-31.

Uma bobina com uma indutância de 2 H e uma resistência de 10 Ω é subitamente ligada a uma bateria de resistência desprezível com $\mathcal{E} = 100$ Volts. **(a)** Qual será a corrente de equilíbrio? **(b)** Que quantidade de energia estará armazenada no campo magnético quando esta corrente for atingida?

▶ **(a)** $i = \mathcal{E}/R = 10$ A.
(b)

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = (0.5)(2)(10)^2 = 100 \text{ J}.$$

E 33-32.

Uma bobina com uma indutância de 2 H e uma resistência de 10 Ω é subitamente ligada a uma bateria de resistência desprezível com $\mathcal{E} = 100$ V. Após 0.1 s de a ligação ter sido feita, quais são as taxas com que **(a)** a energia está sendo armazenada no campo magnético, **(b)** a energia térmica está aparecendo e **(c)** a energia está sendo fornecida pela bateria?

▶ Durante a carga, a corrente é controlada pela equação

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big) = 10\Big(1 - e^{-5t}\Big).$$

(a)

$$\begin{aligned} U_B(t) &= \frac{1}{2}L\,[i(t)]^2 \\ &= 100\Big(1 - e^{-5t}\Big)^2 \\ &= 100\Big(1 - 2e^{-5t} + e^{-10t}\Big). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{campo}} &= \frac{dU_B}{dt}\Big|_{t=0.1\text{s}} \\ &= 100\Big(10\,e^{-5\times 0.1} - 10e^{-10\times 0.1}\Big) \\ &\simeq 238.651 \text{ J/s}. \end{aligned}$$

(b) A potência dissipada pela resistência em qualquer instante t é $P_R(t) = [i(t)]^2\,R$ e, portanto,

$$\begin{aligned} P_R(t=0.1) &= \Big(10\big[1 - e^{-5\times 0.1}\big]\Big)^2 \times 10 \\ &\simeq 154.818 \text{ W}. \end{aligned}$$

(c) A potência fornecida pela bateria em qualquer instante t é $P_{\text{bat}}(t) = \mathcal{E}\,i(t)$. No instante $t = 0.1$ s temos

$$P_{\text{bat}}(t=0.1) = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\Big(1 - e^{-5\times 0.1}\Big) \simeq 393.469 \text{ J/s}.$$

Tendo calculado este três valores, podemos verificar se existe ou não conservação da energia: $P_{\text{campo}} + P_R = P_{\text{bat}}$. Verificamos que realmente existe: $154.818 + 238.651 = 393.469$.

P 33-33.

Suponha que a constante de tempo indutiva para o circuito da Fig. 33-6 seja de 37 ms e que a corrente no circuito seja zero no instante $t = 0$. Em que instante a taxa de dissipação de energia no resistor é igual à taxa com que a energia está sendo armazenada no indutor?

▶ Dizer-se que a dissipação no resitor é igual à taxa de armazenamento de energia no indutor equivale a dizer-se que

$$R\,i^2 = \mathcal{E}_L\,i.$$

A corrente que obedece a condição inicial é

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\Big(1 - e^{-Rt/L}\Big).$$

Como sabemos que $\mathcal{E}_L = L\, di/dt$, podemos re-escrever a primeira das equações acima, já tendo eliminado o fator i comum aos dois membros e lembrando que $\tau_L = L/R$, como

$$\begin{aligned} R\, i &= L\frac{di}{dt} \\ R\,\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right) &= L\Big(\frac{-\mathcal{E}}{R}\Big)\Big(\frac{-R}{L}\Big)\, e^{-Rt/L} \\ 1-e^{-Rt/L} &= e^{-Rt/L} \\ 1 &= 2\, e^{-t/\tau_L} \\ \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) &= -\frac{t}{\tau_L}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} t &= -\tau_L\, \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= -37\times(-0.6931) = 25.6 \text{ ms}. \end{aligned}$$

P 33-34.

Uma bobina está ligada em série com um resistor de 10 kΩ. Quando uma bateria de 50 V é ligada ao circuito, a corrente atinge o valor de 2 mA após 5 ms. **(a)** Determine a indutância da bobina. **(b)** Que quantidade de energia está armazenada na bobina neste momento?

► **(a)** Se a bateria é aplicada no instante $t = 0$, a corrente é dada por

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\,\Big(1-e^{-t/\tau_L}\Big),$$

onde $\mathcal{E}$ é a fem da bateria, R é a resistência e $\tau_L = L/R$ é a constante de tempo indutiva. Portanto

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{i\,R}{\mathcal{E}}$$

donde sai

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln\Big[1-\frac{i\,R}{\mathcal{E}}\Big].$$

Numericamente temos

$$\begin{aligned} \ln\Big(1-\frac{i\,R}{\mathcal{E}}\Big) &= \ln\Big(1-\frac{(2\times 10^{-3})(10\times 10^{3})}{50}\Big) \\ &= -0.5108, \end{aligned}$$

fazendo com que a constante de tempo indutiva seja dada por $\tau_L = t/0.5108 = (5\times 10^{-3}\text{ s})/0.5108 = 9.79\times 10^{-3}$ s e, finalmente,

$$\begin{aligned} L = R\tau_L &= (9.79\times 10^{-3}\text{ s})(10\times 10^{3}\ \Omega) \\ &= 97.9 \text{ H}. \end{aligned}$$

(b) A energia armazenada na bobina é

$$\begin{aligned} U_B = \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{1}{2}(97.9)(2\times 10^{-3})^2 \\ &= 1.96\times 10^{-4} \text{ J}. \end{aligned}$$

P 33-37.

Prove que, quando a chave S da Fig. 33-5 é girada da posição a para a posição b, toda energia armazenada no indutor aparece como energia térmica no resistor.

► Suponha que a chave tenha estado na posição a por um tempo longo, de modo que a corrente tenha atingido seu valor de equilíbrio i_0. A energia armazenada no indutor é $U_B = Li_0^2/2$. Então, no instante $t = 0$, a chave é colocada na posição b. A partir de então a corrente é dada por

$$i = i_0 e^{-t/\tau_L},$$

onde τ_L é a constante de tempo indutiva, dada por $\tau_L = L/R$. A taxa com a qual a energia térmica é gerada no resistor é

$$P = i^2 R = i_0^2 R\, e^{-2t/\tau_L}.$$

Durante um período longo de tempo a energia dissipada é

$$\begin{aligned} E = \int_0^\infty P\, dt &= i_0^2 R\int_0^\infty e^{-2t/\tau_L}\, dt \\ &= -\frac{1}{2} i_0^2 R\tau_L e^{-2t/\tau_L}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} i_0^2 R\tau_L. \end{aligned}$$

Substituindo-se $\tau_L = L/R$ nesta expressão tem-se

$$E = \frac{1}{2}Li_0^2,$$

que é idêntica à energia U_B originalmente armazenada no indutor.

33.2.5 Densidade de Energia de um Campo Magnético – (38/46)

E 33-38.

Um solenóide tem um comprimento de 85 cm e secção transversal de área igual a 17 cm^2. Existem 950 espiras de fio transportando uma corrente de 6.6 A. **(a)** Calcule a densidade de energia do campo magnético no interior do solenóide. **(b)** Determine, nessa região, a energia total armazenada no campo magnético. (Despreze os efeitos das extremidades.)

▶ **(a)** Em qualquer ponto, a densidade de energia magnética é dada por $u_B = B^2/(2\mu_0)$, onde B é a magnitude do campo magnético naquele ponto. Dentro do solenóide $B = \mu_0 n i$, onde n é o numero de espiras por unidade de comprimento e i é a corrente. No presente caso, $n = (950)/(0.85 \text{ m}) = 1.118 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$. A densidade de energia magnética é

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2 \\ &= \frac{1}{2}(4\pi \times 10^{-7})(1.118 \times 10^3)^2(6.6)^2 \\ &= 34.2 \text{ J/m}^3. \end{aligned}$$

(b) Como o campo magnético é uniforme dentro de um solenóide ideal, a energia total armazenada é $U_B = u_B V$, onde V é o volume do solenóide. V é igual ao produto da secção transversal pelo comprimento. Portanto

$$U_B = (34.2)(17 \times 10^{-4})(0.85) = 4.94 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

E 33-39.

Um indutor toroidal de 90 mH delimita um volume de 0.02 m^3. Se a densidade média de energia no toróide for de 70 J/m^3, qual será a corrente que circula no indutor toroidal?

▶ A energia magnética armazenada no toróide pode ser escrita de dois modos distintos: $U_B = Li^2/2$ ou $U_B = u_B\, V$, onde u_B é a *densidade* média de energia e V o volume. Portanto, igualando as duas expressões obtemos

$$\begin{aligned} i = \sqrt{\frac{2u_B V}{L}} &= \sqrt{\frac{2(70 \text{ J/m}^3)(0.02 \text{ m}^3)}{90 \times 10^{-3} \text{ H}}} \\ &= 5.58 \text{ A}. \end{aligned}$$

P 33-44.

(a) Determine uma expressão para a densidade de energia em função da distância radial para o toróide do Exemplo 33-1. **(b)** Integrando a densidade de energia por todo o volume do toróide, calcule a energia total armazenada no toróide; suponha $i = 0.5$ A. **(c)** Usando a Eq. 33-24, calcule a energia armazenada no toróide diretamente da indutância e compare o resultado com o do item *(b)*.

▶ **(a)** A densidade de energia é dada pela Eq. 33-26, $u_B = B^2/(2\mu_0)$, sendo o campo magnético de um toróide dado pela Eq. 31-22: $B = \mu_0 i N/2\pi r$. Portanto

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(\mu_0 i N/2\pi r)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 i^2 N^2}{8\pi^2 r^2}.$$

(b) Calcule a integral $U_B = \int u_B\, dV$ sobre o volume do toróide. Considere como elemento de volume o volume compreendido entre dois toróides coaxiais de raios r e $r + dr$, com seus eixos coincidindo com o eixo do toróide dado. Neste caso temos então $dV = 2\pi r h dr$, de modo que

$$\begin{aligned} U_B &= \int u_B\, dV \\ &= \int_a^b \frac{\mu_0 i^2 N^2}{8\pi^2 r^2}\, 2\pi r h\, dr \\ &= \frac{1}{4\pi}\, \mu_0 i^2 N^2 h\, \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(0.5)^2(1250)^2(13 \times 10^{-3})}{4\pi} \times \\ &\quad \times \ln\left(\frac{95}{52}\right) \\ &= 3.06 \times 10^{-4} \text{ J}. \end{aligned}$$

(c) A indutância L é fornecida pela Eq. 33-7:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Portanto, usando a Eq. 33-24, temos

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\mu_0 N^2 i^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Como não poderia deixar de ser, esta expressão é idêntica a encontrada na parte *(b)*.

33.2.6 Indutância Mútua – (47/53)

E 33-47.

Duas bobinas estão em posições fixas. Quando na bobina 1 não há corrente e na bobina 2 existe uma corrente que cresce numa taxa constante de 15 A/s, a fem na bobina 1 vale 25 mV. **(a)** Qual é a indutância mútua destas bobinas? **(b)** Quando não há corrente na bobina 2 e a bobina 1 é percorrida por uma corrente de 3.6 A, qual é o fluxo através da bobina 2?

► **(a)** A indutância mútua M é dada por

$$\mathcal{E}_1 = M\frac{di_2}{dt},$$

onde $\mathcal{E}_1$ é a fem na bobina 1 devida à corrente que está variando na bobina 2. Portanto,

$$M = \frac{\mathcal{E}}{di_2/dt} = \frac{25\times10^{-3}}{15} = 1.67\times10^{-3}\text{ H}.$$

(b) O fluxo concatenado na bobina 2 é

$$\begin{aligned} N_2\Phi_{21} = Mi_1 &= (1.67\times10^{-3})(3.6) \\ &= 6.01\times10^{-3}\text{ Wb}. \end{aligned}$$

P 33-49.

Duas bobinas estão ligadas conforme mostra a Fig. 33-21. Suas indutâncias valem L_1 e L_2. O coeficiente de indutância mútua é M. **(a)** Mostre que a combinação pode ser substituída por uma única bobina de indutância equivalente dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M.$$

(b) Como as bobinas da Fig. 33-21 deveriam ser ligadas para que a indutância equivalente fosse dada por

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

(Este problema é uma extensão do Problema 5, tendo sido eliminada a exigência de que a distância entre as bobinas deveria ser muito grande.)

► **(a)** Suponha que a corrente esteja variando a uma taxa di/dt e calcule a fem total através de ambas bobinas. Considere primeiro a bobina à esquerda. O campo magnético devido à corrente nesta bobina aponta para a esquerda. Também para a esquerda aponta o campo magnético devido à corrente na bobina 2. Quando a corrente aumenta ambos os campos aumentam e ambas variações no fluxo contribuem com fem na mesma direção. Portanto a fem na bobina 1 é

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 + M)\frac{di}{dt}.$$

O campo magnético na bobina 2 devido à corrente nela aponta para a esquerda, como também o faz o campo na bobina 2 devido à corrente na bobina 1. As duas fontes de fem estão novamente na mesma direção e a fem na bobina 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -(L_2 + M)\frac{di}{dt}.$$

A fem total através de ambas bobinas é

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}.$$

Esta é exatamente a mesma fem que seria produzida se as bobinas fossem substituidas por uma única bobina com indutância $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M$.
(b) Reverta os terminais da bobina 2 de modo que a corrente entre pela parte de trás da bobina em vez de entrar pela frente como mostrado no diagrama. Neste caso o campo produzido pela bobina 2 no local onde está a bobina 1 opõe-se ao campo gerado pela bobina 1. Os fluxos tem sinais opostos. Uma corrente crescente na bobina 1 tende a aumentar o fluxo nela mas uma corrente crescente na bobina 2 tende a diminui-lo. A fem através da bobina 1 é

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 - M)\frac{di}{dt}.$$

Analogamente, a fem na bobina 2 é

$$\mathcal{E}_2 = -(L_2 - M)\frac{di}{dt}.$$

A fem total através de ambas bobinas é agora

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}.$$

Esta é exatamente a mesma fem que seria produzida se as bobinas fossem substituidas por uma única bobina com indutância $L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M$.

P 33-52.

A Fig. 33-24 mostra, em seção transversal, dois solenóides coaxiais. Mostre que o coeficiente de indutância mútua M para um comprimento ℓ desta combinação solenóide-solenóide é dado por

$$M = \pi R_1^2 \ell \mu_0 n_1 n_2,$$

onde n_1 é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide 1 e n_2 é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide 2. R_1 é o raio do solenóide interno. Explique por que M depende de R_1 mas não depende de R_2, o raio do solenóide externo.

▶ Assuma que a corrente no solenóide 1 é i e calcule o fluxo concatenado no solenóide 2. A indução mútua é igual a este fluxo dividido por i. O campo magnético dentro do solenóide 1 é paralelo ao eixo e tem magnitude $B = \mu_0 i n_1$ uniforme, onde n_1 é o número de espiras por unidade de comprimento do solenóide. A área da seção reta do solenóide é πR_1^2 e, como o campo é perpendicular a uma seção reta, o fluxo através da seção reta é

$$\Phi = AB = \pi R_1^2 \mu_0 n_1 i.$$

Como o campo magnético é nulo fora do solenóide, este é também o valor do fluxo através de uma seção do solenóide 2. O número de espiras num comprimento ℓ do solenóide 2 é $N_2 = n_2 \ell$ e o fluxo concatenado é

$$N_2 \Phi = n_2 \ell \pi R_1^2 \mu_0 n_1 i.$$

A indutância mútua é, portanto,

$$M = \frac{N_2 \Phi}{i} = \pi R_1^2 \ell \mu_0 n_1 n_2.$$

M não depende de R_2 porque não existe campo magnético na região entre os solenóides. Mudando R_2 não se altera o fluxo através do solenóide 2; mas mudando R_1, o fluxo altera-se.

▶ Usando a Eq. 33-33, $\varepsilon_2 = -M di_1/dt$. O fluxo entre o solenóide de dentro e o de fora é:

$$\Phi_{12} = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}$$

onde B_1 é o campo gerado pela corrente i_1 do solenóide de dentro e a integral é sobre a área da seção transversal do solenóide de fora. Mas $B_1 = \mu_0 n_1 i_1$ dentro do solenóide 1 e zero do lado de fora. Assim, não existe contribuição para a integral na área entre os solenóides (e, portanto, o tamanho do solenóide 2 não importa); então,

$$\Phi_{21} = B_1(\pi R^2) = \mu_0 n_1 \pi R_1^2 i_1.$$

Como existem $n_2 \ell$ espiras no solenóide 2 num comprimento ℓ, segundo a Lei de Indução de Faraday, podemos escrever a seguinte relação:

$$\varepsilon_2 = -n_2 \ell \, \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -n_2 \ell \, \mu_0 n_1 \pi R_1^2 \, \frac{di_1}{dt} = -M \, \frac{di_1}{dt}.$$

Portanto, comparando os coeficientes, obtemos

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 \ell.$$

34 Propriedades Magnéticas da Matéria

34.1 Questões

Q 34-1. Duas barras de ferro têm aparências exatamente iguais. Uma delas está imantada e a outra não. Como identificá-las? Não é permitido suspender nenhuma delas como se fosse agulha de bússola, nem usar qualquer outro aparelho.

► Segure com a mão esquerda uma das barras numa direção horizontal (por exemplo, apoiando-a sobre uma mesa). Com a outra mão, segure a outra barra numa posição ortogonal à primeira. Coloque uma das extremidades da segunda barra encostada sobre a barra fixa na direção horizontal. A seguir, percorra com a extermidade da segunda barra a periferia da primeira barra desde a extremidade até o meio desta primeira barra. Duas coisas podem ocorrer: *(a)* Se a barra fixa na mão esquerda for o imã, você sentirá uma atração forte na extremidade; porém, esta atração irá diminuir à medida que a barra da mão direita se aproximar do centro da barra da mão esquerda (que supostamente é o imã). Portanto você poderia identificar as duas barras neste caso. *(b)* Se a barra fixa na mão esquerda não for o imã, você sentirá sempre a mesma atração, pois, neste caso, a barra da mão direita será o imã e, como você sabe, a extremidade de um imã atrai sempre com a mesma intensidade a barra de ferro (em qualquer posição).

34.2 Problemas e Exercícios

34.2.1 O Magnetismo e o Elétron – (1/5)

P 34-3. Uma barra imantada está suspensa por um fio como mostra a Fig. 34-19. Um campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ apontando horizontalmente para a direita é, então, estabelecido. Desenhe a orientação resultante do fio e do ímã.

► O conjunto ímã+fio irá deslocar-se para a direita, permanecendo inclinado num certo ângulo θ.

Para entender por que isto ocorre, basta calcular o torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ que atuará no ímã devido ao seu momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$.
Como se pode perceber da Fig. 34-3 (pág. 259), o momento magnético do ímã é dado por um vetor centrado no centro de massa do ímã, apontando de Sul para Norte (isto é, para baixo, antes do campo ser ligado). O produto vetorial nos diz que o torque magnético é um vetor que aponta para fora do plano da págian do livro e, portanto, que o ímã desloca-se um certo ângulo θ para a direita.

P 34-5. Uma carga q está uniformemente distribuída em torno de um fino anel de raio r. O anel gira com velocidade angular ω em torno de um eixo central ortogonal ao seu plano. *(a)* Mostre que o momento magnético devido à carga em rotação é dado por:

$$\mu = \frac{1}{2} q\omega r^2.$$

(b) Quais são a direção e o sentido deste momento magnético, se a carga é positiva.

► *(a)* No instante $t = 2\pi/\omega$ s corrente que passa no anel é:

$$i = \frac{q}{t} = \frac{q}{2\pi/\omega} = \frac{\omega q}{2\pi}.$$

Donde se conclui que o módulo do momento magnético é dado por

$$\mu = NiA = (1)\Big(\frac{\omega q}{2\pi}\Big)(\pi r^2) = \frac{1}{2}\omega q r^2.$$

(b) Pela regra da mão direita, o vetor momento magnético $\vec{\mu}$ é paralelo ao vetor velocidade angular $\vec{\omega}$.

34.2.2 A Lei de Gauss do Magnetismo – (6/9)

P 34-7. O fluxo magnético através de cinco faces de um dado vale $\Phi_B = \pm N$ Wb, onde N $(= 1$ a $5)$ é a quantidade dos pontos escuros [que representam os números] sobre cada face. O fluxo é positivo (para fora) para N par e negativo (para dentro) para N ímpar. Qual é o fluxo através da sexta face do dado?

▶ Como não se conhece monopólos magnéticos, a soma algébrica do fluxo sobre todo o dado dever ser ZERO. Portanto o fluxo Φ_6 pedido é

$$\begin{aligned}\Phi_6 &= -(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4+\Phi_5)\\ &= -(-1+2-3+4-5)\\ &= +3 \text{ Wb.}\end{aligned}$$

P 34-8. Uma superfície Gaussiana tem a forma de um cilindro circular reto, de raio igual a 12 cm e comprimento de 80 cm. Através de uma de suas extremidades, penetra um fluxo magnético de 25 μWb. Na outra extremidade existe um campo magnético uniforme de 1.6 mT, normal à superfície e orientado para fora dela. Qual é o fluxo magnético líquido através da superfície lateral do cilindro?

▶ Usando a lei de Gauss do magnetismo, $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}=0$, podemos escrever $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_C$, onde Φ_1 é o fluxo magnético através da primeira extremidade mencionada, Φ_2 é o fluxo magnético através da segunda extremidade mencionada, e Φ_C é o fluxo magnético através da superfície lateral (curva) do cilindro. Sobre a primeira extremidade existe um fluxo direcionado para dentro, de modo que $\Phi_1=-25$ μWb. Sobre a segunda extremidade o campo magnético é uniforme, normal à superfície e direcionado para fora, de modo que o fluxo é $\Phi_2=B\,A=B\,(\pi r^2)$, onde A é a área da extremidade e r é o raio do cilindro. Portanto,

$$\Phi_2=(1.6\times 10^{-3})\pi(0.12)^2=+7.24\times 10^{-5}\text{ Wb.}$$

Como a soma dos três fluxos deve ser zero, temos

$$\Phi_C=-\Phi_1-\Phi_2=25\mu-72.4\mu=-47.4\ \mu\text{Wb.}$$

O sinal negativo indica que o fluxo está direcionado para *dentro* da superfície lateral.

Observe que o comprimento de 80 cm é uma informação totalmente supérflua para o cálculo pedido no problema.

34.2.3 O Magnetismo da Terra – (10/17)

E 34-10. Em New Hampshire, a componente horizontal média do campo magnético da Terra, em 1912, era de 16 μT e a inclinação média era de 73^0. Qual era o correspondente módulo do campo magnético da Terra?

▶ Para situar-se, reveja o Exemplo 3 bem como a Fig. 34-10.

O módulo B do campo magnético da Terra e a sua componente horizontal B_h estão relacionados por

$$B_h=B\cos\phi_i$$

onde ϕ é a inclinação (veja Fig. 34-10). Portanto,

$$B=\frac{B_h}{\cos\phi_i}=54.7\ \mu\text{T.}$$

P 34-13. O campo magnético da Terra pode ser aproximado como o campo de um dipolo magnético, com componentes horizontal e vertical, num ponto distante r do centro da Terra, dadas por,

$$B_h=\frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\cos\lambda_m,\quad B_v=\frac{\mu_0\mu}{2\pi r^3}\,\text{sen}\lambda_m,$$

onde λ_m é a *latitude magnética* (latitude medida a partir do equador magnético na direção do pólo norte magnético ou do pólo sul magnético). Suponha que o momento de dipolo magnético seja $\mu=8\times 10^{22}$ A·m^2. **(a)** Mostre que, na latitude λ_m, o módulo do campo magnético é dado por

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\,\text{sen}^2\,\lambda_m}.$$

(b) Mostre que a inclinação ϕ_i do campo magnético está relacionada com a latitude magnética λ_m por

$$\tan\phi_i=2\tan\lambda_m.$$

▶ **(a)** O módulo do campo magnético é dado por

$$\begin{aligned}B &= \sqrt{B_h^2+B_v^2}\\ &= \sqrt{\Big(\frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3}\cos\lambda_m\Big)^2+\Big(\frac{\mu_0\mu}{2\pi r^3}\,\text{sen}\,\lambda_m\Big)^2}\\ &= \frac{\mu_o\mu}{4\pi r^3}\sqrt{\cos^2\lambda_m+4\,\text{sen}^2\,\lambda_m}\\ &= \frac{\mu_o\mu}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\,\text{sen}^{\,2}\lambda_m},\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\cos^2\lambda_m\equiv 1-\,\text{sen}^2\,\lambda_m$.

(b)

$$\tan\phi_i=\frac{B_v}{B_h}=\frac{[\mu_0\mu/(2\pi r^3)]\,\text{sen}\,\lambda_m}{[\mu_0\mu/(4\pi r^3)]\cos\lambda_m}=2\tan\lambda_m.$$

P 34-14. Use os resultados do Problema 13 para calcular o campo magnético da Terra (módulo e inclinação):

(a) no equador magnético; **(b)** num ponto de latitude magnética igual a 60^o; **(c)** no pólo norte magnético.

▶ Como sugerido no exercício anterior, suponha que o momento de dipolo magnético da Terra seja $\mu = 8 \times 10^{22}$ A·m^2.

(a) No equador magnético temos $\lambda_m = 0^o$, portanto

$$\begin{aligned} B_{\text{eq}} \equiv \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(8.0 \times 10^{22})}{4\pi\ (6.37 \times 10^6)^3} \\ &= 3.10 \times 10^{-5}\ \text{T}. \end{aligned}$$

A inclinação ϕ_i é dada por

$$\phi_i = \tan^{-1}(2 \tan \lambda_m) = \tan^{-1} 0^o = 0^o.$$

Observe que o coeficiente que aparece na frente da raiz quadrada é na verdade B_{eq}. Portanto, uma vez determinado, tal valor pode ser 'reciclado' em todos cálculos posteriores.

(b) Para $\lambda_m = 60^o$ temos

$$\begin{aligned} B &= B_{\text{eq}} \sqrt{1 + 3\ \text{sen}^2 \lambda_m} \\ &= (3.10 \times 10^{-5}) \sqrt{1 + 3\ \text{sen}^2 60^o} \\ &= 5.6 \times 10^{-5}\ \text{T}. \end{aligned}$$

A inclinação ϕ_i é dada por

$$\phi_i = \tan^{-1}(2 \tan 60^o) = 74^o.$$

(c) No pólo norte magnético temos $\lambda_m = 90^o$:

$$\begin{aligned} B &= (3.10 \times 10^{-5}) \sqrt{1 + 3(1.0)^2} \\ &= 6.20 \times 10^{-5}\ \text{T}. \end{aligned}$$

A inclinação ϕ_i é dada por

$$\phi_i = \tan^{-1}(2 \tan 90^o) = 90^o.$$

P 34-15. Calcule a altura acima da superfície da Terra onde o módulo do campo magnético da Terra cai à metade do valor na superfície, na mesma latitude magnética. (Use a aproximação do campo do dipolo fornecida no Problema 13.)

▶ Do Problema 13 temos que

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi r^3} \sqrt{\Lambda},$$

onde, para abreviar, definimos $\Lambda \equiv 1 + 3\ \text{sen}^2\ \lambda_m$.

Na superfície da Terra $r = R$, onde R é o raio da Terra. A uma altura h, faremos $r = R + h$; assim,

$$\frac{\mu \mu_0}{4\pi (R+h)^3} \sqrt{\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{\mu \mu_0}{4\pi R^3} \sqrt{\Lambda}.$$

Donde se conclui que

$$R + h = 2^{1/3} R = 1600\,\text{km}.$$

P 34-16. Usando a aproximação do campo do dipolo para o campo magnético da Terra dada no Problema 13, calcule a intensidade máxima do campo magnético na fronteira do revestimento do núcleo, que se encontra a 2900 km abaixo da superfície da Terra.

▶ Usando a expressão obtida na parte (a) do problema 13, observando que o máximo de B ocorre quando $\text{sen}\lambda_m = 1$, e que $r = 6370\ \text{km} - 2900\ \text{km} = 3470$ km, temos

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o \mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\ \text{sen}^{\ 2} \lambda_m} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(8 \times 10^{22})}{4\pi (3.47 \times 10^6)^3} \sqrt{1+3} \\ &= 3.83 \times 10^{-4}\ \text{T}. \end{aligned}$$

P 34-17. Use os resultados do Problema 13 para calcular o módulo e o ângulo de inclinação do campo magnético da Terra no pólo norte geográfico. (Sugestão: o ângulo entre o eixo magnético e o eixo de rotação da Terra é igual a 11.5^o.) Porque os valores calculados não concordam com os valores medidos?

▶ Para entender o problema, comece por entender o que a Fig. 34-7 mostra.

É dado que o ângulo entre o eixo magnético e o eixo de rotação da Terra é 11.5^o, de modo que $\lambda_m = 90^o - 11.5^o = 78.5^o$ no pólo norte geográfico da Terra. Portanto, com $r = R_T = 6370$ km obtemos o campo

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o \mu}{4\pi R_T^3} \sqrt{1 + 3\ \text{sen}^{\ 2} \lambda_m} \\ &= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(8 \times 10^{22})}{4\pi (6.37 \times 10^6)^3} \sqrt{1 + 3\ \text{sen}^2 78.5^o} \\ &= 6.11 \times 10^{-5}\ \text{T}, \end{aligned}$$

e uma inlicnação ϕ_i igual a

$$\phi_i = \tan^{-1}(2\ \tan 78.5^o) = 84.2^o.$$

Uma explicação plausível para a discrepância entre os valores calculado e medido do campo magnético terrestre é que as fórmulas obtidas no Problema 34-13 estão baseadas na aproximação dipolar, que não representa adequadamente a distribuição real do campo terrestre perto da superfície. (A aproximação melhora significativamente quando calculamos o campo magnético terrestre longe do seu centro.)

34.2.4 Paramagnetismo – (18/25)

E 34-18. Um campo magnético de 0.5 T é aplicado a um gás paramagnético cujos átomos têm um momento de dipolo magnético intrínseco de 1×10^{-23} J/T. A que temperatura a energia cinética média de translação dos átomos do gás será igual à energia necessária para inverter completamente este dipolo neste campo magnético?

▶ A equação a ser satisfeita é a seguinte:

$$E = \frac{3}{2}kT = |\vec{\mu}\cdot\vec{B} - (-\vec{\mu}\cdot\vec{B})| = 2\mu B,$$

onde $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann. Desta expressão obtemos a temperatura

$$\begin{aligned} T = \frac{4\mu B}{3k} &= \frac{4(1\times 10^{-23})(0.50)}{3(1.38\times 10^{-23})} \\ &= 0.48^o \text{ K}. \end{aligned}$$

Perceba que como esta temperatura é muitissimo baixa (da ordem de $-272,5$ ^{o}C) vemos que é muito fácil para a agitação térmica usual inverter os momentos de dipolo.

E 34-19. Uma barra magnética cilíndrica tem comprimento de 5.0 cm e um diâmetro de 1.0 cm. Ela possui uma magnetização uniforma de 5.3×10^3 A/m. Qual é o seu momento de dipolo magnético?

▶ A relação entre a magnetização M e o momento magnético μ é:

$$M = \frac{\mu}{V}$$

onde V é o volume da barra. Portanto,

$$\mu = MV = M(\pi r^2 h) = 20.8 \text{ mJ/T}.$$

P 34-21. O sal paramagnético a que a curva de magnetização da Fig. 34-11 se aplica deve ser testado para verificar se obedece à lei de Curie. A amostra é colocada num campo magnético de 0.5 T que permanece constante durante toda a experiência. A seguir, a magnetização M é medida na faixa de temperatura de 10 até 300 K. A lei de Curie será obedecida nestas condições?

▶ Para as medidas sendo feitas a maior razão entre o campo magnético e a temperatura é $(0.5 \text{ T})/(10 \text{ K}) = 0.05$ T/K. Verifique na Fig. 34-11 se este valor está na região onde a magnetização é uma função linear da razão B/T. Como se vê, o valor está bem perto da origem e, portanto, concluimos que a magnetização *obedece* a lei de Curie.

P 34-24. Um elétron com energia cinética K_e desloca-se numa trajetória circular que é ortogonal a um campo magnético uniforme, submetido somente a ação do campo. **(a)** Mostre que o momento de dipolo magnético devido ao seu movimento orbital tem módulo $\mu = K_e/B$ e sentido contrário ao de $\mathbf{B}$. **(b)** Calcule o módulo, a direção e o sentido do momento de dipolo magnético de um íon positivo que tem energia cinética K_i nas mesmas circunstâncias. **(c)** Um gás ionizado tem 5.3×10^{21} elétrons/m^3 e o mesmo número de íons/m^3. Considere a energia cinética média dos elétrons igual a 6.2×10^{-20} J e a energia cinética média dos íons igual a 7.6×10^{-21} J. Calcule a magnetização do gás para um campo magnético de 1.2 T.

▶ **(a)** Usando a Eq. 34-9 e a Eq. 30-17 (Cap. 30, pag. 165), obtemos:

$$\mu = \Big(\frac{1}{2}ev\Big)\underbrace{\Big(\frac{mv}{eB}\Big)}_{\text{raio}} = \Big(\frac{1}{2}mv^2\Big)\frac{1}{B} = \frac{K_e}{B}.$$

Um elétron circula no sentido horário em um campo magnético direcionado para dentro do papel, por exemplo. O vetor velocidade angular resultante $\vec{\omega}$ é também direcionado para dentro do papel. Mas a carga do elétron é negativa; assim, $\vec{\mu}$ é antiparalelo a $\vec{\omega}$ e, portanto, antiparalelo a $\mathbf{B}$.

(b) O valor da carga cancela-se no cálculo de μ no item (a). Assim, para um íon positivo, vale a mesma relação:

$$\mu = \frac{K_i}{B}.$$

Um íon positivo circula no sentido anti-horário num campo magnético direcionado para dentro do papel. Portanto, $\vec{\omega}$ tem sentido para fora do papel. Como o íon tem carga positiva, $\vec{\mu}$ é paralelo a $\vec{\omega}$ e, portanto antiparalelo a $\mathbf{B}$, como o elétron.

(c) Os dipolos magnéticos devidos aos elétrons e, aos íons possuem o mesmo sentido. Portanto,

$$\mu = N_e\mu_e + N_i\mu_i = \frac{1}{B}\big(N_eK_e + N_iK_i\big)$$

onde N_e e N_i são, respectivamente, o número de elétrons e o número total de íons. Como $N_e = N_i = N$, obtemos para a magnetização:

$$M = \frac{\mu}{V} = \frac{1}{B}\Big(\frac{N}{V}\Big)(K_e + K_i) = 307 \text{ A/m}.$$

34.2.5 Diamagnetismo – (26/27)

P 34-26.

Uma substância diamagnética é fracamente repelida por um pólo de um ímã. A Fig. 34-22 apresenta um modelo para o estudo deste fenômeno. A "substância diamagnética" é uma espira de corrente L, que está colocada no eixo de um ímã e nas proximidades do seu pólo norte. *Como* a substância é diamagnética, o momento magnético $\vec{\mu}$ da espira se alinhará antiparalelamente ao campo $\mathbf{B}$ do ímã. (a) Faça um esboço das linhas de $\mathbf{B}$ em virtude do ímã. (b) Mostre o sentido da corrente i na espira quando $\vec{\mu}$ estiver antiparelelo a $\mathbf{B}$. (c) Usando $d\mathbf{F} = i\ d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$, mostre a partir de (a) e (b) que a força resultante sobre L aponta no sentido que se afasta do pólo norte do ímã.

▶

P 34-27*.

Um elétron de massa m e carga de módulo e se move numa órbita circular de raio r ao redor de um núcleo. Um campo magnético $\mathbf{B}$ é, então, estabelecido perpendicularmente ao plano da órbita. Supondo que o raio da órbita não varie e que a variação da velocidade escalar do elétron em conseqüência do campo $\mathbf{B}$ seja pequena, determine uma expressão para a variação do momento magnético orbital do elétron.

▶ Um campo elétrico com linhas de campo circulares é induzido quando o campo magnético é ligado. Suponhamos que o campo magnético aumente linearmente de 0 até B num tempo t. De acordo com a Eq. 32-24 a magnitude do campo elétrico na órbita é dada por

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = \frac{r}{2}\frac{B}{t},$$

onde r é o raio da órbita. O campo elétrico induzido é tangente à órbita e muda a velocidade do elétron, sendo tal mudança dada por

$$\begin{aligned}\Delta v = \alpha t &= \frac{e}{m}\, E\, t \\ &= \frac{e}{m}\Big(\frac{r}{2}\ \frac{B}{t}\Big)\ t = \frac{erB}{2m}.\end{aligned}$$

A corrente média associada com cada volta do elétron circulando na órbita é

$$i = \frac{\Delta\text{carga}}{\Delta\text{tempo}} = \frac{e}{(2\pi r)/v} = \frac{ev}{2\pi r}$$

de modo que o momento de dipolo correspondente é

$$\mu = N\, i\, A = (1)\Big(\frac{ev}{2\pi r}\Big)(\pi r^2) = \frac{1}{2}\, e\, r\, v.$$

Portanto, variação do momento de dipolo é

$$\Delta\mu = \frac{1}{2}\ er\Delta v = \frac{1}{2}er\Big(\frac{erB}{2m}\Big) = \frac{e^2r^2B}{4m}.$$

34.2.6 Ferromagnetismo – (28/38)

E 34-28. Medições realizadas em minas e em furos de prospecção mostram que a temperatura na Terra aumenta com a profundidade na taxa média de 30^o C/km. Supondo que a temperatura na superfície seja de 10^o C, a que profundidade o ferro deixaria de ser ferromagnético? (A temperatura Curie do ferro varia muito pouco com a pressão.)

▶ A temperatura de Curie do ferro é 770^o C. Se chamarmos de x a profundidade na qual a temperatura atinge esta valor, então 10^o C + $(30^o$ C/km$)x = 770^o$ C, ou seja, isolando-se o valor de x,

$$x = \frac{770^o\text{ C} - 10^o\text{ C}}{30^o\text{ C/km}} = \frac{76}{3} = 25.33 \text{ km}.$$

E 34-29. O acoplamento de troca mencionado na secção 34-8 como responsável pelo ferromagnetismo *não* é a interação magnética mútua entre dois dipolos magnéticos elementares. Para mostrar isto, calcule: **(a)** o campo magnético a uma distância de 10 nm ao longo do eixo do dipolo de um átomo com momento de dipolo magnético igual a 1.5×10^{-23} J/T (cobalto) e **(b)** a energia mínima necessária para inverter um segundo dipolo idêntico neste campo. Compare com o resultado do Exemplo 34-4. O que se pode concluir?

► **(a)** O campo de um dipolo ao longo do seu eixo é dado pela Eq. 31-25:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{z^3},$$

onde μ é o momento de dipolo e z é a distância a partir do meio do dipolo. Portanto

$$\begin{aligned} B &= \frac{(4\pi\times 10^{-7}\ \text{T·m/A})(1.5\times 10^{-23}\ \text{J/T})}{2\pi(10\times 10^{-9}\ \text{m})^3} \\ &= 3\times 10^{-6}\ \text{T}. \end{aligned}$$

(b) A energia de um dipolo magnético $\vec{\mu}$ num campo magnético $\vec{B}$ é $U = \vec{\mu}\cdot\vec{B} = \mu B\cos\phi$, onde ϕ é o ângulo entre o momento de dipolo e o campo. A energia necessária para inverte-lo (de $\phi = 0^o$ até $\phi = 180^o$) é

$$\begin{aligned} \Delta U &= 2\mu B \\ &= 2(1.5\times 10^{-23}\frac{\text{J}}{\text{T}})(3\times 10^{-6}\ \text{T}) \\ &= 9\times 10^{-29}\ \text{J} \\ &= 5.6\times 10^{-10}\ \text{eV}. \end{aligned}$$

A energia cinética média de translação a temperatura ambiente é da ordem de 0.04 eV (veja o Exemplo 34-4). Portanto se interações do tipo dipolo-dipolo fossem responsáveis pelo alinhamento dos dipolos, colisões iriam facilmente "randomizar" [*id est*, tornar aleatórias] as direções dos momentos e eles não permaneceriam alinhados.

E 34-30. A magnetização na saturação do níquel vale 4.7×10^5 A/m. Calcule o momento magnético de um único átomo de níquel. (A densidade do níquel é 8.90 g/cm^3 e sua massa molecular é 58.71 g/mol.)

► A magnetização de saturação corresponde ao completo alinhamento de todos os dipolos, dado por

$$M_{max} = \frac{\mu N}{V}.$$

Fazendo $V = 1$ m^3, a massa do níquel em 1 m^3 é $(8.90\ \text{g/cm}^3)\cdot(10^6\ \text{m3}) = 8.90\times 10^6$ g; portanto,

$$n = \frac{8.90\times 10^6}{58.71\ \text{g/mol}} = 1.5159\times 10^5\ \text{mol}.$$

Através da Eq. 2 do Cap. 21, temos:

$$N = nN_A = 9.126\times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3.$$

Assim,

$$\mu = \frac{M_{max}V}{N} = 5.15\times 10^{-24}\ \text{A·m}^2.$$

P 34-32. O momento de dipolo magnético da Terra é 8×10^{22} J/T. **(a)** Se a origem deste magnetismo fosse uma esfera de ferro magnetizada, no centro da Terra, qual deveria ser o seu raio? **(b)** Que fração do volume da Terra esta esfera ocuparia? Suponha um alinhamento completo dos dipolos. A densidade do núcleo da Terra é 14 g/cm^3. O momento de dipolo magnético de um átomo de ferro é 2.1×10^{-23} J/T. (*Nota*: consideramos a região mais interna do núcleo da Terra formada de partes líquida e sólida e parcialmente de ferro, porém o hipótese de um ímã permanente como fonte do magnetismo da Terra foi completamente afastada por diversas razões. Uma delas é que a temperatura está certamente acima do ponto de Curie.)

► **(a)** Se a magnetização da esfera está saturada, o momento de dipolo total é $\mu_{\text{total}} = N\mu$, onde N é o número de átomos de ferro na esfera e μ é o momento de dipolo de um átomo de ferro. Desejamos determinar o raio de uma esfera de ferro contendo N átomos de ferro. A massa de tal esfera é Nm, onde m é a massa de um átomo de ferro. Ela também é dada por $4\pi\rho R^3/3$, onde ρ é a densidade do ferro e R é o raio da esfera. Portanto $Nm = 4\pi\rho R^3/3$ e

$$N = \frac{4\pi\rho R^3}{3m}.$$

Substitua isto na relação $\mu_{\text{total}} = N\ \mu$ para assim obter

$$\mu_{\text{total}} = \frac{4\pi\rho R^3\mu}{3m}, \quad \text{ou seja,} \quad R = \Big(\frac{3m\mu_{\text{total}}}{4\pi\rho\mu}\Big)^{1/3}.$$

A massa de um átomo de ferro é

$$\begin{aligned} m = 56u &= (56u)(1.66\times 10^{-27}\ \text{kg/u}) \\ &= 9.3\times 10^{-26}\ \text{kg}. \end{aligned}$$

Com isto, obtemos

$$\begin{aligned} R &= \Big(\frac{3(9.3\times 10^{-26})(8\times 10^{22})}{4\pi(14\times 10^3)(2.1\times 10^{-23})}\Big)^{1/3} \\ &= 1.8\times 10^5\ \text{m}. \end{aligned}$$

(b) O volume da esfera é

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{4\pi}{3}R^3 \\ &= \frac{4\pi}{3}(1.82\times 10^5\ \text{m})^3 \\ &= 2.53\times 10^{16}\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

e o volume da Terra é

$$V_T = \frac{4\pi}{3}(6.37 \times 10^6 \text{ m})^3 = 1.08 \times 10^{21} \text{ m}^3,$$

de modo que a fração do volume da Terra que é ocupado pela esfera é

$$\frac{V_e}{V_T} = \frac{2.53 \times 10^{16} \text{ m}^3}{1.08 \times 10^{21} \text{ m}^3} = 2.3 \times 10^{-5}.$$

▶ **(a)** Seja M a massa do núcleo e r o seu raio. A massa de um íon, m, e o número de íons no núcleo, N. Considerando que a esfera seja de ferro, temos $N = M/m$, mas $M = \rho V$; assim,

$$N = \frac{M}{m} = \frac{\rho V}{m}.$$

Como a massa atômica do ferro é 56, $m = 56u$. Portanto, se μ é o momento magnético de um íon de ferro, $N\mu$ será o momento magnético do núcleo, conseqüentemente

$$8 \times 10^{22} = \frac{\rho(4\pi r^3/3)}{56u}\,(\mu).$$

Donde se conclui que $r = 182$ km.
(b) A fração será:

$$f = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = 2.33 \times 10^{-5}.$$

P 34-34.

Um anel de Rowland é formado de material ferromagnético. Sua seção transversal é circular, com um raio interno de 5 cm, um raio externo de 6 cm e seu enrolamento tem 400 espiras. (a) Que corrente deve ser estabelecida no enrolamento para que o campo magnético no interior do toróide atinja o valor $B_0 = 0.2$ mT? (b) Uma bobina secundária de 50 espiras e resistência de $8\ \Omega$ é enrolada em torno do toróide. Sabendo-se que, para este valor de B_0, temos $B_M = 800B_0$, determine a quantidade de carga que se move através da bobina secundária quando a corrente no enrolamento é ligada/

▶ *(a)* O campo de um toróide é $B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi r}$, onde N é o número total de espiras. Esse é um campo não uniforme, mas podemos considerar o campo aproximadamente uniforme e igual ao valor do campo no meio do tubo do toróide. Portanto,

$$B_0 = \frac{\mu_0 iN}{2\pi r}.$$

Donde se conclui que a corrente i vale 0.14 A.

(b) Com a presença do ferro no interior do toróide, o campo é $B_m + B_0 = 801B_0$. Seja A a área da seção transversal do toróide. Do Problema 17 do Cap. 32, a carga induzida em uma espira de N_c espiras e resistência R é:

$$\begin{aligned} q &= \frac{N_c[\Phi_B(\text{final}) - \Phi_B(\text{inicial})]}{R} \\ &= \frac{N_c(B_0 + B_m)A}{R_c} \\ &= 78.6\,\mu\text{C}. \end{aligned}$$

34.2.7 Problemas Extras

Coletamos aqui alguns problemas da3^a edição do livro que não aparecem mais na 4^a edição mas que podem ainda ser úteis.

P 34-??? Analise qualitativamente o aparecimento de momento de dipolos magnéticos induzidos num material diamagnético sob o ponto de vista da Lei de Faraday da indução. (*Sugestão*: Veja figura 10*b* do Cap. 32. Note também que, para elétrons em órbita, os efeitos indutivos (qualquer mudança na velocidade escalar) persistem após o campo magnético ter parado de variar; estes efeitos só terminam depois que o campo magnético é removido.)
Nota: este problema tem muito a ver com o problema 34-27.

▶ Um campo elétrico com linhas de campo circulares é induzido quando se liga um campo magnético. Suponha que o campo magnético cresça de 0 até B num tempo t. De acordo com a Eq. 32-24, a magnitude do campo elétrico na órbita é dada por

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = \frac{r}{2}\frac{B}{t},$$

onde r é o raio da órbita. O campo elétrico é tangente à orbita e muda a velocidade do elétron, sendo tal mudança dada por

$$\Delta v = at = \frac{e}{m}E\,t = \frac{e}{m}\frac{rB}{2t}\,t = \frac{erB}{2m}.$$

A corrente média associada com o elétron que circula na órbita é $i = ev/2\pi r$ e o momento de dipolo é

$$\mu = Ai = (\pi r^2)\left(\frac{ev}{2\pi r}\right) = \frac{1}{2}evr.$$

Com isto tudo, a mudança no momento de dipolo é

$$\Delta\mu = \frac{1}{2}er\Delta v = \frac{1}{2}er\frac{erB}{2m} = \frac{e^2r^2B}{4m}.$$

▶ Usando a Eq. 21 do Cap. 32, obtemos:

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}.$$

AQUI FIGURA

Assim, os elétrons sofrem a ação de uma força elétrica representada na figura acima. Suponha que o campo magnético aumente de uma quantidade B num tempo T. Portanto, cada elétron tem uma mudança de velocidade dada por

$$\begin{aligned}\Delta v = aT = \left(\frac{F}{m}\right)T = \left(\frac{eE}{m}\right)T &= \frac{e}{m}\left(\frac{r}{2}\frac{B}{T}\right)T \\ &= \frac{erB}{2m}\end{aligned}$$

e as novas velocidades são:

$$v = v_0 \pm \frac{erB}{2m}$$

($+$) para ver o sentido horário e ($-$) para o sentido anti-horário. Dividindo v por r e supondo que r não varie, temos:

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{eB}{2m}.$$

Essa nova velocidade angular permite fazer aumentar ou diminuir o momento magnético orbital. A existência de um efeito diamagnético num campo magnético constante pode ser “explicada”, observando que os elétrons circulantes continuam cortando as linhas de fluxo magnético.

35 Oscilações Eletromagnéticas

35.1 Questões

Q 35-1. Por que o circuito LC da Fig. 35-1 não pára simplesmente de oscilar no instante em que o capacitor fica completamente descarregado?

▶ É que apesar de termos $q = 0$, temos simultaneamente $dq/dt \neq 0$. A situação, portanto, é análoga a de um pêndulo que passa por um extremo ou da energia potencial [quando $x = 0$ ou $x = x_{max}$ mas $dx/dt \neq 0$] ou da energia cinética [quando $v = 0$ ou $v = v_{max}$ mas $dv/dt \neq 0$].
As situações não correspondem a equilíbrios estáveis. Note a enfase na palavra *extremo* e que tal palavra implica mais coisas do que as acima rapidamente mencionadas...

35.2 Problemas e Exercícios

35.2.1 Oscilações LC: Estudo Qualitativo – (1/6)

E 35-1. Qual é a capacitância de um circuito LC, sabendo-se que a carga máxima do capacitor é 1.60 μC e a energia total é 140 μJ?

▶ Use a fórmula $U = Q^2/(2C)$ para obter

$$C = \frac{Q^2}{2U} = \frac{(1.60\times 10^{-6})^2}{2(140\times 10^{-6})} = 9.14\times 10^{-9}\ \text{F}.$$

E 35-2. Num circuito LC, um indutor de 1.50 mH armazena uma energia máxima de 10 μJ. Qual é o pico de corrente?

▶ Use $U = LI^2/2$ para obter

$$I = \sqrt{\frac{2U}{L}} = \sqrt{\frac{2(10.0\times 10^{-6})}{1.50\times 10^{-3}}} = 0.115\ \text{A}.$$

E 35-3. Num circuito LC oscilante $L = 1.10$ mH e $C = 4.0$ μF. A carga máxima do capacitor vale 3.0 μC. Determine a corrente máxima.

▶ Das igualdades $U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}Q^2/C$ temos

$$\begin{aligned} I = \frac{Q}{\sqrt{LC}} &= \frac{3.0\times 10^{-6}}{\sqrt{(1.10\times 10^{-3})(4.0\times 10^{-6})}} \\ &= 4.52\times 10^{-2}\ \text{A}. \end{aligned}$$

E 35-4. Um circuito LC consiste num indutor de 75 mH e num capacitor de 3.6 μF. Sabendo-se que a carga máxima do capacitor é de 2.9 μC, **(a)** qual a energia total no circuito e **(b)** qual é a corrente máxima?

▶ *(a)*

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{2.90\times 10^{-6}}{2(3.6\times 10^{-6})} = 1.17\times 10^{-6}\ \text{J};$$

(b)

$$I = \sqrt{\frac{2U}{L}} = \sqrt{\frac{2(1.17\times 10^{-6})}{75\times 10^{-3}}} = 5.59\times 10^{-3}\ \text{A}.$$

E 35-5. Para um certo circuito LC a energia total é transformada de energia elétrica no capacitor em energia magnética no indutor em 1.5 μs. **(a)** Qual é o período de oscilação? **(b)** Qual a freqüência de oscilação? **(c)** Num certo instante, a energia magnética é máxima. Quanto tempo depois será máxima novamente?

▶ **(a)** $T = 4\times 1.50\ \mu\text{s} = 6.0\ \mu$s.
(b) $f = T^{-1} = (6.0\times 10^{-6})^{-1} = 1.67\times 10^5$ Hz.
(c) Após meio período, ou seja 3.0 μs.

P 35-6. A freqüência de oscilação de um certo circuito LC é 2.00 kHz (corrija o erro na *tradução* do livro-texto: em vez de 200 deve ser 2.00 kHz). No instante $t = 0$, a placa A do capacitor tem carga positiva máxima. Em quais instantes $t > 0$ **(a)** a placa A terá novamente carga positiva máxima, **(b)** a outra placa do capacitor terá carga positiva máxima e **(c)** o indutor terá campo magnético máximo?

▶ Considerando-se a dinâmica mostrada na Fig. 35-1 e usando $T = 2\times 10^3 = 2000$ Hz encontramos:
(a) A carga será máxima e positiva na placa A para

$$t_a = nT = \frac{n}{f} = \frac{n}{2000} = n\ (500\ \mu\text{s}),$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots$.
(b) Primeiramente, observe que é preciso esperar-se meio período para que a a carga atinja seu valor máximo positivo na outra placa pela primeira vez. Depois de

atingi-lo, ela volta a repetir-se a cada período que passa, ou seja, para

$$t_b = \frac{T}{2} + nT = \frac{1+2n}{2\times 2000} = (2n+1)(2.5\ \mu\text{s}),$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) É necessário $T/4$ para que o campo magnético no indutor atinja seu valor máximo pela primeira vez, passando então a repetir-se a cada meio período:

$$t_c = \frac{T}{4} + \frac{nT}{2} = \frac{t_b}{2} = (2n+1)(1.25\ \mu\text{s}),$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

35.2.2 Analogia com o MHS – (7/8)

P 35-7. Um bloco de 0.50 kg oscila preso a uma mola que, quando distendida de 2.0 mm, a partir do equilíbrio, tem uma força restauradora de 8.0 N. **(a)** Qual é a freqüência angular de oscilação? **(b)** Qual é o período de oscilação? **(c)** Qual será a capacitância do sistema LC análogo, se a indutância L valer 5.0 H?

► **(a)**

$$\begin{aligned}\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} &= \sqrt{\frac{F/x}{m}}\\ &= \sqrt{\frac{8.0}{(2.0\times 10^{-3})(0.50)}}\\ &= 89 \text{ rad/s}.\end{aligned}$$

(b)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{89} = 7.0\times 10^{-2}\text{ s}.$$

(c) Usando a definição de $\omega = (LC)^{-1}$, temos

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(89)^2(5.0)} = 2.5\times 10^{-5}\text{ F}.$$

P 35-8. Um circuito LC com um indutor de 1.25 H possui uma energia de 5.7 μJ. A carga máxima armazenada no capacitor é igual a 175 μC. Determine **(a)** a massa, **(b)** a constante da mola, **(c)** o deslocamento máximo e **(d)** a velocidade escalar máxima para o sistema mecânico an'alogo.

► **(a)** Como a massa m corresponde a indutância L, temos $m = 1.25$ Kg.

(b) Temos $k = 1/C$. Como $C = Q^2/(2U) = 2.69\times 10^{-3}$ F, segue que $k = 1/C = 372$ N/m.

(c) O deslocamento máximo x_m corresponde à carga máxima, de modo que

$$x_m = 175\times 10^{-6}\text{ m}.$$

(d) A velocidade máxima v_m corresponde à corrente máxima. A corrente máxima é

$$\begin{aligned}I = Q\omega &= \frac{Q}{\sqrt{LC}}\\ &= \frac{175\times 10^{-6}}{\sqrt{(1.25)(2.69\times 10^{-3})}}\\ &= 3.02\times 10^{-3}\text{ A}.\end{aligned}$$

Portanto

$$v_m = 3.02\times 10^{-3}\text{ m/s}.$$

Alternativamente, podemos também usar a equação $U_B = LI^2/2$, para obter

$$I = \sqrt{\frac{2U_B}{L}},$$

que fornece o mesmo resultado numérico acima.

35.2.3 Oscilações LC: Estudo Quantitativo – (9/30)

E 35-9. Os osciladores LC são usados em circuitos ligados a alto-falantes para criar alguns sons da música eletrônica. Que indutância deve ser usada com um capacitor de 6.7 μF para produzir uma freqüência de 10 kHz, aproximadamente o meio da faixa audível?

► Use $f = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$ para obter

$$\begin{aligned}L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} &= \frac{1}{4\pi^2(10\times 10^3)^2(6.7\times 10^{-6})}\\ &= 3.8\times 10^{-5}\text{ H}.\end{aligned}$$

E 35-10.

► Use $f = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$ para obter

$$\begin{aligned}C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} &= \frac{1}{4\pi^2(3.5\times 10^3)^2(1.3\times 10^{-3})}\\ &= 1.59\times 10^{-6}\text{ F}.\end{aligned}$$

E 35-11.

Num circuito LC com $L = 50$ mH e $C = 4\ \mu$F, a corrente é inicialmente máxima. Quanto tempo depois o capacitor estará com carga plena pela primeira vez?

▶ Sendo T o período de oscilação do circuito, o tempo solicitado será $t = T/4$. O período é dado por $T = 2\pi/\omega = 2\pi\ \sqrt{LC}$, onde ω é a freqüência angular de oscilação, L é a indutância, e C é a capacitância. Portanto

$$
\begin{aligned}
t = \frac{T}{4} &= \frac{2\pi\sqrt{LC}}{4} \\
&= \frac{2\pi\sqrt{(0.05)(4\times 10^{-6})}}{4} \\
&= 7\times 10^{-4}\ \text{s.}
\end{aligned}
$$

E 35-12.

▶ Com a chave S_1 fechada e as outras abertas, o que temos é um circuito RC com constante de tempo $\tau_C = RC$. Quando S_2 é fechada e as outras são abertas o capacitor estará fora do circuito e o que sobra é um circuito RL com constante de tempo $\tau_L = L/R$. Quando S_3 está fechada e as outras estão abertas o resistor está fora do circuito e o que sobra é um circuito que oscila com período $T = 2\pi\sqrt{LC}$.
Substituindo-se $L = R\tau_L$ e $C = \tau_C/R$ obtemos facilmente que

$$T = 2\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}.$$

E 35-13. Deduza a equação diferencial de um circuito LC (Eq. 35-10), usando a leis das malhas.

▶ Aplicando a lei das malhas a um circuito LC encontramos

$$\mathcal{E}_{\text{total}} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Como $i = dq/dt$ e, portanto, $di/dt = d^2q/dt^2$, vemos que a igualdade mais à direita fornece a equação pedida:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

E 35-14.

▶ Aplicando a lei das malhas a todo o circuito temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{total}} &= \mathcal{E}_{L_1} + \mathcal{E}_{C_1} + \mathcal{E}_{R_1} + \dots \\
&= \sum_k \left(\mathcal{E}_{L_k} + \mathcal{E}_{C_k} + \mathcal{E}_{R_k}\right) \\
&= \sum_k \left(L_k\frac{di}{dt} + \frac{q}{C_k} + iR_k\right) \\
&= L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + iR = 0,
\end{aligned}
$$

onde

$$L = \sum_k L_k, \qquad \frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}, \qquad R = \sum_k R_k.$$

De fato, a associação mostrada na Fig. 35-11a é equivalente a da Fig. 35-11b.

P 35-18.

▶ **(a)** Após ser movida para a posição b temos um circuito LC cuja freqüência angular é $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e a freqüência é

$$
\begin{aligned}
f = \frac{\omega}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{(54\times 10^{-3})(6.2\times 10^{-6})}} \\
&= \frac{1728.2528}{2\pi} \\
&= 275\ \text{Hz.}
\end{aligned}
$$

(b) No instante do fechamento da chave a corrente é zero, sendo que o capacitor está carregado com uma tensão $V = 34$ V. Portanto a carga máxima no capacitor é $Q = VC = 34\times 6.2\times 10^{-6} = 2.11\times 10^{-4}$ C. A amplitude da corrente é, conseqüentemente,

$$
\begin{aligned}
I = \omega Q &= 2\pi f Q \\
&= 2\pi(275)(2.11\times 10^{-4}) \\
&= 0.365\ \text{A.}
\end{aligned}
$$

P 35-21.

▶ **(a)** Em qualquer instante, a energia total U no circuito é a soma da energia U_E no campo elétrico do capacitor e a energia U_B no campo magnético do indutor. Quando $U_E = 0.5\,U_B$, temos $U_B = 2\,U_E$ e $U = U_E + U_B = 3\,U_E$. A energia U_E é dada por $q^2/(2C)$, onde q é a carga no capacitor e C é a capacitância. A energia *total* U é dada por $Q^2/(2C)$, onde Q é a carga máxima no capacitor, de modo que $Q^2/(2C) = 3\,q^2/(2C)$ ou seja $q = Q/\sqrt{3} \simeq 0.577\,Q$.

(b) Se o capacitor está totalmente carregado para $t = 0$ então sua carga é data por $q(t) = Q\,\cos(\omega t)$ onde ω é a freqüência da oscilação. A condição $q = 0.577\,Q$ é satisfeita quando $\cos(\omega t) = 0.577$, ou seja, para $\omega t = 0.955$ radianos. Como $\omega = 2\pi/T$, onde T é o período de oscilação, $t = 0.955\,T/(2\pi) = 0.152\,T$.

P 35-24.

► **(a)** Como sabemos que $f = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, quanto menor C, maior será f. Portanto, $f_{\text{max}} = 1/(2\pi\sqrt{LC_{\text{min}}})$, e $f_{\text{min}} = 1/(2\pi\sqrt{LC_{\text{max}}})$, fornecendo

$$\frac{f_{\text{max}}}{f_{\text{min}}} = \frac{\sqrt{C_{\text{max}}}}{\sqrt{C_{\text{min}}}} = \frac{\sqrt{365}}{\sqrt{10}} = 6.024 \simeq 6.$$

(b) Queremos escolher a capacitância C adicional de modo que a razão das freqüencias seja

$$r = \frac{1.60 \text{ MHz}}{0.54 \text{ MHz}} = 2.96\ .$$

Como a capacitância C adicional é colocada em *paralelo* ao capacitor variável, sua capacitância soma-se à da capacitância de sintonia, ou seja

$$\frac{\sqrt{C+365}}{\sqrt{C+10}} = 2.96\ ,$$

cuja solução é

$$C = \frac{365 - (2.96)^2(10)}{(2.96)^2 - 1} = 36 \text{ pF}.$$

Para termos a menor freqüência devemos usar $C = 365 + 36 = 401$ pF e $f = 0.54$MHz. Portanto

$$L = \frac{1}{(2\pi)^2\ C\ f^2} = 2.2 \times 10^{-4} \text{ H}.$$

P 35-25.

► **(a)**

$$\begin{aligned} U &= U_E + U_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{i^2\ L}{2} \\ &= \frac{(3.8\times 10^{-6})^2}{2(7.8\times 10^{-6})} + \frac{(9.2\times 10^{-3})^2(25\times 10^{-3})}{2} \\ &= 1.98\times 10^{-6} \text{ J}. \end{aligned}$$

(b) A carga Q máxima pode ser obtida do valor *total* da energia, assim:

$$\begin{aligned} Q = \sqrt{2CU} &= \sqrt{2(7.8\times 10^{-6})(1.98\times 10^{-6})} \\ &= 5.56\times 10^{-6} \text{ Coulombs}. \end{aligned}$$

(c) Analogamente, a corrente máxima I tanbém é obtida do valor *total* da energia:

$$\begin{aligned} I = \sqrt{\frac{2U}{L}} &= \sqrt{\frac{2(1.98\times 10^{-6})}{25\times 10^{-3}}} \\ &= 1.26\times 10^{-2} \text{ Ampères}. \end{aligned}$$

(d) Chamando-se de q_0 a carga no capacitor em $t = 0$, temos $q_0 = Q\cos\phi$ e

$$\begin{aligned} \phi = \cos^{-1}\left(\frac{q_0}{Q}\right) &= \cos^{-1}\left(\frac{3.80\times 10^{-6}}{5.56\times 10^{-6}}\right) \\ &= \pm 46.9^o. \end{aligned}$$

Para $\phi = +46.9^o$ a carga no capacitor está decrescendo, enquanto que para $\phi = -46.9^o$ ela está crescendo. Verifica-se isto calculando-se a derivada de q em relação ao tempo e computando-a para $t = 0$. Obtem-se $-\omega Q$ sen ϕ. Queremos que esta quantidade seja positiva o que nos leva a escolher $\phi = -46.9^o$, pois então sen$(-46.9^o) < 0$.

(e) Neste caso a derivada deve ser negativa. Portanto devemos tomar $\phi = +46.9^o$.

P 35-26.

► **(a)** A carga é dada por $q(t) = Q$ sen(ωt), onde Q é a carga máxima no capacitor e ω é a freqüência da oscilação. Escolheu-se a função seno para que tenhamos $q = 0$ no instante $t = 0$. Assim sendo, a corrente é

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \omega Q\ \cos(\omega t)$$

e para $t = 0$ temos $I = \omega Q$. Como $\omega = 1/\sqrt{LC}$, encontramos

$$\begin{aligned} Q &= I\sqrt{LC} \\ &= 2\sqrt{(3\times 10^{-3})(2.7\times 10^{-6})} \\ &= 1.80\times 10^{-4} \text{ Coulombs}. \end{aligned}$$

(b) A energia armazenada no capacitor é

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2\ \text{sen}^2(\omega t)}{2C}$$

e sua taxa de variação é

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{Q^2\omega\ \text{sen}(\omega t)\cos(\omega t)}{C}.$$

Usando a identidade $\cos(A)\ \text{sen}(A) = \frac{1}{2}\ \text{sen}(2A)$ obtemos

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{\omega Q^2}{2C}\ \text{sen}(2\omega t).$$

A maior variação ocorre quando $\text{sen}(2\omega t) = 1$, ou seja, para $2\omega t = \pi/2$ radianos, resultado que nos fornece

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi T}{4(2\pi)} = \frac{T}{8},$$

onde T é o período da oscilação, e usamos o fato que $\omega = 2\pi/T$.

(c) Substitua $\omega = 2\pi/T$ e $\text{sen}(2\omega t) = 1$ na expressão de dU_e/dt obtendo assim:

$$\Big(\frac{dU_E}{dt}\Big)_{\text{max}} = \frac{2\pi Q^2}{2TC} = \frac{\pi Q^2}{TC}.$$

Como $T = 2\pi\sqrt{LC} = 5.655 \times 10^{-4}$ s, encontramos

$$\Big(\frac{dU_E}{dt}\Big)_{\text{max}} = 66.7 \text{ Watts},$$

um valor *positivo*, indicando que a energia no capacitor está realmente aumentando para $t = T/8$.

P 35-30*.

► A energia originalmente no capacitor de 900 μF é

$$\frac{1}{2}C_{900}V^2 = \frac{1}{2}(900 \times 10^{-6})(100)^2 = 4.5 \text{ J}.$$

A energia necessária para se carregar o capacitor de 100 μF a 300 V é

$$\frac{1}{2}C_{100}V^2 = \frac{1}{2}(100 \times 10^{-6})(300)^2 = 4.5 \text{ J}.$$

Portanto, vemos que a energia originalmente no capacitor de 900 μF deve ser transferida para o capacitor de 100 μF, o que se pode fazer facilmente armazenando-a temporariamente no indutor.

Para tanto, deixe a chave S_1 aberta e feche a chave S_2, esperando até que o capacitor de 900 μF esteja completamente descarregado, com a corrente na malha à direita sendo então máxima. Tal máximo ocorre num quarto do período de oscilação. Como

$$T_{900} = 2\pi\sqrt{LC_{900}} = 0.596 \text{ s},$$

precisamos poratnto esperar $(0.596)/4 = 0.149$ segundos. Neste instante, feche S_1 e abra S_2 de modo que a corrente esteja agora na malha à esquerda. Espere agora um quarto do período de oscilação do circuito LC à esquerda e abra a chave S_1. Tal período é

$$T_{100} = 2\pi\sqrt{LC_{100}} = 0.199 \text{ s},$$

indicando ser preciso manter-se S_1 fechada durante $(0.199)/4 = 0.0497$ segundos antes de abri-la novamente.

35.2.4 Oscilações Amortecidas num RLC – (31/36)

E 35-31.

► O tempo necessário para 50 ciclos é

$$t = 50\ T = 50\frac{2\pi}{\omega} = 50\ 2\pi\sqrt{LC} = 0.5104 \text{ s}.$$

A carga máxima no capacitor decai de acordo com

$$q_{\text{max}} = Q\ e^{-Rt/(2L)},$$

onde Q é a carga em $t = 0$ e R é a resistência do circuito. Portanto

$$\begin{aligned} R &= -\frac{2L}{t}\ln\Big(\frac{q_{\text{max}}}{Q}\Big) \\ &= -\frac{2(220 \times 10^{-3})}{0.5104}\ln(0.99) \\ &= 8.66 \times 10^{-3}\ \Omega. \end{aligned}$$

P 35-33.

► Como a energia máxima no capacitor em cada ciclo é dada por $q^2_{\text{max}}/(2C)$, onde q_{max} é a carga máxima carga a C é a capacitância, deseja-se o instante de tempo para o qual

$$\frac{q^2_{\text{max}}}{2C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C},$$

o que significa que $q_{\text{max}} = Q/\sqrt{2}$.

Como temos que

$$q_{\text{max}} = Q\ e^{-Rt/(2L)},$$

onde R é a resistência e L a indutância do circuito. Resolvendo-se para t obtemos

$$\begin{aligned} t &= -\frac{2L}{R}\ln\Big(\frac{q_{\text{max}}}{Q}\Big) \\ &= -\frac{2L}{R}\ln\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \\ &= \frac{L}{R}\ln 2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\ln(1/\sqrt{2}) = -\ln\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\ln 2$.

P 35-36*.

Num circuito LC amortecido, mostre que a fração da energia perdida por ciclo de oscilação, $\Delta U/U$, é dada com boa aproximação por $2\pi R/(\omega L)$. A grandeza $\omega L/R$ é freqüentemente denominada de *fator de qualidade* "Q" do circuito (Q, por ser a letra inicial da palavra 'qualidade'). Um circuito de "alto Q" possui resistência baixa e uma perda relativa também baixa de energia por ciclo ($= 2\pi/Q$).

▶ Seja t um instante de tempo no qual o capacitor esteja carregado completamente num ciclo qualquer e seja $q_{\max 1}$ a carga então no capacitor. A energia no capacitor neste mesmo instante é

$$U(t) = \frac{q^2_{\max 1}}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L},$$

onde usamos o fato que $q_{\max 1} = Q\ e^{-Rt/(2L)}$, sendo Q a carga para $t = 0$.
Um ciclo mais tarde a carga máxima é

$$q_{\max 2} = Q\ e^{-R(t+T)/(2L)}$$

e a energia é

$$U(t+T) = \frac{q^2_{\max 2}}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-R(t+T)/L},$$

onde T é o período da oscilação. A perda fracional da energia por ciclo é, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U} &= \frac{U(t+T) - U(t)}{U(t)} \\ &= \frac{e^{-Rt/L} - e^{-R(t+T)/L}}{e^{-Rt/L}} \\ &= 1 - e^{-RT/L}. \end{aligned}$$

Supondo ser $RT/L \ll 1$ (a resistência é pequena) e usando o teorema binomial ["expansão da exponencial", apêndice G, pag. 334] encontramos facilmente que

$$e^{-RT/L} \simeq 1 - \frac{RT}{L}.$$

Substituindo-se T por $2\pi/\omega$, onde ω é a freqüência angular da oscilação, temos

$$\frac{\Delta U}{U} \approx 1 - \left(1 - \frac{RT}{L}\right) = \frac{RT}{L} = \frac{2\pi R}{\omega L}.$$

---

36 Correntes Alternadas

36.1 Questões

Q 36-2. De que modo um fasor difere de um vetor? Sabemos, por exemplo, que fems, diferenças de potencial e correntes não são grandezas vetoriais. De que modo, então, se pode justificar construções como as da Fig. 36-6?

▶ A d.d.p., a fem e a corrente não são vetores e, portanto, não seguem as regras da soma vetorial. A utilização de fasores para descrever estas grandezas é útil em virtude da possibilidade da existência da diferença de fase entre a corrente e a tensão, a qual se traduz em efeitos físicos (lembre-se, por exemplo, de que o *fator de potência* é dado por $\cos\phi$, onde ϕ é a diferença de fase entre a corrente e a fem). A direção do *fasor* não corresponde a nenhuma direção no espaço. Contudo, a projeção do *fasor* sobre um eixo possui a mesma *fase* de grandeza física a ele associada. Um *diagrama de fasores* é muito útil porque ele indica as relações de fase entre as grandezas representadas por estes fasores.

Q 36-8. Suponha, como enunciado na Seção 36-4, que um dado circuito seja "mais indutivo que capacitivo", isto é, que $X_L > X_C$. **(a)** Isto significa, para uma freqüência angular fixa, que L é relativamente "grande" e C relativamente "pequeno" ou que L e C são relativamente "grandes"? **(b)** Para valores fixos de L e de C, significa que ω é relativamente "grande" ou relativamente "pequeno"?

▶ **(a)** $X_L > X_C$ significa que $\omega^2 LC > 1$. Para um valor de ω fixo, o produto LC deve se relativamente grande.
(b) Para L e C fixos, o valor de ω é que deve ser relativamente grande.

36.2 Problemas e Exercícios:

36.2.1 Três circuitos simples – (1/12)

E 36-1. Suponha que a Eq. 36-1 descreva a fem efetiva disponível na saida de um gerador de 60 Hz. Qual a freqüência angular ω correspondente? Como a companhia de energia elétrica estabelece essa freqüência?

▶

E 36-2. Um capacitor de 1.5μ F está ligado, como na Fig. 36-4a, a um gerador de corrente alternada com $\mathcal{E}_m = 30$ V. Qual será a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da fem for **(a)** 1 kHz; **(b)** 8 kHz?

▶ **(a)** Use o fato que $I = \mathcal{E}/X_c = \omega C\mathcal{E}$. Portanto

$$I = \omega C\mathcal{E}_m = 2\pi f C\mathcal{E}_m = 0.283 \text{ A}.$$

(b) Se f é 8 vezes maior, também o é a corrente:

$$I = 8 \times 0.283 = 2.26 \text{ A}.$$

E 36-3. Um indutor de 50 mH está ligado, como na Fig. 36-5a, a um gerador de corrente alternada com $\mathcal{E}_m = 30$ V. Qual será a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da fem for **(a)** 1 kHz; **(b)** 8 kHz?

▶ **(a)** A amplitude da corrente é dada pela Eq. 36-18 com $\omega = 2\pi f$, onde $f = 1$ kHz:

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{\mathcal{E}_m}{(2\pi f L)} = 0.0955 \text{ A}.$$

(b) Para $f = 8$ kHz a reatância indutiva é 8 vezes maior e, portanto,

$$I_L = \frac{0.0955 \text{ A}}{8} = 0.0119 \text{ A}.$$

Observação: os números dados no final do livro estão errados.

E 36-4. Um resistor de 50Ω está ligado, como na Fig. 36-3a, a um gerador de corrente alternada com $\mathcal{E}_m = 30$ V. Qual será a amplitude da corrente alternada resultante se a freqüência da fem for **(a)** 1 kHz; **(b)** 8 kHz?

▶ As respostas dos itens (a) e (b) são idênticas pois para um resistor a corrente não depende da freqüência:

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = \frac{30}{50} = 0.60 \text{ A}.$$

E 36-5.

▶ **(a)** Use $X_L = \omega L = 2\pi f L$ para obter

$$f = \frac{X_L}{2\pi L} = \frac{1.30 \times 10^3}{(2\pi)(45 \times 10^{-3})} = 4.60 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

(b) Use $X_C = (\omega C)^{-1} = (2\pi f C)^{-1}$ para obter

$$\begin{aligned} C = \frac{1}{2\pi f X_C} &= \frac{1}{2\pi(4.6 \times 10^3)(1.3 \times 10^3)} \\ &= 2.66 \times 10^{-8} \text{ F} \\ &= 26.6 \text{ nF}. \end{aligned}$$

(c) Como $X_L \propto f$ enquanto que $X_C \propto f^{-1}$, vemos que os novos valores serão:

$$\begin{aligned} X'_L &= 2\, X_L = 2.60 \times 10^3\ \Omega \\ X'_C &= X_L/2 = 6.50 \times 10^2\ \Omega. \end{aligned}$$

E 36-6.

▶ **(a)**

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{2\pi C X_C} &= \frac{1}{2\pi(1.5 \times 10^{-6})(12.0)} \\ &= 8.84 \times 10^3 \text{ Hz} \\ &= 8.84 \text{ kHz}. \end{aligned}$$

(b) Dobrando-se a freqüência temos a reatância fica dividida por 2:

$$X'_C = \frac{X_C}{2} = 6\Omega.$$

E 36-7.

▶ **(a)** Para que as reatâncias sejam as mesmas devemos ter $X_L = X_C$ ou, equivalentemente, $\omega L = 1/(\omega C)$, ou seja $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Portanto, nesta situação encontramos

$$\begin{aligned} f = \frac{\omega}{2\pi} &= \frac{\omega}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(6 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-6})}} \\ &= 650 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

(b) $X_L = \omega L = 24\ \Omega$ e, obviamente $X_C = X_L$.
(c) Como a freqüência natural de oscilação é

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

comparando f com f_0 vemos que ambas são idênticas.

P 36-10. A saída de um gerador de *CA* é dada por $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$ sen $(\omega t - \pi/4)$, onde $\mathcal{E}_m = 30$ V e $\omega = 350$ rad/s. A corrente é dada por $i(t) = I$ sen $(\omega t - 3\pi/4)$, onde $I = 620$ mA. **(a)** Quando, após $t = 0$, a fem do gerador atinge pela primeira vez um máximo? **(b)** Quando, após $t = 0$, a corrente atinge pela primeira vez um máximo? **(c)** O circuito contém apenas um elemento além do gerador. Ele é um capacitor, um indutor ou um resistor? Justifique sua resposta. *(d)* Qual é o valor da capacitância, da indutância ou da resistência, conforme seja o caso?

▶ **(a)** A fem atinge o máximo para $\omega t - \pi/4 = \pi/2$, ou seja, para

$$t = \frac{3\pi}{4\omega} = 6.73 \text{ ms}.$$

(b) Analogamente, a corrente máximo ocorre quando $\omega t - 3\pi/4 = \pi/2$, ou seja,

$$t = \frac{5\pi}{4\omega} = 11.2 \text{ ms}.$$

(c) Comparando os itens (a) e (b) vemos que a corrente está atrasada de $\pi/2$ radianos em relação à fem, de modo que o elemento no circuito é certamente um *indutor*.
(d) A amplitude I da corrente está relacionada com a amplitude V da voltagem através da relação $V_L = IX_L$, onde $X_L = \omega L$ é a reatância indutiva. Como a diferença de fase é *exatamente* $\pi/2$ radianos, temos certeza que existe apenas *um* elemento no circuito que, como determinado acima, é um indutor. Assim sendo, a diferença de potencial através de tal elemento deve coincidir com a amplitude do gerador de fem, ou seja, $V_l = \mathcal{E}$. Portanto $\mathcal{E} = I\omega L$ e

$$L = \frac{\mathcal{E}_m}{I\omega} = \frac{30}{(620 \times 10^{-3})(350)} = 0.138 \text{ H}.$$

P 36-12.

▶

36.2.2 O circuito RLC série – (13/28)

P 36-13. (a) Calcule novamente todas as grandezas pedidas no Exemplo 36-3, pág. 298, supondo que o capacitor tenha sido retirado e todos os outros parâmetros tenham sido mantidos. (b) Desenhe em escala um diagrama de fasores semelhantes ao indicado na Fig. 36-6c para esta nova situação.

▶ **(a)** Supondo $X_C = 0$ e mantendo inalterados R e X_L temos

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(160)^2 + (87.6)^2} = 182\,\Omega,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36}{182} = 0.198 \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\Big(\frac{X_L - X_C}{R}\Big)\\ &= \tan^{-1}\Big(\frac{86.7 - 0}{160}\Big) = 28.5^o.\end{aligned}$$

(b) Diagrama de fasores:

P 36-14. (a) Calcule novamente todas as grandezas pedidas no Exemplo 36-3, pág. 298, supondo que o indutor tenha sido retirado e todos os outros parâmetros tenham sido mantidos. (b) Desenhe em escala um diagrama de fasores semelhantes ao indicado na Fig. 36-6c para esta nova situação.

▶ **(a)** Supondo $X_L = 0$ e mantendo inalterados R e X_C temos

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{(160)^2 + (177)^2} = 239\,\Omega,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36}{239} = 0.151 \text{ A}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\Big(\frac{X_L - X_C}{R}\Big)\\ &= \tan^{-1}\Big(\frac{0 - 177}{160}\Big) = -47.9^o.\end{aligned}$$

(b) Diagrama de fasores:

P 36-15. (a) Calcule novamente todas as grandezas pedidas no Exemplo 36-3, pág. 298, para $C = 70\ \mu$F, os outros parâmetros sendo mantidos inalterados. (b) Desenhe em escala um diagrama de fasores semelhantes ao indicado na Fig. 36-6c para esta nova situação e compare os dois diagramas.

▶ **(a)** A reatância capacitiva é

$$\begin{aligned}X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}\\ &= \frac{1}{2\pi(60)(70\times 10^{-6})}\\ &= 37.9\,\Omega.\end{aligned}$$

A reatância indutiva continua sendo $86.7\ \Omega$, enquanto que a nova impedância passa a ser

$$\begin{aligned}Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\\ &= \sqrt{160^2 (37.9 - 86.7)^2} = 167\,\Omega.\end{aligned}$$

A amplitude de corrente é

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36}{167} = 0.216 \text{ A}.$$

Finalmente, o novo ângulo de fase é

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\Big(\frac{X_L - X_C}{R}\Big)\\ &= \tan^{-1}\Big(\frac{86.7 - 37.9}{160}\Big) = 17^o.\end{aligned}$$

(b) As amplitudes de voltagem são

$$V_R = IR = (0.216)(160) = 34.6 \text{ V},$$

$$\begin{aligned} V_L &= IX_L = (0.216)(86.7) = 18.7 \text{ V}, \\ V_C &= IX_C = (0.216)(37.9) = 8.19 \text{ V}. \end{aligned}$$

Observe que $X_L > X_C$, de modo que $\mathcal{E}_m$ está à frente de I no diagrama de fasores mostrado aqui:

P 36-17.

▶ Da Fig. 36-11 vemos que as componentes da impedância são $Z_x = R$ e $Z_y = X_C - X_L$. Portanto

$$Z = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2} = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

e

$$\tan\phi = -\frac{Z_y}{Z_x} = \frac{X_L - X_C}{R},$$

que coincidem com as Eqs. 36-23 e 36-26.

P 36-18 A amplitude da voltagem através de um indutor num circuito RLC pode ser maior do que a amplitude da fem do gerador? Considere um circuito RLC em série com: $\mathcal{E}_m = 10$ V; $R = 10$ Ω; $L = 1$ H e $C = 1$ μF. Determine a amplitude da voltagem através do indutor na ressonância.

▶ A amplitude da voltagem através do indutor num circuito RLC em série é dada por $V_L = IX_L$, com $X_L = \omega L$. Na ressonância temos $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e, portanto,

$$X_L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \frac{1.0}{\sqrt{(1.0)(1.0\times 10^{-6})}} = 1000\ \Omega.$$

Na ressonância temos $X_L = X_C$ que, de acordo com a Eq. 36-23, nos fornece uma impedância $Z = R$ e, conseqüentemente,

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = 1 \text{ A}.$$

Assim, temos

$$V_L = IX_L = (1.0)(1000) = 1000 \text{ V}.$$

P 36-19.

▶ A resistência da bobina satifaz

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R},$$

de onde se tira facilmente que

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\tan\phi}\Big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\Big) \\ &= \frac{1}{\tan 75^o}\Big[2\pi(930)(0.088) \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi(930)(0.94\times 10^{-6})}\Big] \\ &= 89\ \Omega. \end{aligned}$$

P 36-20.

▶ **(a)** A voltagem através do gerador é 36 Volts, por definição.

(b)

$$V_R = IR\cos\phi = (0.196)(160)\cos 29.4^o = 27.3 \text{ V}.$$

(c) Considere o diagrama de fasores abaixo:

deste diagrama vemos facilmente que

$$\begin{aligned} V_C &= IX_C \text{ sen } \phi \\ &= (0.196)(177) \text{ sen } 29.4^o \\ &= 17.0 \text{ V}. \end{aligned}$$

(d) Analogamente:

$$\begin{aligned} V_L &= -IX_L \text{ sen } \phi \\ &= -(0.196)(86.7) \text{ sen } 29.4^o \\ &= -8.3 \text{ V}. \end{aligned}$$

(e)

$$V_R + V_C + V_L = 27.3 + 17.0 - 8.3 = 36.0 \text{ V} \equiv \mathcal{E}_m,$$

de modo que a lei das malhas é satisfeita.

$\boxed{\textbf{P 36-21}}$ Num circuito RLC como o da Fig. 36-2, $R = 5\ \Omega$, $C = 20\ \mu$F, $L = 1.0$ H e $\mathcal{E}_m = 30$ V. **(a)** Para que freqüência angular ω_0 a corrente terá seu valor máximo, como nas curvas de ressonância da Fig. 35-6? **(b)** Qual é este valor máximo? **(c)** Quais são as duas freqüências angulares ω_1 e ω_2 para as quais a amplitude da corrente é igual à metade desse valor máximo? **(d)** Qual é a meia-largura fracional [$= (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$] da curva de ressoância?

▶ **(a)** Para uma dada amplitude $\mathcal{E}_M$ do gerador de fem, a amplitude I da corrente é

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Para encontrar o valor máximo de I, resolveremos a equação $dI/d\omega = 0$, ou seja,

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{\mathcal{E}_m}{Z^{3/2}}\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]\left[L + \frac{1}{\omega^2 C}\right] = 0.$$

O único fator que pode anular-se é $\omega L - 1/(\omega C)$ o que acontece para $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Para o circuito dado encontramos

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 224 \text{ rad/s.}$$

(b) Para tal valor (ressonância!) a impedância é $Z = R$ e o máximo da corrente é

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = \frac{30}{5} = 6 \text{ A.}$$

(c) Queremos determinar os valores de ω para os quais $I = \mathcal{E}_m/(2R)$, ou seja, para os quais

$$\frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{2R},$$

ou seja,

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 4R^2.$$

Desta equação obtemos

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 3R^2$$

que, após extrairmos a raiz quadrada e multiplicarmos por ωC, fornece

$$LC\,\omega^2 \pm \sqrt{3}\,CR\,\omega - 1 = 0,$$

onde $\pm$ indica os dois possíveis sinais da raiz quadrada. Como temos *duas* equações quadráticas, em princípio temos 4 raízes. Entretanto, somente admitimos raízes positivas o que nos fornece então duas soluções. A menor raiz é

$$\omega_2 = \frac{-\sqrt{3}\,CR + \sqrt{3C^2R^2 + 4LC}}{2LC} = 219 \text{ rad/s,}$$

enquanto que a maior raiz é

$$\omega_1 = \frac{+\sqrt{3}\,CR + \sqrt{3C^2R^2 + 4LC}}{2LC} = 228 \text{ rad/s,}$$

(d) Com isto tudo, a meia-largura fracional pode agora ser facilmente determinada:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{228 - 219}{224} = 0.039\ .$$

$\boxed{\textbf{P 36-23}}$

▶ **(a)** O ângulo de fase é

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{V_L - V_C}{V_R}\right)\\ &= \tan^{-1}\left(\frac{V_L - V_L/2}{V_L/2}\right)\\ &= \tan^{-1} 1.0 = 45^o\end{aligned}$$

(b) Como $\mathcal{E}_m \cos\phi = IR$, obtemos

$$R = \frac{\mathcal{E}_m \cos\phi}{I} = \frac{30\ \cos 45^o}{0.3} = 70.7\ \Omega.$$

$\boxed{\textbf{P 36-26.}}$

▶ Como a impedância do voltímetro é elevada, ele não irá afetar a impedância do circuito quando ligado em paralelo em cada um dos casos. Portanto, a leitura será 100 Volts em todos três casos.

$\boxed{\textbf{P 36-27.}}$ Mostre que a meia-largura fracional de uma curva de ressonância (veja o Problema 21) é dada aproximadamente por

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3C}{L}}\ R,$$

onde ω é a freqüência angular na ressonância e $\Delta\omega$ é a largura da curva de ressonância na metade da amplitude máxima. Note que $\Delta\omega/\omega_0$ diminui com R, como mostra a Fig. 35-6. Use esta fórmula para conferir a resposta do Problema 21d.

► Usando ω_1 e ω_2 obtidos no Problema 21, determinamos que

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} &= \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0} = \frac{2\sqrt{3}\,CR\sqrt{LC}}{2LC}\\ &= R\sqrt{\frac{3C}{L}}\\ &= (5.0)\sqrt{\frac{3(20.0\times 10^{-6})}{1.0}}\\ &= 0.0387 \simeq 0.04\ .\end{aligned}$$

P 36-28*. O gerador de CA na Fig. 36-12 fornece 120 V (rms) a 60 Hz. Com a chave aberta, como no diagrama, a corrente está avançada de 20^o sobre a fem do gerador. Com a chave na posição 1, a corrente está atrasada de 10^o, sobre a fem do gerador. Quando a chave está na posição 2 a corrente é de 2 A (rms). Determine os valores de R, L e C.

► São pedidas três grandezas e são dadas três situações diferentes. A tarefa, portanto, consiste em usar as três posições da chave para obter um sistema com três equações e resolve-lo.

Chave aberta: Temos um circuito "série" contendo R, L e C, para o qual sabemos que

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{R} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} = \tan(-20^o). \tag{1}$$

Chave na posição 1: Neste caso continuamos a ter um circuito série, porém agora contendo um capacitor equivalente $C_{\rm eq} = 2C$. Portanto

$$\tan\phi_1 = \frac{\omega L - 1/(\omega 2C)}{R} = \tan 10^o. \tag{2}$$

Chave na posição 2: Neste caso o circuito é um oscilador LC, para o qual temos, conforme a Eq. (36-22),

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{120}{\sqrt{(\omega L)^2 + 1/(\omega C)^2}} = 2. \tag{3}$$

Resolução das três equações: Usando as duas primeiras equações, vemos que

$$\begin{aligned} R\tan\phi_1 - R\tan\phi &= \frac{1}{2\omega C}\\ R\tan\phi_1 - \frac{1}{2}R\tan\phi &= \frac{\omega L}{2}.\end{aligned}$$

Tais expressões nos fornecem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega C} &= 2R\Big(\tan\phi_1 - \tan\phi\Big) \equiv A\ R\\ \omega L &= 2R\Big(\tan\phi_1 - \frac{1}{2}\tan\phi\Big) \equiv B\ R,\end{aligned}$$

onde introduzimos as abreviações

$$\begin{aligned} A &\equiv 2\big(\tan\phi_1 - \tan\phi\big)\\ &= 2\big(\tan 10^o - \tan(-20^o)\big) = 1.08059\\ B &\equiv 2\big(\tan\phi_1 - \frac{1}{2}\tan\phi\big)\\ &= 2\big(\tan 10^o - \frac{1}{2}\tan(-20^o)\big) = 0.71662\end{aligned}$$

As expressões acima nos mostram que assim que conhecermos R, conheceremos C e L também. Da equação (3) obtemos

$$\frac{\mathcal{E}_m^2}{I^2} = Z^2 = R^2\big(A^2 + B^2\big),$$

expressão da qual tiramos R facilmente:

$$R = \frac{\mathcal{E}_m}{I\sqrt{A^2+B^2}} = 46.27\ \Omega$$

Tendo o valor R, das expressões acima vemos que

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega AR} = \frac{1}{(60)AR} = ????\\ L &= \frac{BR}{\omega} = \frac{BR}{60} = ????\end{aligned}$$

Falta revisar e terminar o cálculo dos números... :-))

36.2.3 Potência em circuitos de corrente alternada – (29/43)

E 36-29. Qual o valor máximo de uma voltagem, num circuito de CA, cujo valor médio quadrático é de 100 Volts?

► Da Eq. (36-30) vemos que

$$V_{\rm max} = \sqrt{2}\ V_{\rm rms} = \sqrt{2}\ 100 = 141\ \text{V}.$$

E 36-30. Que corrente contínua produzirá, num certo resistor, uma quantidade de calor igual à produzida por uma corrente alternada cujo valor máximo é de 2.6 A.

► A potência média dissipada em R por uma corrente alternada é dada pela Eq. 36-29: $P_{\text{méd}} = I^2_{\text{rms}} R$. Como $I_{\text{méd}} = I/\sqrt{2}$, onde I é a amplitude de corrente, podemos escrever, de acordo com a Eq. 36-30, que $P_{\text{méd}} = I^2\, R/2$. A potência dissipada no mesmo resistor por uma corrente contínua i é $P = i^2 R$ e, conseqüentemente, igualando-se os dois valores da potência e resolvendo para i obtemos

$$i = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{2.6}{\sqrt{2}} = 1.84 \text{ A}.$$

E 36-34.

► **(a)** Da Eq. 36-23 obtemos

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 12.1\,\Omega.$$

(b) Das Eqs. 36-31 e 36-32, temos:

$$P_{\text{méd}} = \frac{\mathcal{E}^2_{\text{rms}}}{Z}\,\cos\phi,$$

que, usando relações da Seção 36-5, fornece

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{12}{12.1} = 0.9917.$$

Portanto,

$$P_{\text{méd}} = \frac{120^2}{12.1}(0.9917) = 1.18 \text{ kW}.$$

E 36-35.

►

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{Z} &= \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \\ &= \frac{420}{\sqrt{(45)^2 + (32)^2}} \\ &= 7.61 \text{ A}. \end{aligned}$$

P 36-36. Mostre matematicamente, em vez de graficamente como na Fig. 36-8b, que o valor médio de $\text{sen}^2(\omega t - \phi)$ sobre um número inteiro de ciclos é igual a $1/2$.

► O valor médio pedido é

$$\begin{aligned} <\ \text{sen}^2 > \ &\equiv \frac{1}{nT/2}\int_0^{\frac{nT}{2}} \text{sen}^2(\omega t - \phi)dt \\ &= \frac{2}{nT}\int_0^{\frac{nT}{2}} \frac{1 - \cos(2\omega t - 2\phi)}{2}dt \\ &= \frac{2}{nT}\Big[\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega}\,\text{sen}(2\omega t - 2\phi)\Big]_0^{\frac{nT}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(n\omega T - 2\phi) +\ \text{sen}(2\phi)}{2n\omega T}. \end{aligned}$$

Como $n\omega T = n\omega(2\pi/\omega) = 2n\pi$, é fácil ver que

$$\text{sen}(n\omega T - 2\phi) =\ \text{sen}(2n\pi - 2\phi) = -\ \text{sen}(2\phi),$$

e que, portanto, $\text{sen}(n\omega T - 2\phi) +\ \text{sen}(2\phi) = 0$, o que fornece, finalmente,

$$<\ \text{sen}^2 >= \frac{1}{2}.$$

P 36-39. Na Fig. 36-13 mostre que a taxa média com que a energia é dissipada na resistência R é máxima quando $R = r$, onde r é a resistência interna do gerador de CA. Até o momento, tínhamos considerado tacitamente que $r = 0$.

► Como

$$P_R = i^2 R = \Big(\frac{\mathcal{E}_m}{r + R}\Big)^2 R,$$

para minimizar P_R precisamos igualar dP_R/dR a zero, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dP_R}{dR} &= \frac{\mathcal{E}^2_m[(r+R)^2 - 2(r+R)R]}{(r+R)^4} \\ &= \frac{\mathcal{E}^2_m(r-R)}{(r+R)^3} = 0, \end{aligned}$$

o que fornece $R = r$.
Nota: certifique-se que $R = r$ realmente *maximiza* P_R, verificando que $d^2P_R/dR^2 < 0$.

P 36-40. A figura abaixo mostra um gerador de CA ligado a uma "caixa-preta" através de dois terminais. A caixa-preta contém um circuito RLC, possivelmente até mesmo um circuito com muitas malhas, cujos elementos e ligações não conhecemos. Medidas realizadas pela parte externa da caixa revelam o seguinte resultado:

$$\mathcal{E}(t) = (75 \text{ V})\ \text{sen}\ \omega t$$

$$i(t) = (1.2 \text{ A})\ \text{sen}\ (\omega t + 42^o).$$

(a) Calcule o fator de potência do circuito. **(b)** A corrente está atrasada ou adiantada em relação à fem? **(c)** No circuito da caixa-preta a predominância é indutiva ou capacitiva? **(d)** O circuito da caixa está em ressonância? **(e)** Deve haver um capacitor na caixa? um indutor? um resistor? **(f)** Qual é a potência que o gerador fornece para a caixa-preta? **(g)** Por que não se precisa saber o valor de ω para responder a todas estas questões?

▶ **(a)** $\phi = -42^o$, o que dá $\cos\phi = 0.743$;
(b) Como $\phi < 0$, temos que $\omega t - \phi > \omega t$ e, portanto, a corrente está na frente da fem;
(c) tg $\phi = (X_L - X_C)/R =$ tg $42^o = -0.49$. Portanto $X_C > X_L$, sendo o circuito predominantemente *CAPACITIVO*.
(d) Em ressonância teríamos $X_L = X_C$, implicando que tg $\phi = 0$, ou seja, que $\phi = 0$. Como $\phi \neq 0$, *não* existe ressonância;
(e) Como o valor da tangente de ϕ é negativo e finito, temos $X_C \neq 0$ bem como $R \neq 0$, o valor de X_L não precisa ser zero. Porém ele pode eventualmente ser zero. Se existir $X_L \neq 0$ então é necessário que $X_L < X_C$!!
(f)

$$\begin{aligned} P_{\text{méd}} &= \frac{1}{2}\mathcal{E}_m I\cos\phi \\ &= \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}}\cos\phi \\ &= \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}}\cos\phi \\ &= \frac{1}{2}\,75\times(1.2)\times(0.743) \approx 33.4\text{ W}. \end{aligned}$$

(g) É que as grandezas dependem de ω apenas através de ϕ, que é DADO. Se tivessem sido dados valores para R, L, C então sim iríamos precisar ter ω para calcular o fator de potência.

36.2.4 O transformador – (44/48)

E 36-44. Um gerador fornece 100 V ao enrolamento primário, com 50 espiras, de um transformador. Sabendo-se que o enrolamento secundário possui 500 espiras, qual a voltagem no secundário?

▶ Use $V_s N_p = V_p N_s$ para obter

$$V_s = V_p\Big(\frac{N_s}{N_p}\Big) = 100\Big(\frac{500}{50}\Big) = 1000\text{ Volts}.$$

E 36-45. Um transformador possui 500 espiras no primário e 10 espiras no secundário. **(a)** Sabendo-se que V_p é 120 V (mrs), qual é o valors de V_s, supondo o circuito aberto? **(b)** Ligando-se o secundário a uma carga resistiva de 15 Ω, quais serão as correntes no primário e no secundário?

▶ **(a)**

$$V_s = V_p\Big(\frac{N_s}{N_p}\Big) = 120\Big(\frac{10}{500}\Big) = 2.4\text{ V}.$$

(b)

$$I_s = \frac{V_s}{R_s} = \frac{2.4\text{ V}}{15\ \Omega} = 0.16\text{ A}.$$

e

$$I_p = I_s\Big(\frac{N_s}{N_p}\Big) = 0.16\Big(\frac{10}{500}\Big) = 3.2\times10^{-3}\text{ A}.$$

E 36-46. A Fig. 36-17 mostra um "autotransformador". Ele é formado por uma única bobina (com um núcleo de ferro). Três "derivações" são estabelecidas. Entre as derivações T_1 e T_2 existem 200 espiras e entre as derivações T_2 e T_3 existem 800 espiras. Duas derivações quaisquer podem ser consideradas os "terminais do primário" e duas derivações quaisquer podem ser consideradas os "terminais do secundário". Escreva todas as relações pelas quais a voltagem primária pode ser transformada numa voltagem secundária.

▶ **Conexões que aumentam a voltagem:**
(1) Usando T_1T_2 como primário e T_1T_3 como secundário:

$$\frac{V_{13}}{V_{12}} = \frac{800+200}{200} = 5$$

.
(2) Usando T_1T_2 como primário e T_2T_3 como secundário:

$$\frac{V_{23}}{V_{12}} = \frac{800}{200} = 4$$

.
(3) Usando T_2T_3 como primário e T_1T_3 como secundário:

$$\frac{V_{13}}{V_{23}} = \frac{800+200}{800} = 1.25$$

.
Conexões que diminuem a voltagem:
Intercambiamdo-se o primário e o secundário para cada um dos casos acima obtemos os seguintes fatores de transformação: **(1)** $1/5 = 0.2$; **(2)** $1/4 = 0.25$; e **(3)** $1/1.25 = 0.8$.

P 36-47. Um gerador de CA fornece energia para uma carga resistiva numa fábrica longínqua através de uma linha de transmissão com dois cabos. Na fábrica, um transformador que reduz tensão diminui a voltagem (rms) da linha de transmissão do valor V_t para um valor menor, seguro e conveniente para ser usado na fábrica. A resistência da linha de transmissão vale 0.30 Ω/cabo e a potência é 250 kW. Calcular a queda de voltagem ao longo da linha de transmissão e a taxa em que a energia é dissipada na linha como energia térmica quando (a) $V_t = 80$ kV, (b) $V_t = 8$ kV e (c) $V_t = 0.8$ kV. Comente a aceitabilidade de cada escolha.

▶ **(a)** A corrente rms no cabo é

$$I_{\text{rms}} = \frac{P}{V_t} = \frac{250 \times 10^{-3}}{80 \times 10^3} = 3.125 \text{ A}.$$

A queda rms de voltagem é

$$\Delta V = I_{\text{rms}} R = (3.125)(2)(0.30) = 1.9 \text{ V},$$

enquanto que a taxa de dissipação é

$$P_d = I_{\text{rms}}^2 R = (3.125)^2(2)(0.30) = 5.85 \text{ W}.$$

(b) Neste caso a corrente rms no cabo é

$$I_{\text{rms}} == \frac{250 \times 10^{-3}}{8 \times 10^3} = 31.25 \text{ A}.$$

de modo qe a queda rms de voltagem é

$$\Delta V = (31.25)(2)(0.30) = 19 \text{ V},$$

e a taxa de dissipação é

$$P_d = (31.25)^2(2)(0.30) = 0.585 \text{ kW}.$$

(c) Agora a corrente rms no cabo é

$$I_{\text{rms}} == \frac{250 \times 10^{-3}}{0.8 \times 10^3} = 312.5 \text{ A}.$$

de modo qe a queda rms de voltagem é

$$\Delta V = (312.5)(2)(0.30) = 0.19 \text{ kV},$$

e a taxa de dissipação é

$$P_d = (312.5)^2(2)(0.30) = 58.5 \text{ kW}.$$

Deste números fica claro que tanto a taxa de dissipação de energia quanto a queda de voltagem aumentam a medida que V_t decresce. Portanto, para minimizar estes efeitos, a melhor escolha dentre as três oferecidas é usar-se $V_t = 80$ kV.

P 36-48. *Casamento de Impedâncias.* Na Fig. 36-13, suponha que a caixa retangular da esquerda represente a saída de um amplificador de áudio (alta impedância) com $r = 1000$ Ω. Suponha que $R = 10$ Ω represente a bobina de um alto-falante (baixa impedância). Sabemos que que a transferência máxima de energia para a carga R ocorre quando $R = r$, mas isto não é verdadeiro neste caso. Entretanto, um transformador pode ser usado para "transformar" resistências, fazendo com que se comportem eletricamente como se fossem maiores ou menores do que realmente são. Projete as bobinas primária e secundária de um transformador que deve ser introduzido entre o "amplificador" e o "alto-falante", na Fig. 36-13, para que haja o "casamento das impedâncias". Qual deve ser a razão entre os números de espiras?

▶ Temos que o amplificador é conectado no primário do transformador enquanto que o resitor R é conectado no secundário. Sendo I_s a corrente rms no secundário, temos que a potência média fornecida ao resistor R é $P_{\text{med}} = I_s^2 R$. Sabemos que $I_s = (N_p/N_s) I_p$, onde N_p e N_s representam o número de voltas do primário e do secundário, respectivamente. I_p representa a corrente rms no primário. Portanto

$$P_{\text{med}} = \left(\frac{I_p N_p}{N_s}\right)^2 R.$$

Agora desejamos determinar a corrente no primário, que consiste de um gerador com duas resistências em série. Uma das resistências é a resitência r do amplificador, enquanto que a outra a resistência equivalente R_{eq} que representa o efeito do circuito secundário no circuito primário. Portanto, $I_p = \mathcal{E}/(r + R_{\text{eq}})$, onde $\mathcal{E}$ é a fem rms do amplificador. De acordo com a Eq. 36-38, $R_{\text{eq}} = (N_p/N_s)^2 R$, de modo que

$$I_p = \frac{\mathcal{E}}{r + (N_p/N_s)^2 R}$$

e

$$P_{\text{med}} = \frac{\mathcal{E}^2 (N_p/N_s)^2 R}{[r + (N_p/N_s)^2 \ R]^2}.$$

Desejamos encontrar o valor de N_p/N_s para o qual P_{med} seja mínimo. Introduzindo uma variável auxiliar $x = (N_p/N_s)^2$, temos

$$P_{\text{med}} = \frac{\mathcal{E}^2 x R}{(r + xR)^2}.$$

de modo que

$$\frac{dP_{\text{med}}}{dx} = \frac{\mathcal{E}^2 R (r - xR)}{(r + xR)^3},$$

que é zero para $x = r/R = 1000/10 = 100$. Observe que para x pequeno, P_{med} cresce linearmente com x e que para x grande P_{med} decresce proporcionalmente a $1/x$. Portanto $x = r/R$ é de fato um máximo, não um mínimo.

Como $x = (N_p/N_s)^2$, vemos que a potência máxima é alcançada para $(N_p/N_s)^2 = 1000$, ou seja, quando

$$\frac{N_p}{N_s} = 10.$$