Exercícios Resolvidos de Óptica Física

Jason Alfredo Carlson Gallas, professor titular de física teórica,
Doutor em Física pela Universidade Ludwig Maximilian de Munique, Alemanha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

Matéria para a TERCEIRA prova. Numeração conforme a **SEXTA** edição do livro "Fundamentos de Física", Halliday, Resnick e Walker.

Esta e outras listas encontram-se em: *http://www.if.ufrgs.br/∼jgallas*

Conteúdo

Comentários/Sugestões e Erros: favor enviar para `jgallas @ if.ufrgs.br`
(`listaq3.tex`)

37 Relatividade

37.1 A relatividade do tempo

E 38-3 (42-5/4^a edição)

O tempo médio de vida de múons estacionários é 2.2 μs. O tempo médio de vida dos múons de alta velocidade produzidos pelos raios cósmicos é 16 μs no referencial da Terra. Determine a velocidade em relação a Terra dos múons produzidos pelos raios cósmicos.

▶ Usamo a equação da dilatação temporal $\Delta t = \gamma \Delta t_0$, onde Δt_0 é o intervalo de tempo próprio, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, e $\beta = v/c$. Portanto,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

de onde tiramos que

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}.$$

O intervalo de tempo próprio é medido por um relógio em repouso em relação ao múon. Ou seja, $\Delta t_0 = 2.2\,\mu$s e $\Delta t = 16\,\mu$s. Isto nos fornece então

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2.2\mu}{16\mu}\right)^2} = 0.99.$$

Portanto a velocidade do múon é

$$c = \beta c = 0.99c = (0.99)(3\times 10^8) = 3\times 10^8 \text{ m/s}.$$

37.2 A relatividade das distâncias

E 38-11 (42-13/4^a edição)

Uma espaçonave cujo comprimento de repouso é 130 m passa por uma base espacial a uma velocidade de $0.74c$. (a) Qual é o comprimento da nave no referencial da base? (b) Qual é o intervalo de tempo registrado pelos tripulantes da base entre a passagem da proa e a passagem da popa da espaçonave?

▶ **(a)** O comprimento de repouso $L_0 = 130$ m da espaçonave e seu comprimento L medido pela base estão relacionados através da relação

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\beta^2},$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, e $\beta = v/c$. Portanto

$$L = (130)\sqrt{1-(0.74)^2} = 87.4 \text{ m}.$$

(b) O intervalo de tempo para a passagem da espaçonave é

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v} = \frac{87.4}{(0.74)(3\times 10^8)} = 3.94\times 10^{-7} \text{ s}.$$

P 38-12 (42-16/4^a edição)

(a) Uma pessoa seria capaz, em princípio, de viajar da Terra até o centro da galáxia (que está a cerca de 23000 anos-luz de distância) em um tempo de vida normal? Explique por quê, levando em conta a dilatação dos tempos ou a contração das distâncias. (b) Com que velocidade constante a pessoa teria que viajar para fazer a viagem em 30 anos (tempo próprio)?

▶ **(a)** Em princípio sim. Se a pessoa mover-se suficientemente rápido, pelo argumento da dilatação temporal, seu tempo de viagem medido na Terra é muito maior do que um tempo de vida usual. Por outro lado, usando o argumento da contração do comprimento, a distância que a pessoa necessita percorrer (medida em relação à sua espaçonave) é muito menor do que 23000 anos-luz. De ambos modos, concluimos que é possível para a pessoa alcançar o centro da galáxia no período normal de duração de uma vida humana.
(b) Sabemos que

$$v = \frac{L}{\Delta t_0} = \frac{L_0}{\Delta t},$$

onde o subíndice 0 indica tempo e comprimentos próprios (que *não* são medidos no *mesmo* sistema de referência inercial!), ou seja $L_0 = 23000\,c$ e $\Delta t_0 = 30$ anos. Sabemos também que $\Delta t = \gamma\Delta t_0$, de modo que

$$v = \frac{L_0}{\Delta t_0}\frac{1}{\gamma}.$$

Substituindo os dados obtemos

$$v = \frac{23000\,c}{30}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2300^2}{3^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Desta expressão obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3^2}{2300^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{5290000}{5290009}} \\ &= 0.999999\,149339\,459727\,378594\ldots. \end{aligned}$$

Este é o resultado da solução *exata* do problema.

▶ É possível obter-se uma resposta *aproximada* ao problema que, porém, *jamais deverá ser aceita como substitutivo para o resultado exato acima*.
Como mostrado no exercício 38-3 acima, temos

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}.$$

O enunciado do problema nos diz que $\Delta t_0 = 30$ anos. Se soubessemos o valor de Δt, bastaria substitui-lo na fórmula acima para determinar β, i.e. a relação entre v e c. Determinar Δt *exatamente* foi o que fizemos acima, ao resolver o problema corretamente, sem aproximações.
Podemos obter uma *aproximação* do resultado se *supusermos* que a velocidade desconhecida da nave pode ser tomada como sendo a velocidade da luz. Tal hipótese (incorreta!) nos induz a considerar $\Delta t \approx 23000$ e, portanto, obter da fórmula acima que

$$\begin{aligned} \beta = \frac{v}{c} &= \sqrt{1-\left(\frac{30}{23000}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5289991}{5290000}} \\ &= 0.999999\,149338\,0124\ldots. \end{aligned}$$

A diferença aparece na 12^a casa decimal. Mas isto já é uma diferença grande em tratando-se da velocidade da luz.
Problema: determine explicitamente a expressão exata de Δt que nos permite obter a resposta correta partindo da relação

$$\beta = \sqrt{1-\left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}.$$

Problema: usando o teorema da expansão binomial (Apêndice E):

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots,$$

válido quando $x^2 < 1$, (a) perceba a relação entre o valor exato e o valor aproximado acima derivados (b) mostre que a aproximação seguinte fornece-nos

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \sqrt{\frac{27984052390081}{27984100000000}} \\ &= 0.999999\,149339\,459729\,840832\ldots. \end{aligned}$$

P 38-13 **(42-14/4^a edição)**

Um astronauta parte da Terra e viaja com uma velocidade de $0.99c$ em direção à estrela Vega, que está a 26 anos-luz de distância. Quanto tempo terá passado, de acordo com os relógios da Terra? (a) quando o astronauta chegar a Vega e (b) quando os observadores terrestres receberem a notícia de que o astronauta chegou a Vega? (c) Qual é a diferença entre o tempo de viagem de acordo com os relógios da Terra e o tempo de viagem de acordo com o relógio de bordo?

▶ **(a)** A distância entre a Terra e Vega é $L_0 = 26$ anos-luz. Portanto

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{26 \text{ anos } c}{0.99\, c} = 26.26 \text{ anos}.$$

(b) Supondo que "as notícias" sejam ondas de rádio, que viajam com a velocidade c da luz, elas demoram 26 anos para alcançar a Terra. Portanto o tempo total, no referencial da Terra, é

$$26.26 + 26 = 52.26 \text{ anos}.$$

(c) O relógio de bordo mede o tempo próprio $\Delta t_0 = \Delta t/\gamma$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1-0.99^2} = 7.09$. Portanto,

$$\Delta t_0 = \frac{26.26}{7.09} = 3.7 \text{ anos}.$$

A diferença é que enquanto no relógio da Terra passaram-se 52.26 anos, no relógio de bordo passaram-se apenas 3.7 anos.

Perceba claramente que a palavra "diferença", no item (c) do enunciado do problema, de modo algum pede para fazermos alguma *subtração* entre os dois intervalos de tempo, coisa que não tem sentido fazer-se.

37.3 Algumas conseqüências das equações de Lorentz

E 38-17 (42-20/4^a edição)

Um experimentador dispara simultaneamente duas lâmpadas de flash, produzindo um grande clarão na origem de seu referencial e um pequeno clarão no ponto $x = 30$ km. Um observador que está se movendo com uma velocidade de $0.25c$ no sentido positivo do eixo x também observa os clarões. (a) Qual é o intervalo de tempo entre os dois clarões, de acordo com o observador? (b) De acordo com o observador, qual dos dois clarões ocorreu primeiro?

▶ **(a)** Suponha o primeiro flash em repouso no referencial R e chame de R' o referencial de repouso do segundo observador. Os relógios de nenhum destes referenciais medem o intervalo de tempo próprio entre os flashes, de modo que precisamos usar uma transformação de Lorentz completa. Usamos flashes coloridos para fixar idéias. Seja t_a o tempo e x_a a coordenada do flash azul, como medido no referencial R. Neste caso, o tempo do flash azul medido no referencial R' é

$$t'_a = \gamma\left(t_a - \frac{\beta x_a}{c}\right),$$

onde $\beta = v/c = 0.25$ e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.25)^2}} = 1.03279.$$

Analogamente, seja t_v o tempo e x_v a coordenada do flash verde, como medido no referencial R. Neste caso, o tempo do flash verde medido no referencial R' é

$$t'_v = \gamma\left(t_v - \frac{\beta x_v}{c}\right).$$

Agora, subtraia a primeira transformação de Lorentz da segunda. Como os flashes *disparam* simultaneamente, temos $t_a = t_v$. Seja $\Delta x = x_v - x_a = 30$ km e seja $\Delta t' = t'_v - t'_a$. Então

$$\begin{aligned}\Delta t' = -\frac{\gamma\beta\Delta x}{c} &= -\frac{(1.03279)(0.25)(30\times 10^3)}{3\times 10^8}\\ &= -2.58\times 10^{-5}\ \text{s}.\end{aligned}$$

(b) Como $\Delta t'$ é negativo, t'_a é maior do que t'_v. O flash verde dispara *antes* no referencial R'.

37.4 A relatividade das velocidades

E 38-24 (42-29/4^a edição)

A partir de medidas do deslocamento para o vermelho, os astrônomos chegaram à conclusão de que um certo quasar Q_1 está se afastando da Terra a uma velocidade de $0.8c$. O quasar Q_2, que está na mesma direção que Q_1, mas se encontra mais próximo da Terra, está se afastando a uma velocidade de $0.4c$. Qual seria a velocidade de afastamento de Q_2 medida por um observador localizado em Q_1?

▶ Chame de S o referencial fixo na Terra e de S' o referencial fixo no quasar Q_1, movendo-se com velocidade $v = 0.8c$ em relação à Terra. Desejamos encontrar a velocidade u' no referencial S', fixo em Q_1, que corresponda a uma velocidade $u = 0.4c$ em relação à Terra (velocidade esta que, é claro, vem a ser a velocidade do quasar Q_2 como medida na Terra). Portanto, usando-se a transformação INVERSA da Eq. 38.28, vemos que a velocidade u' de Q_2 medida em Q_1 é

$$\begin{aligned}u' = \frac{u-v}{1-vu/c^2} &= \frac{0.4c-0.8c}{1-(0.8c)(0.4c)/c^2}\\ &= -0.588\,c,\end{aligned}$$

onde o sinal negativo indica que Q_2 esta afastando-se de Q_1 (i.e. movendo-se em direção à Terra).

NOTA: leia o livro-texto e aprenda como, a partir da Eq. 38.28, obter a expressão da transformação INVERSA, acima usada.

37.5 O efeito Doppler para a luz

P 38-31 (42-36/4^a edição)

Uma espaçonave está se afastando da Terra a uma velocidade de $0.2c$. Uma fonte luminosa na popa da nave parece azul ($\lambda = 450$ nm) para os passageiros. Que cor teria a fonte para um observador terrestre que estivesse assistindo à partida da nave?

▶ Como a espaçonave está se afastando da Terra temos que, de acordo com a Eq. 38-30,

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$

onde f_0 é a freqüência no referencial da espaçonave, $\beta = v/c$, e v é a velocidade da espaçonave em relação à

Terra. A freqüência e o comprimento de onda obedecem a relação $f\lambda = c$, de modo que se λ_0 for o comprimento de onda visto na espaçonave e λ o comprimento detectado na Terra, então $f_0\lambda_0 = f\lambda$, de onde tiramos que

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_0 \frac{f_0}{f} &= \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \\ &= (450)\sqrt{\frac{1+0.2}{1-0.2}} = 550 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Este comprimento de onda corresponde a uma cor amarelo-esverdeada no espectro visível.

37.6 Uma nova interpretação da energia

P 38-38 (42-46/4^a edição)

Qual é o trabalho necessário para fazer a velocidade de um elétron aumentar (a) de $0.18c$ para $0.19c$ e (b) de $0.98c$ para $0.99c$? Observe que o aumento de velocidade é o mesmo ($0.01c$) nos dois casos.

▶ **(a)** O trabalho é dado pela diferença das energias cinéticas calculadas para cada uma das velocidades mencionadas. Da Eq. 38.49 sabemos que $K = mc^2(\gamma - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} W_a &= mc^2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-0.19^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.18^2}}\Big) \\ &= mc^2(1.0186 - 1.0166) = 0.002\, mc^2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} W_b &= mc^2\Big(\frac{1}{\sqrt{1-0.99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0.98^2}}\Big) \\ &= mc^2(7.0888 - 5.0252) = 2.0636\, mc^2 \end{aligned}$$

Vemos claramente que $W_b = 1031.8\, W_a$. Ou seja, quando estivermos andando com velocidades mais elevadas, custa *bem mais* mudar a velocidade de uma mesma quantidade ($0.01c$ no problema em questão).

P 38-44 (42-55/4^a edição)

O tempo de vida médio dos múons em repouso é $2.2\ \mu$s. As medidas dos múons produzidos em um acelerador de partículas mostram que eles têm um tempo de vida de $6.9\ \mu$s. Determine (a) a velocidade, (b) a energia cinética e (c) o momento destes múons no referencial do laboratório. A massa de um múon é 207 vezes maior que a do elétron.

▶ **(a)** Da Eq. 38.9 vemos que intervalos médios de vida [ou seja, que o tempo de vida média τ_0 em repouso e τ, viajando com velocidade v] estão relacionados do seguinte modo:

$$\gamma = \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} &= \sqrt{1 - \Big(\frac{\tau_0}{\tau}\Big)^2} \\ &= \sqrt{1 - \Big(\frac{2.2\ \mu\text{s}}{6.9\ \mu\text{s}}\Big)^2} = 0.948. \end{aligned}$$

Portanto, a velocidade pedida é $v = 0.948\, c$.

(b) Da Tabela 38.3 vemos que a energia de repouso dum elétron vale 511 keV. Portanto, para o múon a energia de repouso é

$$\begin{aligned} m_m c^2 = (207)(511 \times 10^3) &= 105.7 \times 10^6 \\ &\simeq 106 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} K &= (\gamma - 1) m_m c^2 \\ &= \Big(\frac{6.9}{2.2} - 1\Big)(106 \text{ MeV}) = 226 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

(c) Das Eqs. 38.51 e 38.52 temos que

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{E^2 - (m_m c^2)^2}}{c} \\ &= \frac{\sqrt{(K + m_m c^2)^2 - (m_m c^2)^2}}{c} \\ &= \sqrt{(226 + 106)^2 - 106^2} = 314 \text{ MeV}/c. \end{aligned}$$