

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA**

Lista nº 1 - FIS01051 – Tópicos Avançados em Física II: Introdução à Teoria de Campos
Prof. Dimiter Hadjimichef

Know how to solve every problem that has been solved
R. Feynman

1. Sejam os operadores A, B, C e D , totalmente gerais. Prove as seguintes relações

$$(a) [AB, CD] = -AC\{D, B\} + A\{C, B\}D - C\{D, A\}B + \{C, A\}DB,$$

$$(b) [AB, CD] = AC[B, D] + A[B, C]D + C[A, D]B + [A, C]DB.$$

2. Sejam os operadores X, Y e Z , totalmente gerais

(a) Verifique a identidade de Jacobi,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(b) Considere a seguinte escolha para os operadores X, Y e Z

$$X = \vec{\sigma} \cdot \vec{x} \quad ; \quad Y = \vec{\sigma} \cdot \vec{y} \quad ; \quad Z = \vec{\sigma} \cdot \vec{z}$$

onde $\vec{\sigma}$ está relacionado com as matrizes de Pauli

$$\vec{\sigma} = \sigma_1 \hat{i} + \sigma_2 \hat{j} + \sigma_3 \hat{k};$$

\vec{x}, \vec{y} e \vec{z} são vetores no espaço 3-dimensional. Usando a identidade de Jacobi, qual condição encontramos com esta escolha para X, Y e Z ?

3. Considere uma base ortonormal com os seguintes 3 kets: $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$, juntamente com dois operadores A e B definidos por

$$\begin{aligned} A|u_1\rangle &= |u_1\rangle & ; & & A|u_2\rangle &= 0 & ; & & A|u_3\rangle &= -|u_3\rangle \\ B|u_1\rangle &= |u_3\rangle & ; & & B|u_2\rangle &= |u_2\rangle & ; & & B|u_3\rangle &= |u_1\rangle \end{aligned}$$

(a) Escreva as matrizes que representam, na base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, os operadores A, A^2, B, B^2 .

(b) Escreva as matrizes mais gerais que comutem com A, A^2 e B^2 .

4. Usando a ortonormalidade de $|+\rangle$ e $|-\rangle$, mostre que

$$[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k \quad ; \quad \{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2} \delta_{ij},$$

onde

$$S_x = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|) \quad ; \quad S_y = \frac{i\hbar}{2} (|-\rangle\langle+| - |+\rangle\langle-|) \quad ; \quad S_z = \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|).$$

5. O modelo de Jaynes-Cummings:

Este modelo foi originalmente proposto em 1963 por Edwin Jaynes e Fred Cummings, com a finalidade de estudar a relação entre a teoria quântica da radiação e a formulação semi-clássica na descrição do fenômeno da emissão espontânea. Na atualidade este modelo é muito usado, na sua forma linear e também não-linear, para estudos em ótica quântica.

Considere o Hamiltoniano H , escrito como a soma de uma parte livre H_0 e outra de interação H_{int} , isto é,

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad (1)$$

com

$$H_0 = H_{\text{campo}} + H_{\text{átomo}} \\ H_{\text{campo}} = \hbar w_c a^\dagger a \quad ; \quad H_{\text{átomo}} = \frac{1}{2} \hbar w_a \sigma_z \quad ; \quad H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \hbar \Omega E P \quad (2)$$

onde w_a , w_c e Ω são frequências constantes e os operadores E e P dados por

$$E = a^\dagger + a \quad \longrightarrow \quad \text{campo de bósons} \\ P = \sigma_+ + \sigma_- \quad \longrightarrow \quad \text{polarização} \quad (3)$$

e também temos

$$\sigma_z = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \quad ; \quad \sigma_\pm = |\pm\rangle\langle\mp| \quad (4)$$

(a) Mostre que na representação de interação

$$H_{\text{int}}(t) = \frac{1}{2} \hbar \Omega \left[e^{i(w_a+w_c)t} a^\dagger \sigma_+ + e^{-i(w_a-w_c)t} a^\dagger \sigma_- + e^{i(w_a-w_c)t} a \sigma_+ + e^{-i(w_a+w_c)t} a \sigma_- \right]$$

Na chamada aproximação de “rotating wave”, as frequências altas são desprezadas, isto é,

$$|w_c - w_a| \ll w_c + w_a$$

e assim $H_{\text{int}}(t)$ do item (a) é reduzido a

$$H_{\text{int}}(t) \simeq \frac{1}{2} \hbar \Omega \left[e^{-i(w_a-w_c)t} a^\dagger \sigma_- + e^{i(w_a-w_c)t} a \sigma_+ \right].$$

Nesta aproximação é definido o Hamiltoniano do modelo de **Jaynes-Cummings** H_{JC} (na representação de Schrödinger):

$$H_{JC} = \hbar w_c a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar w_a \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \Omega \left[a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+ \right] \quad (5)$$

(b) Mostre que H_{JC} , definido na equação (5), pode ser escrito como

$$H_{JC} = H_1 + H_2$$

onde

$$H_1 = \hbar w_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \sigma_z \right) \quad ; \quad H_2 = \frac{\hbar}{2} \delta \sigma_z + \frac{1}{2} \hbar \Omega \left[a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+ \right] \\ \delta = w_a - w_c$$

(c) Mostre que

$$[H_1, H_2] = 0$$

Os autoestados de H_1 podem ser escritos como o produto dos estados $|n\rangle$ com $|+\rangle$ e $|-\rangle$, assim podemos definir os estados

$$|\alpha_n^1\rangle \equiv |n, +\rangle \quad ; \quad |\alpha_n^2\rangle \equiv |n+1, -\rangle \quad (6)$$

e os elementos de matriz de H_{JC} neste subespaço são dados por $H_n^{ij} = \langle \alpha_n^i | H_{JC} | \alpha_n^j \rangle$

(d) Mostre que a matriz de H_{JC} , com elementos H_n^{ij} , é dada por

$$H_{JC} = \begin{pmatrix} n\hbar\omega_c + \frac{1}{2}\hbar\omega_a & \frac{1}{2}\hbar\Omega\sqrt{n+1} \\ \frac{1}{2}\hbar\Omega\sqrt{n+1} & (n+1)\hbar\omega_c - \frac{1}{2}\hbar\omega_a \end{pmatrix}$$

(e) Mostre que os autovalores da matriz de H_{JC} são

$$E_{\pm} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\hbar\Omega_n$$

onde

$$\Omega_n = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2(n+1)}$$

6. O Gato de Cheshire Quântico

O Gato de Cheshire (ou Gato Risonho) é um gato fictício, personagem do livro *Alice no País das Maravilhas* de Lewis Carroll. Ele se caracteriza por seu sorriso pronunciado e sua capacidade de aparecer e desaparecer.



A “versão quântica” do Gato de Cheshire foi concebida teoricamente por Y. Aharonov et al. [1], na forma de uma experiência de interferência como é visto na figura (1), onde o “gato” é enviado pelo caminho 1 e o seu “sorriso” pelo caminho 2. Na sua realização experimental, o grupo de T. Denkmayr et al. [2] utilizaram um neutrão para desempenhar o papel do gato e o sorriso foi representado pela componente de seu spin ao longo da direção- z .

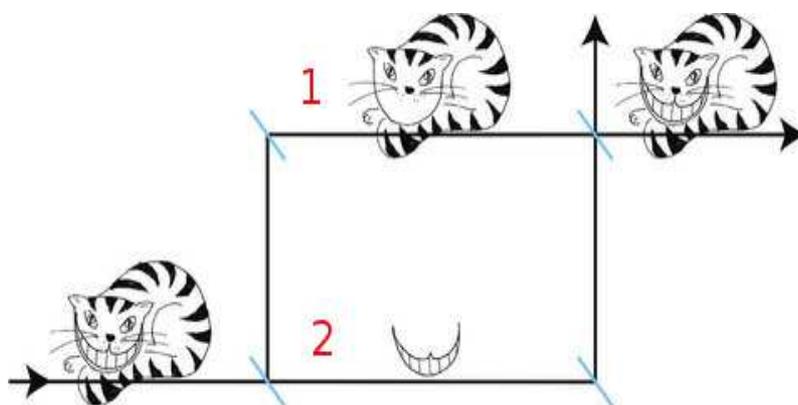


Figura 1: Dentro do interferômetro, o gato passa pelo caminho 1, enquanto o seu sorriso viaja ao longo do percurso do caminho 2.

O experimento está fundamentado no conceito de *medida fraca*, ou seja, uma medida quântica muito fraca realizada sobre um sistema físico, capaz de produzir uma perturbação muito pequena no sistema. Na medida fraca, o sistema físico é preparado num estado inicial $|\psi_i\rangle$, chamado de “pré-selecionado”, sofrendo transição para um estado final, chamado de “pós-selecionado”. A medida fraca (*weak*) de um observável A é definida por

$$\langle A \rangle_w = \frac{\langle \psi_f | A | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}. \quad (7)$$

No experimento de T. Denkmayr et al. os estados $|\psi_i\rangle$ e $|\psi_f\rangle$, são

$$\begin{aligned} |\psi_i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|S_x; +\rangle |1\rangle + |S_x; -\rangle |2\rangle \right] & ; & \quad (\text{pré-selecionado}) \\ |\psi_f\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |S_x; -\rangle \left[|1\rangle + |2\rangle \right] & ; & \quad (\text{pós-selecionado}) \end{aligned} \quad (8)$$

onde $|S_x; \pm\rangle$ é o ket de spin na direção- x ; $|1\rangle$ e $|2\rangle$ os kets de posição seguindo os respectivos caminhos 1 e 2. Os operadores fracos são:

(a) o operador de posição, seguindo o j -ésimo caminho: $\Pi_j = |j\rangle \langle j|$

(b) o operador de spin na direção- z , seguindo o j -ésimo caminho: $\sigma_z^{(j)} = \sigma_z \Pi_j$

com $j = 1$ ou 2 ; $\langle j|j'\rangle = \delta_{jj'}$; $\sigma_z |S_z; \pm\rangle = \pm |S_z; \pm\rangle$.

Mostre que:

$$\langle \Pi_1 \rangle_w = 0 \quad ; \quad \langle \sigma_z^{(1)} \rangle_w = 1 \quad (9)$$

$$\langle \Pi_2 \rangle_w = 1 \quad ; \quad \langle \sigma_z^{(2)} \rangle_w = 0 \quad (10)$$

Interpretação:

Pelas equações (9) vemos que a população de partículas passando pelo caminho 1 é nula ($\langle \Pi_1 \rangle_w = 0$), no entanto há spin passando por este caminho ($\langle \sigma_z^{(1)} \rangle_w = 1$).

Pelas equações (10) há uma população de partículas passando pelo caminho 2 ($\langle \Pi_2 \rangle_w = 1$) sem haver spin passando por este caminho ($\langle \sigma_z^{(2)} \rangle_w = 0$).

Em outras palavras, pode haver uma partícula num ponto e o spin dela aparecer separado, em outro ponto, onde ela não está.

Observação: esta interpretação expressa acima, na qual a partícula é separada de suas propriedades intrínsecas, é contestada por um grupo brasileiro [4]. A polêmica continua...

-
- [1] Yakir Aharonov, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich and Paul Skrzypczyk, *Quantum Cheshire Cats*, New Jour. Phys. 15, 113015 (2013).
- [2] Tobias Denkmayr, Hermann Geppert, Stephan Sponar, Hartmut Lemmel, Alexandre Matzkin, Jeff Tollaksen and Yuji Hasegawa, *Observation of a quantum Cheshire Cat in a matter-wave interferometer experiment*, Nature Commun. 5, 4492 (2014). doi:10.1038/ncomms5492
- [3] Yakir Aharonov, David Z. Albert, and Lev Vaidman, *How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin- 2 Particle Can Turn Out to be 100*, Phys Rev. Lett. 60, 1351 (1988).
- [4] Raul Corrêa, Marcelo França Santos, C H Monken and Pablo L Saldanha, ‘*Quantum Cheshire Cat’ as simple quantum interference*, New Jour. Phys. 17, 053042 (2015).