UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Lista n$^{\underline{o}}$ 3 -FIS01220- Teoria Eletromagnética IIB - Prof. Dimiter Hadjimichef

Guia de Ondas

Vamos considerar ondas eletromagnéticas confinadas no interior de um tubo oco (guia de ondas), ver figura (1). Assumimos que o guia de onda é um condutor perfeito, de forma que $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} = 0$ dentro do próprio material, portanto as condições de contorno na parede interna são $\vec{E}^{\|} = 0$ e $\vec{B}^{\perp} = 0$. As Equações de Maxwell no interior do guia de ondas são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \,. \tag{4}$$

Estamos interessados em ondas monocromáticas que se propagam pelo tubo, de forma que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ tem a forma genérica

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, x)\, e^{i(k\,z - \omega\, t)} \qquad ; \qquad \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(x, x)\, e^{i(k\,z - \omega\, t)} \,. \tag{5}$$

As ondas confinadas não são (em geral) transversais, para adequarmos o problema às condições de contorno é necessário incluir as componentes longitudinais E_z e B_z, ou seja,

$$\vec{E}_0 = E_x\, \hat{\imath} + E_y\, \hat{\jmath} + E_z\, \hat{k} \qquad ; \qquad \vec{B}_0 = B_x\, \hat{\imath} + B_y\, \hat{\jmath} + B_z\, \hat{k} \tag{6}$$

onde cada uma das componentes é função de x e y.

Questões

1. Use as equações (5) e (6) nas Eqs. de Maxwell (3) e (4) para obter

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\,\omega\, B_z \qquad ; \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -i\,\frac{\omega}{c^2}\, E_z \tag{7}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - i\,k\,E_y = i\,\omega\, B_x \qquad ; \qquad \frac{\partial B_z}{\partial y} - i\,k\,B_y = -i\,\frac{\omega}{c^2}\, E_x \tag{8}$$

$$i\,k\,E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\,\omega\, B_y \qquad ; \qquad i\,k\,B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -i\,\frac{\omega}{c^2}\, E_y \tag{9}$$

2. Resolva as equações (8) e (9) para obter

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\,\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\,\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\\
E_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\,\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\,\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\\
B_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\,\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\,\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\\
B_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\,\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\,\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

3. Inserindo as equações (10) nas Eqs. de Maxwell (1) e (2), obtenha

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] E_z = 0\\
\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] B_z = 0\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

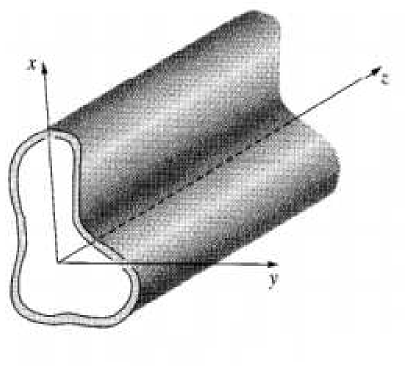

Figura 1: Guia de onda