UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Lista n.º 2 -FIS01220- Teoria Eletromagnética IIB - Prof. Dimiter Hadjimichef

1. Uma esfera de raio R possui uma polarização uniforme $\vec{P}$ e magnetização uniforme $\vec{M}$ (não necessariamente na mesma direção) e campos elétricos e magnéticos dados por

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P} & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\,[\,3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\,] & r > R \end{cases} \quad ; \quad \vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\,\vec{M} & r < R \\ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\,[\,3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\,] & r > R \end{cases} \tag{1}$$

onde $\vec{p} = 4\pi R^3\vec{P}/3$ e $\vec{m} = 4\pi R^3\vec{M}/3$.

Mostre que o momento eletromagnético é dado por

$$\vec{\mathcal{P}}_{\text{dentro}} = \frac{8}{27}\,\mu_0\,\pi\,R^3\,\vec{M}\times\vec{P} \quad ; \quad \vec{\mathcal{P}}_{\text{fora}} = \frac{4}{27}\,\mu_0\,\pi\,R^3\,\vec{M}\times\vec{P}$$
$$\vec{\mathcal{P}}_{\text{tot}} = \frac{4}{9}\,\mu_0\,\pi\,R^3\,\vec{M}\times\vec{P}$$

2. Considere um capacitor de placas paralelas infinito, cuja placa inferior (em $z = -d/2$) tem densidade de carga $-\sigma$ e cuja placa superior (em $z = +d/2$) tem densidade de carga $+\sigma$.

Mostre que o tensor de tensões é dado por

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

3. Sejam as Equações de Maxwell (em unidades do SI)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Considere a situação de um campo magnético quasi-estático num condutor ($\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \approx 0$) com potencial escalar $\phi = 0$ e $\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$.

Mostre que a lei de Ampère, no calibre de Coulomb, se reduz a uma equação de difusão para o potencial vetorial:

$$\nabla^2\vec{A} = \mu\,\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{2}$$

4. A equação de difusão homogênea (2), do problema anterior, para o vetor potencial, em meios condutores ilimitados, tem uma solução para o problema do valor inicial dada por

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \int d\vec{x}'\,G(\vec{x}-\vec{x}',t)\,\vec{A}(\vec{x}',0) \tag{3}$$

onde $G(\vec{x}-\vec{x}',t)$ é a função de Green.

(a) **Mostre** que esta função de Green, que satisfaz a Eq. (2), tem como representação de Fourier:

$$G(\vec{x} - \vec{x}\,', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\, e^{-k^2\, t/\mu\sigma + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}\,')} \tag{4}$$

<u>Dica:</u> considere nesta resolução que o vetor potencial $\vec{A}(\vec{x}, t)$ possa ser escrito em termos da sua transformada de Fourier:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \vec{A}(\vec{k}, t)$$

(b) A função de Green $G(\vec{x} - \vec{x}\,', t)$ também satisfaz uma equação de difusão

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 G = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}\,')\, \delta(t) \tag{5}$$

Mostre que a transformada de Fourier de G no espaço de momento e frequência é dada

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}\,'}}{k^2/\mu\sigma - i\omega} \tag{6}$$

<u>Dica:</u> considere que $G(\vec{x}, t)$ possa ser escrito em termos da sua transformada de Fourier:

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega\, d\vec{k}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega\, t)}\, G(\vec{k}, \omega)$$

e substitua na equação (5).

(c) Usando o resultado (6), realiza a integral no plano complexo da variável ω e obtenha

$$G(\vec{k}, t) = e^{-k^2\, t/\mu\sigma - i\vec{k}\cdot\vec{x}\,'}\,.$$

Compare com o kernel da integral (4).

5. Por diferenciação explícita, verifique que as funções f_1 e f_2 satisfazem a equação da onda, enquanto as funções f_3 e f_4 não a satisfazem:

$$\begin{aligned} f_1(z,t) &= A \exp\left[-b(z - vt)^2\right] \qquad ; \qquad f_2(z,t) = \frac{A}{b(z - vt)^2 + 1} \\ f_3(z,t) &= A \exp\left[-b(b\, z^2 + vt)\right] \qquad ; \qquad f_4(z,t) = A\, \mathrm{sen}(bz)\, \cos(bvt)^3\,. \end{aligned} \tag{7}$$

6. Para uma onda plana em um meio condutor $\vec{B} = \frac{n^c}{c}\, \hat{u} \times \vec{E}$. Suponha que $\vec{E}$ é elipticamente polarizado, com $\underset{\sim}{E} = E_p\, e^{i\phi}\, \hat{p} + E_s\, \hat{s}$. Mostre que em cada instante do tempo

$$\mathrm{Re}\left(\vec{E}\right) \cdot \mathrm{Re}\left(\vec{B}\right) = -\frac{h}{c}\, E_p\, E_s\, \mathrm{sen}\phi$$