UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Lista n^{o} 1 -FIS01220- Teoria Eletromagnética IIB - Prof. Dimiter Hadjimichef

1. Usando a definição do produto vetorial

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i \;=\; \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\, A_j\, B_k$$

e produto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i\, B_i,$$

mostre as seguintes identidades vetoriais diferenciais

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = \nabla^2 \varphi \tag{1}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \tag{2}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 \tag{3}$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \tag{4}$$
$$\vec{\nabla}(\varphi\psi) = (\vec{\nabla}\varphi)\psi + \varphi(\vec{\nabla}\psi) \tag{5}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \tag{6}$$
$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi\vec{F}) = (\vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{F} + \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \tag{7}$$
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F} \tag{8}$$
$$\vec{\nabla} \times (\varphi\vec{F}) = (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{F} + \varphi\vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{9}$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})\vec{F} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} \tag{10}$$
$$\vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}B^2\right) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \tag{11}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \tag{12}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \tag{13}$$
$$\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\vec{r} = \vec{G} \tag{14}$$
$$\nabla^2\vec{r} = 0 \tag{15}$$

2. Partindo de uma expressão para a força por unidade de volume sobre uma região do espaço livre que contém cargas e correntes

$$\vec{F}_v = \rho\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}\,,$$

e usando as equações de Maxwell e a identidade (11) do item anterior, demonstre que

$$\begin{aligned}\vec{F}_v \;=\; & -\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{2}\epsilon_0\,\vec{\nabla}(E^2) + \epsilon_0\,(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} \\ & +\frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2\mu_0}\,\vec{\nabla}(B^2) + \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}\end{aligned}$$

3. Considere um meio no qual $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, $\mu = \mu_0$, mas onde a polarização $\vec{P}$ é uma função da posição e do tempo $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z, t)$. Demonstre que as equações de Maxwell são obtidas, corretamente, a partir de uma única função vetorial $\vec{Z}$ (vetor de Hertz), onde $\vec{Z}$ satisfaz

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$$
$$\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Z} - \frac{1}{\epsilon_0}\vec{P}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$$

4. Considere um meio no qual $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, mas onde a magnetização $\vec{M}$ é uma função da posição e do tempo $\vec{M} = \vec{M}(x, y, z, t)$. Demonstre que as equações de Maxwell são obtidas, corretamente, a partir de uma única função vetorial $\vec{Y}$, onde $\vec{Y}$ satisfaz

$$\nabla^2 \vec{Y} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{M}$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{Y}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{Y}$$