UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Trabalho de Relatividade Geral - Fundamentos de Relatividade - Prof. Dimiter Hadjimichef

O tensor de Einstein é (usando $c = 1$)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R\,, \tag{1}$$

e a equação de Einstein da Relatividade Geral (com contante cosmológica Λ) é dada por

$$G_{\mu\nu} = -8\pi\, G \left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{8\,\pi\, G}\, g_{\mu\nu} \right)\,. \tag{2}$$

QUESTÕES

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) é uma solução exata das equações de campo de Einstein da Relatividade Geral e descreve, na Cosmologia, um Universo homogêneo e isotrópico em expansão ou contração. As equações de campo de Einstein são apenas necessárias para se obter o fator de escala $a(t)$ do Universo. Essa métrica está associada ao modelo às vezes chamado de *Modelo Padrão da cosmologia moderna*, muito embora essa métrica também esteja associada ao modelo mais elaborado, que é usado para descrever a chamada *matéria escura fria* (**C**old **D**ark **M**atter, $\Lambda \neq 0$), também conhecido como modelo ΛCDM.

1. A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para o Universo é

$$g_{00} \;=\; 1 \quad ; \quad g_{11} = -\frac{a^2(t)}{1 - k\, r^2} \quad ; \quad g_{22} = -r^2\, a^2(t) \quad ; \quad g_{33} = -r^2\, a^2(t)\, \text{sen}^2\theta\,. \tag{3}$$

O elemento de linha para esta métrica fica

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k\, r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\phi^2\,) \right]\,. \tag{4}$$

(a) Mostre que os $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ não nulos são

$$\Gamma^0_{11} = \frac{a\,\dot{a}}{1 - k\, r^2} \;\;;\;\; \Gamma^0_{22} = r^2 a\,\dot{a} \;\;;\;\; \Gamma^0_{33} = r^2 a\,\dot{a}\, \text{sen}^2\,\theta \;\;;\;\; \Gamma^1_{11} = \frac{k\, r}{1 - k\, r^2} \;\;;$$
$$\Gamma^1_{22} = -r(1 - k\, r^2) \;\;;\;\; \Gamma^1_{33} = -r(1 - k\, r^2)\, \text{sen}^2\,\theta \;\;;$$
$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}}{a} \;\;;\;\; \Gamma^2_{33} = -\cos\theta\, \text{sen}\theta \;\;;$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \;\;;\;\; \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \text{cotg}\,\theta\,.$$

(b) Mostre que as componentes não nulas do tensor misto de Einstein $G^\mu{}_\nu$ são

$$G^0{}_0 \;=\; -3 \left[\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right] \qquad ; \qquad G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = -\left[\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right]\,.$$

2. Considere o Universo como sendo um “fluido perfeito”, com um tensor de matéria dado por

$$T^{\mu\nu} = -p\, g^{\mu\nu} + (p+\rho)\, U^\mu\, U^\nu\,,$$

onde U^μ é a 4-velocidade do fluido, p e ρ são a pressão e a densidade de energia, respectivamente, medidos por um observador em repouso em relação ao fluido, isto é, $U^\mu = (1,0,0,0)$.

Usando a métrica de FLRW e a equação de campo (2), obtenha a as equações de Friedmann para o modelo ΛCDM ($\Lambda \neq 0$):

$$H(t) = \frac{8\pi\, G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{5}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi\, G\, p - H - \frac{k}{a^2} + \Lambda\,, \tag{6}$$

onde $H(t) = \dot{a}^2/a^2\,.$

(Dica: as equações (5) e (6) são obtidas da equação de Einstein (2) tomando $\mu = \nu = 0$ e $\mu = \nu = 1$, respectivamente.)