UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Lista n$^{\underline{o}}$ 2 - Fundamentos de Relatividade - Prof. Dimiter Hadjimichef

QUESTÕES

1. Prove que se $A_{\mu\nu}$ é um tensor covariante de 2$^{\underline{a}}$ ordem, os determinantes das matrizes formadas por suas componentes nos sistemas de coordenadas $\{x^\alpha\}$ e $\{x^{\alpha'}\}$ são relacionados por

$$\det[A_{\mu'\nu'}] = p^{-2}\det[A_{\mu\nu}]$$

onde

$$p \equiv \det[p^{\alpha'}_{\alpha}] = \det\left[\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right]$$

é o Jacobiano da transformação $\{x^\alpha\} \to \{x^{\alpha'}\}$.

2. Partindo das equações de Maxwell na forma covariante

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}\, j^\beta \quad ; \quad \partial_\alpha\, {}^*F^{\alpha\beta} = 0\,,$$

(a) Mostre que se obtem as respectivas equações na forma não covariante:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\,\rho \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

onde para este item considere que $j^\beta = (\,c\,\rho, \vec{j}\,)$ e

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Mostre que equação de Maxwell homogênea $\partial_\alpha\, {}^*F^{\alpha\beta} = 0$ pode ser escrita na forma

$$\partial_\alpha F_{\gamma\delta} + \partial_\delta F_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma F_{\delta\alpha} = 0\,.$$

3. Partindo do tensor de energia do campo eletromagnético

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu}{}_{\alpha}\,F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\,\eta^{\mu\nu}\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right]$$

obtenha o vetor de Poynting e o tensor de stress, respectivamente:

$$\begin{aligned} s_i &= cM^{0i} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_i \\ p_{ij} &= M^{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left[E_i\,E_j + B_i\,B_j + \frac{1}{2}\eta^{ij}\,(E^2+B^2)\right] \end{aligned}$$

4. Mostre que a energia relativística de repouso $E = m\,c^2$ pode ser escrita em termos de uma expressão invariante $E = \; P_\mu\, U^\mu$.

Observação: nos próximos dois exercícios considere $c = 1$

5. Em processos de espalhamento relativístico do tipo $A + B \to C + D$ é usual se escrever as equações em termos de invariantes chamados de *variávies de Mandelstam*: s, t, u. Estas variáveis são definidas em termos dos 4-momentos (ver Figura 1):

$$s \equiv (\underset{\sim}{P}_A + \underset{\sim}{P}_B)^2 \quad ; \quad t \equiv (\underset{\sim}{P}_A - \underset{\sim}{P}_C)^2 \quad ; \quad u \equiv (\underset{\sim}{P}_A - \underset{\sim}{P}_D)^2 \,.$$

   Mostre que

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 \,,$$

   onde m_i é a massa de repouso da i-ésima partícula.

6. Considere o decaimento do tipo $A \to B + C$, onde a partícula A está inicialmente em repouso e os módulos dos 3-momentos de B e C obedecem a seguinte relação $P = |\vec{p}_B| = |\vec{p}_C|$. Por conservação da energia relativísitica, mostre que

$$P = \frac{\sqrt{[m_A^2 - (m_B + m_C)^2][m_A^2 - (m_B - m_C)^2]}}{2m_A} \,.$$

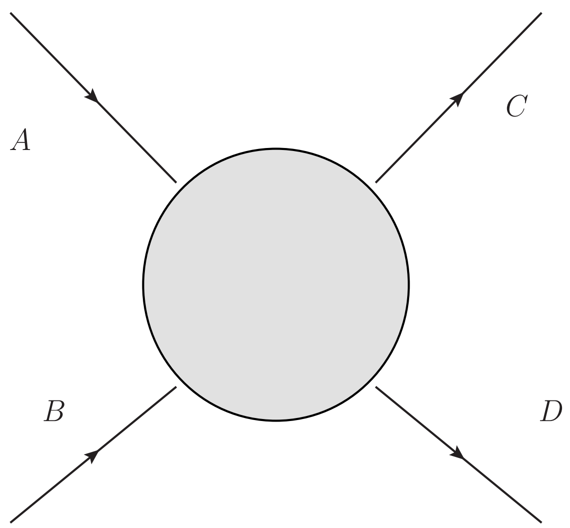

Figura 1: