UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Lista n? 1 - Fundamentos de Relatividade - Prof. Dimiter Hadjimichef

QUESTÕES

1. Seja o vetor desconhecido $\vec{Y}$ satisfazendo as seguintes relações com os vetores conhecidos $\vec{A}$, $\vec{B}$ e o escalar ϕ: $\quad \vec{Y} \times \vec{A} = \vec{B} \quad$ e $\quad \vec{Y} \cdot \vec{A} = \phi$. Mostre que

$$\vec{Y} = \frac{\phi\,\vec{A}}{A^2} + \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{A^2}.$$

2. A transformação de coordenadas $\{x_i\} \to \{x_i'\}$ é realizada pela matriz de transformação de coordenadas λ. Mostre que o produto escalar é invariante frente a esta transformação, isto é, $\vec{A}\,' \cdot \vec{B}\,' = \vec{A} \cdot \vec{B}$.

3. Mostre, usando a definição do produto vetorial $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\, A_j\, B_k$ e escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i\, B_i$, que

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}).$$

4. Seja o vetor $\vec{r}$ escrito em coordenadas esféricas

$$\vec{r} = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\phi\,\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{\jmath} + r\cos\theta\,\hat{k}.$$

(a) Obtenha os vetores unitários $\hat{e}_r,\ \hat{e}_\theta,\ \hat{e}_\phi$ usando as expressões abaixo

$$\hat{e}_r = \frac{1}{h_1}\frac{d\vec{r}}{dr} \;\; ; \;\; \hat{e}_\theta = \frac{1}{h_2}\frac{d\vec{r}}{d\theta} \;\; ; \;\; \hat{e}_\phi = \frac{1}{h_3}\frac{d\vec{r}}{d\phi}.$$

onde $h_1 = |d\vec{r}/dr|$, $h_2 = |d\vec{r}/d\theta|$, $h_3 = |d\vec{r}/d\phi|$.

(b) Mostre que estes vetores $\hat{e}_r,\ \hat{e}_\theta$, e $\hat{e}_\phi$ são ortonormais.

(c) Usando a transformação para as componentes

$$\frac{\partial}{\partial\, x_i'} = \sum_j \frac{\partial\, x_j}{\partial\, x_i'}\frac{\partial}{\partial\, x_j},$$

mostre que o gradiente, neste sistema de coordenadas, é

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial\, r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\,\theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\,\phi}\,.$$

(d) Mostre também que o Laplaciano fica

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\, r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial\, r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\,\phi^2}\,.$$

5. Mostre que se $v/c = 0,999\ldots995$ (onde há $2n$ números 9) o fator de Lorentz pode ser aproximado por $\gamma(v) \approx 10^n$.

6. Uma placa, com massa muito grande, move-se com velocidade uniforme v, na direção da sua normal, num certo referencial inercial. Uma bola é jogada contra a placa com velocidade u, a partir de uma direção que forma um ângulo θ com a normal. Considerando que não há recuo, use a relatividade Galileana para mostrar que a bola irá deixar a placa seguindo uma direção que forma, com a normal, um ângulo ϕ e com velocidade ω, tal que

$$\frac{u}{\omega} = \frac{\mathrm{sen}\phi}{\mathrm{sen}\theta} \qquad , \qquad \frac{u\,\cos\theta + 2\,v}{u\,\mathrm{sen}\theta} = \cot\phi\,.$$

7. Mostre que o operador diferencial da equação de onda, de uma onda eletromagnética, fica invariante frente às transformações de Lorentz (Obs: boost apenas na direção x), isto é,

$$\bigtriangledown^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t^2} = \bigtriangledown'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\,t'^2}$$

8. As equações de Maxwell (em unidades de Heaviside-Lorentz), são dadas pelas seguintes equações:

$$\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{E} = \rho \qquad ; \qquad \vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{B} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\bigtriangledown}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\vec{j} \qquad ; \qquad \vec{\bigtriangledown}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são os campos elétrico e magnético, $\vec{j}$ a densidade corrente elétrica e ρ a densidade de carga elétrica. Mostre estas equações são invariantes frente às transformações de Lorentz (Obs: considere um boost apenas na direção x).

9. Segundo a tabela de partículas elementares do *Particle Data Group*, edição de 2010, o múon tem uma vida média $\tau = 2,19\times10^{-6}$ s (em repouso). Considere que ele incida na atmosfera terrestre com uma velocidade $v/c = 0,998$. (a) Calcule o tempo de vida; (b) a distância percorrida do ponto de vista do referencial da Terra. Compare com a distância que ele iria percorre se os efeitos relativísticos fossem desconsiderados ($x = v\,\tau$).

10. Considere um relógio em repouso num referencial S', registrando um intervalo de tempo $\Delta\,t'$. Este referencial está movendo-se com velocidade constante v em relação ao referencial S. Construa o respectivo diagrama de Minkowski para esta situação e obtenha, a partir deste diagrama, a expressão para o intervalo de tempo $\Delta\,t$ medido em S.

11. As transformações de Lorentz podem ser escritas em termos da rapidez ϕ:

$$x' = x\,\cosh\phi - c\,t\,\mathrm{senh}\,\phi \quad ; \quad c\,t' = -x\,\mathrm{senh}\,\phi + c\,t\,\cosh\phi\,.$$

Mostre que estas duas equações podem ser escritas como

$$c\,t' + x' = e^{-\phi}\,(c\,t + x) \quad ; \quad c\,t' - x' = e^{\phi}\,(c\,t - x)$$

12. Uma haste de comprimento l forma um ângulo θ com o eixo x, no seu sistema de repouso S (como é visto na figura 1). Um observador move-se na direção x com velocidade constante v, mostre que o comprimento l' e a orientação θ' que ele irá medir são dados por

$$l' = l \left[\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{\gamma^2} \cos^2\theta \right]^{1/2} \quad , \quad \tan\theta' = \gamma \tan\theta$$

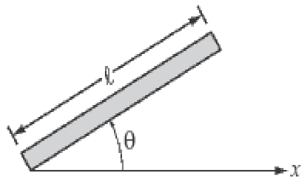

Figura 1: