UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Lista n.º 3 - Mecânica Quântica - Prof. Dimiter Hadjimichef

> *If you can't join'em, beat'em*
>
> Julian Schwinger

1. **Simetrias**

Classicamente, a transformação de Galileu, também chamada de *boost*, é definida por

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{v}\,t \qquad ; \qquad \vec{p}\,' = \vec{p} + m\,\vec{v} \qquad ; \qquad t' = t\,,$$

onde $\vec{x}$, $\vec{p}$, $\vec{v}$ e m são a posição, momento, velocidade e massa respectivamente. Na sua implementação quântica, pode-se definir um gerador para esta transformação: $\vec{N} = \vec{P}\,t - m\,\vec{X}$ (operador de boost), onde $\vec{P}$, $\vec{X}$ são os operadores de momento e posição. Na forma de uma transformação contínua pode ser escrita como

$$G(\vec{v}) = e^{-i\,\vec{v}\cdot\vec{N}/\hbar}$$

(a) Mostre que

$$\frac{i}{\hbar}\,[N_i, X_j] = \frac{\partial N_i}{\partial P_j} = \delta_{ij}\,t \qquad ; \qquad \frac{i}{\hbar}\,[N_i, P_j] = -\frac{\partial N_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}\,m$$

(b) Mostre que

$$G(\vec{v}) = e^{i\,m\vec{v}\cdot\vec{X}/\hbar}\,e^{-it\,\vec{v}\cdot\vec{P}/\hbar}\,e^{-i\,\omega t/\hbar}$$

onde $\omega = m\,v^2/2\,.$

(c) Mostre que

$$\psi'_\alpha(\vec{x},t) = e^{im(\vec{v}\cdot\vec{x}-\frac{1}{2}v^2\,t)/\hbar}\,\psi_\alpha(\vec{x}-\vec{v}t,t)\,,$$

lembre que $\psi'_\alpha(\vec{x},t) = \langle\,\vec{x}|\alpha',t\,\rangle = \langle\,\vec{x}|\,G(\vec{v})\,|\alpha,t\,\rangle$.

(d) Mostre que

$$G^\dagger(\delta\vec{v})\,X_i\,G(\delta\vec{v}) = X_i + \delta v_i\,t\,I \qquad ; \qquad G^\dagger(\delta\vec{v})\,P_i\,G(\delta\vec{v}) = P_i + \delta v_i\,m\;I$$

onde I é a identidade.

2. **Teoria de Espalhamento**

Considere a equação de Lippman-Schwinger dada por

$$|\vec{k}+\rangle = |\vec{k}\,\rangle + G_0^+(E)\,V\,|\vec{k}+\rangle\,. \tag{1}$$

A chamada *aproximação de Born*, consiste em subsituir no lado direito da equação (1) a seguinte aproximação

$$|\vec{k}+\rangle \approx |\vec{k}\,\rangle \tag{2}$$

e a amplitude de espalhamento para um potencial V esfericamente simétrico é dada por

$$f(q) = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\, r^2\, V(r)\,\frac{\mathrm{sen}\;qr}{qr}\,. \tag{3}$$

Considerando esta aproximação

(a) Mostre que para o potencial de Yukawa

$$V(r) = V_0\,\frac{e^{-\alpha\, r}}{\alpha\, r}\,. \tag{4}$$

a seção de choque diferencial fica

$$\frac{d\,\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2\,V_0^2}{\hbar^4\,\alpha^2}\,\frac{1}{\left[4\,k^2 \mathrm{sen}^{\,2}\,\theta/2 + \alpha^2\right]^2} \tag{5}$$

onde, $q = 2\,k\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}$ e α^{-1} é o alcance do potencial,

(b) Mostre que no limite de alcance infinito a Eq. (5) se reduz à seção de choque de Rutherford

$$\frac{d\,\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\,Z'\,e^2}{8\pi\epsilon_0\,m\,v^2}\right)^2\,\frac{1}{\mathrm{sen}^{\,4}\,\theta/2} \tag{6}$$

onde, v é a velocidade da partícula e

$$\frac{V_0}{\alpha} = \frac{Z\,Z'\,e^2}{4\pi\epsilon_0}$$