UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Lista nº 2 - Mecânica Quântica - Prof. Dimiter Hadjimichef

What gets us into trouble is not what we don't know.
It's what we know for sure that just ain't so.

Mark Twain

1. Considere uma interação entre uma partícula de spin 1/2 e o campo magnético descrito pelo seguinte Hamiltoniano
$$H = -\left(\frac{e}{m_e\,c}\right)\vec{S}\cdot\vec{B}\,,$$
Considere que o elétron tem carga $e < 0$ e as orientações espaciais para o campo magnético dadas por $\vec{B} = B_o\,\hat{\jmath} + B_o\,\hat{k}$. Usando a seguinte definição
$$w = \frac{|e|B_o}{m_e\,c}$$
Escreva as equações de movimento de Heisenberg dos operadores $S_x(t)$, $S_y(t)$ e $S_z(t)$.
Mostre que as soluções são dadas por
$$\begin{aligned} S_x(t) &= \cos\left(\sqrt{2}wt\right)\,S_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\left(\sqrt{2}wt\right)\,S_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\left(\sqrt{2}wt\right)\,S_z \\ S_y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\left(\sqrt{2}wt\right)\,S_x + \cos^2\left(\frac{wt}{\sqrt{2}}\right)\,S_y + \mathrm{sen}^2\left(\frac{wt}{\sqrt{2}}\right)\,S_z \\ S_z(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\left(\sqrt{2}wt\right)\,S_x + \mathrm{sen}^2\left(\frac{wt}{\sqrt{2}}\right)\,S_y + \cos^2\left(\frac{wt}{\sqrt{2}}\right)\,S_z\,. \end{aligned}$$

2. Considere os seguintes Hamiltonianos
$$(a)\;H = \frac{P_x^2}{2m} - F\,X \qquad ; \qquad (b)\;H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$
onde F é uma constante. Obtenha as equações de movimento de Heisenberg e encontre as suas soluções para $X(t)$ e $P_x(t)$.

3. Considere o propagador $K(x,t;x',0)$ do oscilador harmônico simples
$$K(x,t;x',0) = A(t)\;\exp\left(-\pi\,A(t)^2\;[(x^2+{x'}^2)\cos(\omega\,t) - 2\,x\,x'\,]\right)$$
onde
$$A(t) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t)}\right)^{1/2}.$$
Mostre que este propagador satisfaz a equação de Schrödinger geral
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\,t_b}K(b;a) = H_b\,K(b;a) \qquad ; \qquad t_b > t_a$$
onde o operador H_b opera apenas nas variáveis b.

4. Considere o operador identidade $\mathbb{1}$ definido em primeira quantização como
$$\mathbb{1} = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \,.$$
Mostre que em segunda quantização ele é o *operador número*
$$N = \sum_\alpha a^\dagger(\alpha)\, a(\alpha) \,.$$

5. Considere os operadores de criação e destruição de quarks $q^\dagger_\mu$ e q_μ, respectivamente, tal que
$$q_\mu\, |0\rangle = 0 \,,$$
onde μ representa o conjunto de números quânticos. Os operadores $q^\dagger_\mu$ e q_μ obedecem as seguintes relações de anticomutação
$$\{q_\mu, q_\nu\} = \{q^\dagger_\mu, q^\dagger_\nu\} = 0 \qquad ; \qquad \{q_\mu, q^\dagger_\nu\} = \delta_{\mu\nu} \,,$$
onde a $\delta_{\mu\nu}$ é uma notação compacta para:
$$\delta_{\mu\nu} = \delta_{\mathrm{spin}_\mu\, \mathrm{spin}_\nu} \times \delta(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \times \ldots$$
A partir destes operadores podemos definir um operador de criação para um *bárion* (exemplos de bárions: próton, neutron, etc)
$$B^\dagger_\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}\, \Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_\alpha\, q^\dagger_{\mu_1}\, q^\dagger_{\mu_2}\, q^\dagger_{\mu_3} \tag{1}$$
Na Eq. (1) há soma (e/ou integração) sobre índices repetidos, Ψ é a função de onda e α é o índice associado aos números quânticos do bárion.

   (a) **Mostre que**:
$$q_\alpha\, q^\dagger_{\mu_1} \cdots q^\dagger_{\mu_n} = (-)^n\, q^\dagger_{\mu_1} \cdots q^\dagger_{\mu_n}\, q_\alpha + \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{\alpha\,[\,\mu_1}\; q^\dagger_{\mu_2} \cdots q^\dagger_{\mu_n]} & \text{, n ímpar} \\ \delta_{\alpha\,\{\,\mu_1}\; q^\dagger_{\mu_2} \cdots q^\dagger_{\mu_n\}} & \text{, n par} \end{array} \right.$$
   onde os símbolos $[\ldots]$ e $\{\ldots\}$ nos índices acima significam simetrização ou antisimetrização, por exemplo para um operador $A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, fica
$$\begin{aligned} A_{[\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4]} &\equiv A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + A_{\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1} + A_{\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2} + A_{\mu_4\mu_1\mu_2\mu_3} \\ A_{\{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4\}} &\equiv A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} - A_{\mu_2\mu_3\mu_4\mu_1} + A_{\mu_3\mu_4\mu_1\mu_2} - A_{\mu_4\mu_1\mu_2\mu_3} \end{aligned}$$
   ou, por exemplo, para o produto de dois operadores
$$\begin{aligned} A_{[\mu_1}\, B_{\mu_2]} &\equiv A_{\mu_1}\, B_{\mu_2} + A_{\mu_2}\, B_{\mu_1} \\ A_{\{\mu_1}\, B_{\mu_2\}} &\equiv A_{\mu_1}\, B_{\mu_2} - A_{\mu_2}\, B_{\mu_1} \,. \end{aligned}$$

   (b) **Mostre que**:
$$\{B_\alpha, B^\dagger_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}$$
   onde
$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} &= \Psi^{*\mu_1\mu_2\mu_3}_\alpha\; \Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_\beta \\ \Delta_{\alpha\beta} &= 3\,\Psi^{*\mu_1\mu_2\mu_3}_\alpha\; \Psi^{\mu_1\mu_2\nu_3}_\beta\; q^\dagger_{\nu_3}\, q_{\mu_3} - \frac{3}{2}\Psi^{*\mu_1\mu_2\mu_3}_\alpha\; \Psi^{\mu_1\nu_2\nu_3}_\beta\; q^\dagger_{\nu_3}\, q^\dagger_{\nu_2}\, q_{\mu_2}\, q_{\mu_3} \,. \end{aligned}$$
   Lembrete: a função de onda Ψ do bárion é antissimétrica nos índices de quarks, isto é,
$$\Psi^{\mu_1\mu_2\mu_3}_\alpha = \Psi^{\mu_2\mu_3\mu_1}_\alpha = \Psi^{\mu_3\mu_1\mu_2}_\alpha = -\Psi^{\mu_2\mu_1\mu_3}_\alpha = -\Psi^{\mu_1\mu_3\mu_2}_\alpha = -\Psi^{\mu_3\mu_2\mu_1}_\alpha \,.$$

6. **Mostre que** para dois operadores A e B,
$$\begin{array}{ll} (a) \qquad\qquad & \det\left[\,\exp A\right] = \exp\left[\mathrm{Tr} A\right] \\ (b) \qquad\qquad & \det\left[\,B\,\right] = \exp\left[\mathrm{Tr}\ln B\right] \end{array}$$
Dica: considere que o operador A satisfaz uma equação de autovalores: $A|i\rangle = a_i|i\rangle$.

7. **Estados Coerentes**

Para este exercício, as seguintes identidades podem ser úteis.

- Sejam A e B dois operadores satisfazendo as condições
$$[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$$
então as seguintes expressões são verdadeiras
$$(i) \qquad [A, e^B] = [A,B]\, e^B$$
$$(ii) \qquad e^A\, e^B = e^{[A,B]} e^B\, e^A$$
$$(iii) \qquad e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A\, e^B$$
- $\langle\, Q'|\exp\left[-\alpha\frac{d}{dQ}\right]|0\,\rangle = \exp\left[-\alpha\frac{d}{dQ'}\right]\langle\, Q'|0\,\rangle = \langle\, Q'-\alpha|0\,\rangle$

Considere um estado coerente $|\lambda\,\rangle$ definido por
$$a|\lambda\,\rangle = \lambda\,|\lambda\,\rangle \tag{2}$$
com
$$|\lambda\,\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}\, e^{\lambda\, a^\dagger}|0\,\rangle\,. \tag{3}$$

(a) Mostre que o chamado *operador deslocamento* $D(\lambda)$, definido como
$$D(\lambda) = e^{\lambda\, a^\dagger - \lambda^*\, a} \tag{4}$$
ao ser aplicado sobre o estado de vácuo $|0\,\rangle$ gera o estado o estado coerente (3), isto é, desloca o vácuo: $|0\,\rangle \to |\lambda\,\rangle$.

(b) Mostre que o operador deslocamento (4), satisfaz a seguinte relação de composição
$$D(\alpha+\beta) = \exp\left[\frac{1}{2}\,(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)\right]\, D(\alpha)\, D(\beta)\,.$$

(c) Calcule os seguintes valores esperados:
$$\langle Q\rangle_\lambda = \langle\,\lambda|Q|\lambda\,\rangle \quad ; \quad \langle Q^2\rangle_\lambda = \langle\,\lambda|Q^2|\lambda\,\rangle \quad ; \quad \langle P\rangle_\lambda = \langle\,\lambda|P|\lambda\,\rangle \quad ; \quad \langle P^2\rangle_\lambda = \langle\,\lambda|P^2|\lambda\,\rangle\,.$$

(d) Mostre que o estado coerente gera uma incerteza mínima, isto é,
$$\Delta Q\,\Delta P = \frac{1}{2}\,.$$
Dica: a incerteza de um operador A é obtida por $\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$. Use o resultado de **(c)**.

(e) Mostre que a representação em posição do estado coerente $\langle\, Q'|\lambda\,\rangle$ é
$$\langle\, Q'|\lambda\,\rangle = \pi^{-1/4}\,\exp\left[-\frac{1}{2}(Q'-q)^2 + ip(Q'-q/2)\right]\,,$$
onde
$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\lambda^* + \lambda) \qquad ; \qquad p = \frac{i}{\sqrt{2}}\,(\lambda^* - \lambda)$$

8. **Mecânica Quântica Supersimétrica**

Na Mecânica Quântica, uma técnica usual de resolver problemas é pelo *método de fatorização* em termos de operadores de criação e destruição.

Na física de partículas, a supersimetria (usualmente abreviada como SUSY de **SU**per**SY**mmetry) é uma simetria que relaciona uma partícula fundamental com um certo valor de spin com outras partículas com spins diferentes por meia unidade. Em uma teoria com essa simetria, para cada bóson existe um férmion correspondente com a mesma massa e mesmos números quânticos internos, e vice-versa.

A introdução da supersimetria para estudar sistemas quânticos pode ser entendida como uma forma direta de generalizar o método de fatorização [1]-[3].

Seja o Hamiltoniano do oscilador harmônico simples (bosônico)

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger \, a + \frac{1}{2} \right) \, , \tag{5}$$

onde $[a, a^\dagger] = 1$, tem como autovalores de energia

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Considere, agora o Hamiltoniano de um oscilador harmônico fermiônico, é dado por

$$H_f = \hbar\omega \left(b^\dagger \, b - \frac{1}{2} \right) \, , \tag{6}$$

onde $\{b, b^\dagger\} = 1$ e tem como autovalores de energia

$$E_{n_f} = \hbar\omega \left(n_f - \frac{1}{2} \right) \, .$$

onde os únicos valores para n_f são $n_f = 0$ ou $n_f = 1$.

Um Hamiltoniano supersimétrico pode ser definido a partir de (5) e (6)

$$H_{susy} = H + H_f = \hbar\omega \left(a^\dagger \, a + b^\dagger \, b \right) \, . \tag{7}$$

e tem como autovalores de energia

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + n_f \right) \, .$$

É importante observar que todos os estados são duplamente degenerados, exceto o estado fundamental, onde $n = n_f = 0$.

Em Mecânica Quântica uma degenerescência indica a existência de uma simetria, que neste caso é a supersimetria:

a energia ϵ_n não muda quando <u>simultaneamente</u> se

cria um bóson $n \to n + 1$	e	destrói um férmion $n_f \to n_f - 1$
	<u>ou</u>	
cria um férmion $n_f \to n_f + 1$	e	destrói um bóson $n \to n - 1$

Definindo os geradores da supersimetria como

$$Q^- \equiv \sqrt{\hbar\omega}\, a^\dagger\, b \qquad ; \qquad Q^+ \equiv \sqrt{\hbar\omega}\, b^\dagger\, a\,. \tag{8}$$

(a) Mostre que estes operadores satisfazem a *superálgebra* :

$$\begin{aligned} &\{Q^-, Q^+\} = H_{susy} \qquad ; \qquad [Q^-, H_{susy}] = [Q^+, H_{susy}] = 0 \\ &\left(Q^-\right)^2 = \left(Q^+\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Uma possível representação matricial para os operadores fermiônicos b e $b^\dagger$ é

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad b^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

(b) Mostre que

$$\begin{aligned} Q^- &= \sqrt{\hbar\omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad Q^+ = \sqrt{\hbar\omega} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{susy} &= \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

onde $H_+ = \hbar\,\omega\, a a^\dagger$ e $H_- = \hbar\,\omega\, a^\dagger\, a$ são chamados de *parceiros supersimétricos.*

(c) Mostre que a representação matricial (11) satisfaz a superálgebra (9).

Considere que cada um dos Hamiltonianos, parceiros supersimétricos, possua uma equação de autovalores:

$$H_+|n;+\rangle = E_n^{(+)}|n;+\rangle \qquad ; \qquad H_-|n;-\rangle = E_n^{(-)}|n;-\rangle \tag{12}$$

usando o fato que $H_+\, a = a\, H_-$ e $H_-\, a^\dagger = a^\dagger\, H_+$,

(d) Mostre que

$$\begin{aligned} E_n^{(-)} &= E_{n-1}^{(+)} \\ |n;-\rangle &\propto a^\dagger|n-1;+\rangle \end{aligned} \tag{13}$$

[1] M. de Crombrugghe and V. Rittenberg, Annals of Physics 151, 99 (1983).
[2] *Supersimetria aplicada à Mecânica Quântica*, Elso Drigo Filho. Editora Unesp (2009).
[3] Elso Drigo Filho, Braz. Jour. Phys. 22, 45 (1992).