(Mini) Apostila
de
Teoria de Grupos

Dimiter Hadjimichef

Porto Alegre
2012

1. Teoria de Grupos

1.1 Muitas definições...

■ **Definição 1:** *Grupo*
Um conjunto $G = \{a, b, c, \ldots\}$ é dito formar um grupo se existir uma operação "$\cdot$", chamada de *multiplicação de grupo* que associa a qualquer par (ordenado) de elementos $a, b \in G$ com o produto

$$a \cdot b \in G \ , \quad \text{(o grupo é fechado frente à multiplicação)}$$

tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. A operação "$\cdot$" é associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. Entre os elementos de G existe o elemento identidade e, que tem a propriedade $a \cdot e = a$.
3. Para cada $a \in G$ existe um elemento inverso $a^{-1} \in G$, com a propriedade $a \cdot a^{-1} = e$.

Agora podemos a partir desta definição completamente geral estudar alguns exemplos específicos.

⊛ **Exemplo 1:** O grupo mais simples que existe é $G = \{e\}$ (lembrando que e é a identidade). É fácil ver que as 3 condições de grupo são trivialmente satisfeitas: o inverso de e^{-1} é e. O produto $e \cdot e = e$, ou seja, é fechado frente à multiplicação. O número 1 da multiplicação usual, é um exemplo deste grupo trivial. Este grupo é chamado de C_1.

⊛ **Exemplo 2:** O próximo grupo simples é $G = \{e, a\}$. Vemos imediatamente que

$$e \cdot e = e \quad ; \quad e \cdot a = a \cdot e = a \, .$$

Agora, quanto vale $a \cdot a$? Para ser um grupo este produto deve resultar num elemento de G, isto é,

$$a \cdot a = e \qquad \text{ou} \qquad a \cdot a = a\,.$$

A segunda possibilidade é falsa, vejamos o que ocorre se multiplicarmos tudo por a^{-1}

$$\underbrace{a^{-1} \cdot (a \cdot a)}_{=a} = \underbrace{a^{-1} \cdot a}_{e}\,,$$

ou seja, encontramos uma contradição $a = e$. Logo concluimos que a opção correta é $a{\cdot}a = e$.

Os números 1 e -1 associados a multiplicação usual é um exemplo elementar deste tipo de grupo, denominado de C_2. Estes grupos C_n são chamados de *grupos cíclicos.*

Muitas vezes os grupos são representados por *tabelas de multiplicação.*

Tab. 1.1: *Tabela* C_2

	e	a
e	e	a
a	a	e

Tab. 1.2: *Tabela* C_3

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

■ **Definição 2:** *Grupo Abeliano*

Um grupo G é chamado de *abeliano* quando a multiplicação de grupo é comutativa:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

■ **Definição 3:** *Ordem de um Grupo*

A ordem de um grupo é o número de elementos do grupo (quando é finito).

Por exemplo, os grupos cíclicos C_n são abelianos e de ordem n.

■ **Definição 4:** *Subgrupo*

Um subconjunto H de um grupo G, que forma um grupo sob a mesma lei de multiplicação que G, é dito formar um *subgrupo* de G.

Nos exemplos anteriores C_1 é um subgrupo de C_2 e C_3.

■ **Definição 5:** *Elementos Conjugados*

Um elemento $b \in G$ é dito conjugado a $a \in G$ se existir um outro elemento $g \in G$ tal que

$$b = g\,a\,g^{-1}\,.$$

Assim,

$$b \sim a\,,$$

onde $\sim$ é o símbolo de conjugação.

■ **Definição 6:** *Classe Conjugada*

Elementos de um grupo que são conjugados entre si formam uma classe conjugada.

■ **Definição 7:** *Subgrupo Conjugado*

Se H for um subconjunto de G e $g \in G$, então,

$$H' = \{g\, h\, g^{-1}\}\,,$$

com $h \in H$, também forma um subconjunto de G. Dizemos que H' é um subgrupo conjugado de H.

■ **Definição 8:** *Subgrupo Invariante*

Um subgrupo de H é dito invariante quando

$$g\, h\, g^{-1} = h\,,$$

com $h \in H$ e $g \in G$.

⊛ **Exemplo 3:** O grupo $H = \{e, a^2\}$ é um subgrupo invariante de $C_4 = \{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$. Isto pode ser verificado calcundo $g\, h\, g^{-1}$ para ver se é igual a h. Assim, vamos testar os elementos de H, para cada um dos elementos de C_4. Primeiro para o elemento a

$$a\, e\, a^{-1} = e \quad ; \quad a\, a^2\, a^{-1} = a^2\,.$$

O próximo será para o elemento a^2

$$a^2\, e\, a^{-2} = e \quad ; \quad a^2\, a^2\, a^{-2} = a^2\,.$$

O seguinte

$$a^3\, e\, a^{-3} = e \quad ; \quad a^3\, a^2\, a^{-3} = a^2\,.$$

O último

$$a^4\, e\, a^{-4} = e \quad ; \quad a^4\, a^2\, a^{-4} = a^2\,.$$

■ **Definição 9:** *Subgrupo Abeliano*

Todos os subgrupos do grupo abeliano são invariantes.

■ **Definição 10:** *Subgrupo Invariante Trivial*

Todos grupo G tem ao menos dois subgrupos invariantes triviais:

$$\{e\} \qquad ; \qquad \text{e o próprio } G\,.$$

■ **Definição 11:** *Grupos Simples e Semi-Simples*

Um grupo é *simples* se ele não contem qualquer subgrupo invariante não-trivial.
Um grupo é *semi-simples* se ele não contem qualquer subgrupo abeliano invariante.

■ **Definição 12:** *Homomorfismo*

Um *homomorfismo* é um mapeamento entre grupos

$$G \longrightarrow G'\,,$$

não necessariamente um-para-um, que preserva a multiplicação de grupo.

■ **Definição 13:** *Isomorfismo*

Um *homomorfismo* é um mapeamento entre grupos

$$G \longrightarrow G' ,$$

onde há uma correspondência um-para-um

$$g_i \longleftrightarrow g'_i ,$$

($g_i \in G$ e $g'_i \in G'$), entre os elementos do grupo, preservando a multiplicação de grupo.

■ **Definição 14:** *Grupos Contínuos*

Muitas aplicações na Física, apresentam grupos com um número de elementos, infinito e não-enumerável. Estes são chamados de *grupos contínuos*.

■ **Definição 15:** *Grupos Matriciais*

Qualquer conjunto de matrizes $N \times N$, que possuem inversa e são fechadas sob a multiplicação matricial forma um *grupo matricial*.

⊛ **Exemplo 4:** *Alguns exemplos importantes:*

1. **Grupo linear geral** $GL(N)$, consistindo de todas as matrizes $N \times N$, que possuem inversa e são fechadas sob a multiplicação matricial.

2. **Grupo ortogonal** $O(N)$, consistindo de todas as matrizes $N \times N$, reais e ortogonais: $O\, O^T = 1$.

3. **Grupo unitário** $U(N)$, consistindo de todas as matrizes $N \times N$, unitárias: $U\, U^\dagger = 1$.

4. **Grupo unitário especial** $SU(N)$, consistindo de todas as matrizes $N \times N$, unitárias e de determinantes iguais a 1.

Obs: $SU(N)$ e $O(N)$ são subgrupos de $U(N)$, sendo que $U(N)$ é subgrupo de $GL(N)$.

■ **Definição 16:** *Grupos de Produto Direto*

Sejam H_1 e H_2 subgrupos do grupo G com as seguintes propriedades

1. Cada elemento $h_1 \in H_1$ comuta com cada elemento $h_2 \in H_2$:

$$h_1\, h_2 = h_2\, h_1\,.$$

2. Cada elemento $g \in G$ pode ser escrito univocamente como

$$g = h_1\, h_2\,.$$

Neste caso, G é dito ser o produto direto de H_1 e H_2 :

$$G = H_1 \otimes H_2\,.$$

▲ **Teorema 1:** *Se $G = H_1 \otimes H_2$, então tanto H_1 quanto H_2 devem ser subgrupos invariantes de G.*

▼ ***Prova*** Sabemos que

$$\begin{aligned} &(1)\;\; g = h_1\, h_2 \\ &(2)\;\; h_1, \quad h_1', \quad (h_1\, h_1'\, h_1^{-1}) \quad \in H_1 \\ &(3)\;\; h_2 \in H_2 \end{aligned}$$

Assim, lembrando que h_1 e h_2 comutam, temos que

$$g\, h_1'\, g^{-1} = (h_1\, h_2)\, h_1'\, (h_2^{-1}\, h_1^{-1}) = h_1\, h_1'\, h_1^{-1} \;\in\; H_1\,.$$

Logo, H_1 deve ser um subgrupo invariante de G. O mesmo argumento vale para H_2.

1.2 Representações de Grupos

Em aplicações na geometria e na Física, a Teoria de Grupos está profundamente relacionada com as transformações de simetria dos sistemas. Em geral, há um espaço vetorial linear tomado como a estrutura matemática formal da teoria física em questão. O interesse da da Teoria de Grupos, portanto reside na chamada *realização* das transformações de grupo como transformações lineares em espaços vetoriais. Tanto em Mecânica Clássica, quanto em Mecânica Quântica temos

Transformações de Grupo	*realização* $\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$	Transformações lineares em Espaços Vetoriais

1.2.1 Representações de um Grupo

Se existir um homomorfismo de um grupo G a um grupo de operador $U(G)$ de um espaço vetorial V dizemos

$$\boxed{U(G) \text{ forma uma representação do grupo } G}$$

Também notamos que a dimensão da representação é a dimensão do espaço vetorial V. A representação pode ser de dois tipos

1. *fiel*, se além de homomorfismo, ela também é um isomorfismo.

2. *degenerada*, se ela não for fiel.

De outra forma: uma representação é um mapeamento

$$g \in G \quad \xrightarrow{U} \quad U(g)\,,$$

onde $U(g)$ é um operador atuando em V, tal que

$$U(g_1)\,U(g_2) \; = U(g_1, g_2)\,,$$

isto é, os operadores da representação satifazem as mesmas regras de multiplicação que os elementos do grupo original. O próximo passo consiste em escolher uma base de vetores que pertence a V

$$\{\ |e_i\rangle\ \} \quad ; \quad (i = 1, 2, \ldots n)\,.$$

Os operadores $U(g)$ são, então realizados como matrizes $N \times N$, chamadas $D(g)$, da seguinte forma

$$U(g)|e_i\rangle = \sum_{j=1}^{N} |e_j\rangle \, D_{ji}(g)\,.$$

Também vemos que a aplicação de duas transformações sobre um estado resulta em

$$\begin{aligned} U(g_1)\,U(g_2)|e_i\rangle &= \sum_j U(g_1)|e_j\rangle \, D_{ji}(g_2) = \sum_k |e_k\rangle \underbrace{\left(\sum_j D_{kj}(g_1)\, D_{ji}(g_2) \right)}_{D_{ki}} \\ &= \sum_k |e_k\rangle \, D_{ki}(g_1, g_2)\,. \end{aligned}$$

Desta forma concluimos que

$$D(g_1)\,D(g_2) = D(g_1, g_2)\,,$$

onde a multiplicação matricial está implícita. O grupo de matrizes $D(G) = \{D(g),\, g \in G\}$ obedece a mesma álgebra que $U(G)$ e é chamada de

$$\boxed{\text{Representação matricial do grupo } G}$$

Duas representações de um grupo G são chamadas de *equivalentes* se elas estiverem relacionadas por uma transformação de similaridade

$$U'(G) = S\,U(G)\,S^{-1}\,,$$

onde S é um operador em V. O chamado *caráter* $\chi(g)$ de uma representação $U(g)$, para $g \in G$, é definida por

$$\chi(g) = \operatorname{Tr} U(g) = \sum_i D_{ii}(g)\,.$$