UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Lista n° 1 - FIP10402 - Física de Partículas e Campos: Teoria Quântica de Campos II
Prof. Dimiter Hadjimichef

QUESTÕES

A conveção da métrica é $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$

1. Considere a densidade lagrangiana de um campo escalar $\phi(x)$ dada por

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mu\, U(\vec{x})\, \phi^2(x) \tag{1}$$

onde μ é a massa, $\mathcal{L}_0$ é densidade lagrangiana do campo escalar livre e $U(\vec{x})$ é um potencial estático externo.

(a) Mostre que a equação de movimento é dada por

$$\left(\Box + \mu^2\right) \phi(x) = 2\mu\, U(\vec{x})\, \phi(x)\,.$$

(b) Mostre que, em ordem mais baixa, o elemento da matriz-S para um bóson incidente, com 4-momento inicial $k_i = (\omega_i, \vec{k}_i)$, espalhado para um estado com 4-momento $k_f = (\omega_f, \vec{k}_f)$ é dado por

$$\langle\, \vec{k}_f |\, S^{(1)} | \vec{k}_i \,\rangle = \frac{i\, 2\pi\, \delta(\omega_f - \omega_i)}{(2V\omega_i)^{1/2}(2V\omega_f)^{1/2}}\, 2\,\mu\, \bar{U}(\vec{k}_f - \vec{k}_i)$$

onde

$$\bar{U}(\vec{q}) = \int d^3\, x\, U(\vec{x})\, e^{-i\,\vec{q}\cdot\vec{x}}\,.$$

2. No espalhamento de um elétron por um núcleo infinitamente pesado, o núcleo foi tratado como uma carga pontual e obtivemos a seção de choque de Mott:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \frac{(\alpha\, Z)^2}{4\, E^2\, v^4\, \mathrm{sen}^4(\theta/2)} \left[\, 1 - v^2\, \mathrm{sen}^2(\theta/2) \,\right]\,. \tag{2}$$

Numa situação mais realística poderíamos tratar o núcleo como uma distribuição esférica carga $Z\, e\, \rho(r)$, com

$$\int d^3 r\, \rho(r) = 1\,.$$

(a) Mostre que neste caso a seção de choque fica

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M |F(\,\vec{q}\,)|^2 \tag{3}$$

onde $Z\, e\, F(\,\vec{q}\,)$ é a transformada de Fourier da distribuição de carga e $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ (com $\vec{p}_i$, $\vec{p}_f$ sendo o momento inicial e final do elétron).

(b) O $F(\vec{q})$ é chamado de *fator de forma*. Mostre que ele é uma função de $|\vec{q}|^2$ apenas e que o raio quadrático médio r_m da distribuição de carga é dado por

$$r_m = -6\,\frac{dF(\vec{q})}{d(|\vec{q}|^2)}\Big|_{|\vec{q}|=0}\,.$$

3. Considere o espalhamento elástico $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ numa energia muito alta onde pode-se desprezar a massa do elétron em todo cálculo. Mostre que a seção de choque diferencial para este processo, no referencial onde o múon está inicialmente em repouso, é dado por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \left[1 + \frac{2E}{m_\mu}\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1} \left[1 - \frac{q^2}{2m_\mu^2}\tan^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{4}$$

onde o 4-momento q^2 trocado pelo fóton é dado por

$$q^2 = -4\,E\,E'\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\,,$$

sendo E,E' as energias inicial e final do elétron; θ o ângulo pelo qual o elétron é espalhado; $(d\sigma/d\Omega)_M$ a seção de choque de Mott (2) no caso relativístico extremo $v \to 1$ (também considerando $Z = 1$).

4. O método do exercício anterior pode ser usado para espalhamento elétron-próton, pela substituição do fator de vértice $i\,e\,\gamma^\alpha$ do múon por

$$-ie\left[\gamma^\alpha\,F_1(q^2) + \frac{\kappa_p}{2m_p}\,F_2(q^2)\,i\sigma^{\alpha\beta}q_\beta\right] \tag{5}$$

onde q é o 4-momento transferido do elétron e κ_p o momento magnético anômalo do próton (em unidades de magneton nuclear). Os $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ são os fatores de forma representando a estrutura interna do próton, com $F_1(0) = F_2(0) = 1$, tal que $\vec{q} \to 0$ o próton estacionário interagindo com campos elétricos e magnéticos estáticos tem as interações eletromagnéticas corretas.

Mostre que no referencial do laboratório, com o próton inicialmente em repouso a seção de choque diferencial elástica para o espalhament de elétrons de energia $E\,(>> m_e)$ é dada pela seção de chque de Rosenbluth

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M \left[1 + \frac{2E}{m_\mu}\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1} \\ &\times\left\{\left[F_1^2(q^2) - \frac{\kappa_p^2}{4m_p^2}\,q^2\,F_2^2(q^2)\right] - \frac{q^2}{2m_\mu^2}\left[\,F_1(q^2) + \kappa_p\,F_2(q^2)\,\right]^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right\}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

com $Z = 1$ e $v = 1$.

5. Mostre que a seção de choque diferencial no centro de massa para o espalhamento elétron-elétron em altas energias $(E >> m_e)$ é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\alpha^2}{8E^2}\left[\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\mathrm{sen}^4(\theta/2)} + \frac{2}{\mathrm{sen}^2(\theta/2)\,\cos^2(\theta/2)} + \frac{1+\mathrm{sen}^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)}\right] \tag{7}$$