Área III - série 6 - FIS01208 - Semestre 2010/1

Última lista!!!

1.) Um elétron em um campo coulombiano de um próton está em um estado descrito pela função de onda:

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} e^{-\alpha^2 r^2/2}.$$

Escreva a expressão que dá a probabilidade de se encontrar o elétron no estado fundamental do átomo de Hidrogênio. (*Essa expressão pode ser uma função erro!*)

2.) Um elétron em um campo coulombiano de um próton está em um estado descrito pela função de onda:

$$\Psi(\mathbf{r}) = A\left[4\psi_{410} + 3\psi_{211} - \psi_{210} + \sqrt{10}\psi_{21-1}\right].$$

a) Qual é o valor esperado da energia?
b) Esse estado é estacionário? Justifique matematicamente sua resposta.
c) Qual é o valor esperado de $\mathbf{L}^2$?
d) Qual é o valor esperado de L_z?
e) Em $t = \tau$ faz-se uma medida de L_z obtendo-se $L_z = 0$. Qual é a evolução temporal do sistema para $t > \tau$?

Admito que o exercício 3.) abaixo é um tanto complicado pelo que vimos em aula. Embora seja um problema sugerido no livro de Física Matemática do George Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* [problema 13.2.9, 2^a edição], eu o estou retirando da lista.
3.) Mostre que para um estado estacionário do átomo de Hidrogênio, o valor esperado de r e $1/r$ são dados por:

$$\langle r \rangle = \frac{a_0}{2}\left[3n^2 - l(l+1)\right].$$

$$\langle 1/r \rangle = \frac{1}{n^2 a_0}.$$

sendo a_0 o raio de Bohr.

4.) A função de onda de uma partícula é dada por

$$\Psi(r,\theta,\phi) = Af(r)\sum_{l,m} C_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi).$$

a) Encontre a constante de normalização A.
b) Calcule a probabilidade de uma medida de L_z resultar $3\hbar$.

5.) Dado o estado inicial do átomo de Hidrogênio, $\Psi = a\psi_{\mathbf{n}} + b\psi_{\mathbf{n}'}$ com a e b constantes e $|a|^2 + |b|^2 = 1$, calcule o valor esperado de $\mathbf{r}(t)$ definido por:

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \int dV\, \Psi^*(\mathbf{r},t)\ \mathbf{r}\ \Psi(\mathbf{r},t)$$

e determine as condições sobre $\Delta l = l - l'$ e $\Delta m = m - m'$ tal que $|\langle \mathbf{r}(t) \rangle|^2 \neq 0$. (Atente-se para a notação $\mathbf{n} = nlm$).
Dica: use a igualdade abaixo e escreva x, y e z em coordenadas esféricas e depois use os harmônicos esféricos.

$$|\langle \mathbf{r} \rangle|^2 = \frac{1}{2}\left\{|\langle x + iy \rangle|^2 + |\langle x - iy \rangle|^2\right\} + |\langle z \rangle|^2.$$

6.) Considere um elétron movendo-se em uma região de campo magnético uniforme B_0, descrito por:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

onde $\mathbf{A} = (-B_0 y, 0, 0)$ e o Hamiltoniano para o elétron é dado por:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2.$$

Encontre os autovalores de energia do sistema.