Aulas - FIS02016

basilio.santiago

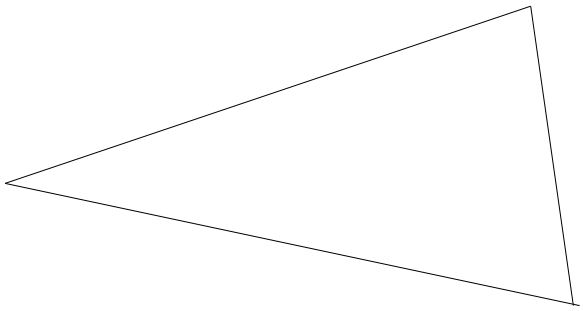
March 2020

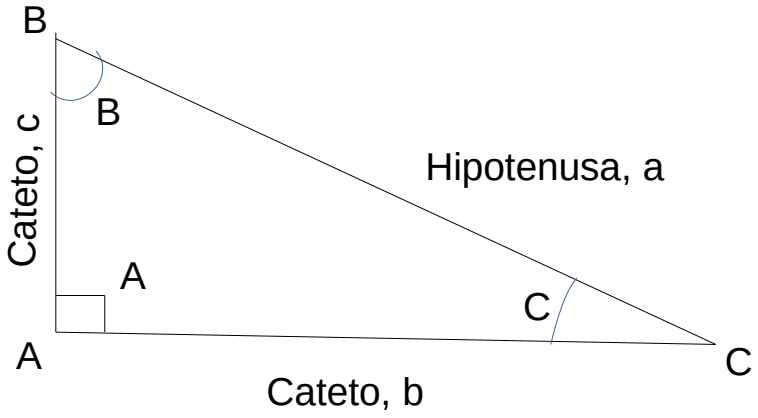
1 Revisão de Trigonometria Plana

Comecemos pela revisão de triângulos planos. São figuras com três lados, que são segmentos de retas, três vértices, onde cada par de lados se encontra, e três ângulos, formados em cada vértice pelos lados que ali se encontram.

A Figura abaixo mostra dois triângulos. O de cima é um triângulo qualquer, com três lados de comprimentos diferentes (triângulo escaleno), mas sendo que dois deles têm quase o mesmo comprimento (se fossem de comprimentos iguais, aí o triângulo seria isósceles).

O triângulo de baixo é chamado de triângulo retângulo, pois um de seus ângulos (no vértice A) é reto, tem 90^o. O lado oposto ao ângulo reto é o lado maior do triângulo e se chama hipotenusa, com comprimento a. Os outros dois lados do triângulo são chamados de catetos, com dimensões b e c.




B
B
Cateto, c
Hipotenusa, a
A
C
A
C
Cateto, b

Chamemos de A, B e C não apenas os vértices opostos aos lados a,b,c, mas também os ângulos do triângulo nesses vértices, conforme mostrado (onde o ângulo $A = 90^o$). Então podemos definir algumas funções trigonométricas:

$$senB = \frac{b}{a}$$

$$cosB = \frac{c}{a}$$

$$tanB = \frac{b}{c} = \frac{senB}{cosB}$$

$$senC = \frac{c}{a}$$

$$cosC = \frac{b}{a}$$

$$tanC = \frac{c}{b} = \frac{senC}{cosC}$$

Ou seja, o seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. O cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. E a tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e o adjacente. Podemos também definir a cotangente, como:

$$cotgB = \frac{c}{b} = \frac{cosB}{senB} = \frac{1}{tanB}$$

$$cotgC = \frac{b}{c} = \frac{cosC}{senC} = \frac{1}{tanC}$$

Ou seja, a cotangente é a razão entre o cateto adjacente e o oposto.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, reto ou não, é 180^o. Ou seja, no caso do nosso triângulo retângulo sabemos que

$$A + B + C = 180^o \ \rightarrow \ B + C = 90^o$$

A segunda igualdade decorre do fato de que $A = 90^o$. Então, como a soma de B e C é um ângulo reto, então dizemos que B e C são complementares. E no caso de ângulos complementares, podemos constatar que

$$senB = cosC$$

$$cosB = senC$$

Além disso, o teorema de Pitágoras nos diz que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$1 = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2$$

$$sen^2B + cos^2B = sen^2C + cos^2C = 1$$

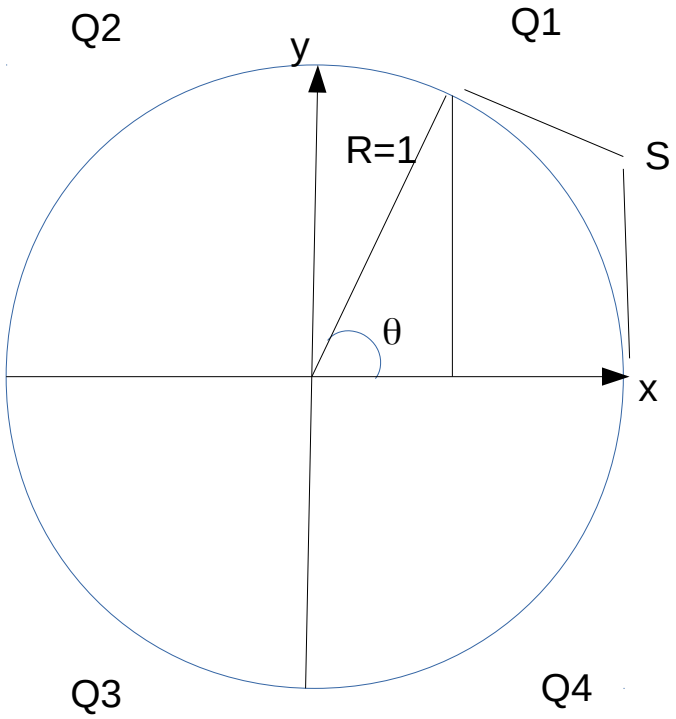
2 Círculo trigonométrico

Já a próxima figura mostra o círculo trigonométrico. Ele é um círculo de raio $R = 1$ cujo centro é a origem de um sistema cartesiano de coordenadas (x, y), sendo o eixo x orientado na horizontal e com valor positivo para direita. Já o eixo y é orientado na vertical e tem valor positivo para cima. Os eixo cartesianos definem então quatro quadrantes, Q1, Q2, Q3 e Q4. Podemos varrer todo o círculo variando o ângulo θ, que é uma coordenada polar que tem zero no eixo x positivo e cresce no sentido anti-horário. Então os domínios de θ em cada quadrante são

$$Q1 : 0^o \leq \theta \leq 90^o$$

$$Q2 : 90^o \leq \theta \leq 180^o$$

$$Q3 : 180^o \leq \theta \leq 270^o$$


Q2
Q1
y
R=1
S
θ
x
Q3
Q4

$$Q4 : 270^o \leq \theta \leq 360^o$$

Note que o valor de θ=360^o, corresponde ao mesmo ponto inicial no círculo em que $\theta = 0^o$

É importante também constatar que formamos um triângulo retângulo ao projetar o raio do círculo no eixo x (ou no y). Neste caso, a hipotenusa corresponde ao raio do círculo, igual à unidade. Então $cos\theta$ é a simplesmente o segmento de reta projetado no eixo x e o $sen\theta$ é o segmento de reta projetado no eixo y.

Então, agora variando θ, podemos constatar que $cos0^o = 1$, $sen0^o = 0$, $cos90^o = 0$, $sen90^o = 1$, $cos180^o = -1$, $sen180^o = 0$, $cos270^o = 0$, $sen270^o = -1$, $cos360^o = cos0^o = 1$, $sen360^o = sen0^o = 0$

Colocado de outra forma os domínios de valores de seno e cosseno em cada quadrante são:

$$Q1 : 0 \leq cos\theta \leq 1; 0 \leq sen\theta \leq 1$$

$$Q2 : -1 \leq cos\theta \leq 0; 0 \leq sen\theta \leq 1$$

$$Q3 : -1 \leq cos\theta \leq 0; -1 \leq sen\theta \leq 0$$

$$Q4 : 0 \leq cos\theta \leq 1; -1 \leq sen\theta \leq 0$$

Há algumas outras fórmulas úteis envolvendo senos e cossenos de somas de ângulos:

$$sen(A + B) = senA\ cosB + senB\ cosA$$

$$sen(A - B) = senA\ cosB - senB\ cosA$$

$$cos(A + B) = cosA\ cosB - senA\ senB$$

$$cos(A - B) = cosA\ cosB + cosA\ cosB$$

Há na verdade uma grande quantidade de fórmulas relacionando as funções trigonométricas, as quais podem ser consultadas em textos específicos sobre Trigonometria Plana.

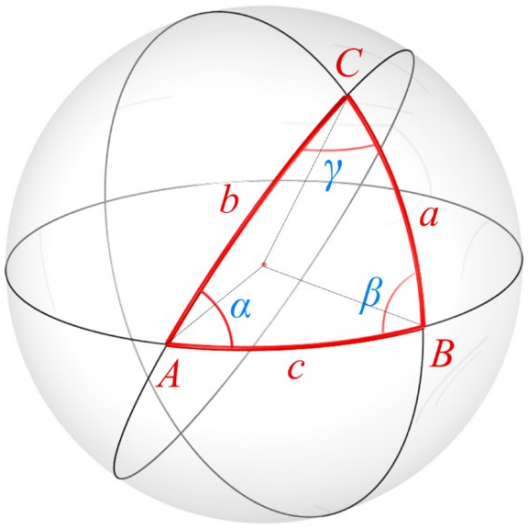
Outra observação importante é que, apesar de estarmos falando de medidas de ângulos em graus, a unidade mais natural para medir um ângulo é o radiano. Por que *mais natural*? Porque se olharmos a figura do círculo trigonométrico, vamos ver que todo ângulo na verdade é dado pela razão entre o arco de círculo S que ele contém e o raio desse círculo (R). Ou seja, qualquer ângulo $\theta = S/R$. Quando tomamos a razão, o ângulo estará então expresso em radianos. Ou seja, um ângulo em que

o arco S é igual ao raio R do círculo, tem valor de 1 radiano. Como a razão entre a circumferência do círculo e o seu raio é 2π, então sabemos que esse valor em radianos corresponde a 360^o. Ou seja, π radiano $= 180^o$. Já 90^o correspondem a $\pi/2$ radiano.

3 Trigonometria Esférica

Um triângulo esférico também é um polígono com três vértices, três ângulos e três lados. Mas é desenhado sobre a superfície de uma esfera e os seus lados são arcos de grandes círculos. Os grandes círculos dividem a superfície da esfera em duas metades, dois hemisférios, sendo também os arcos de menor distância entre os vértices do triângulo. A figura abaixo mostra um triângulo esférico de vértices A, B e C, ângulos internos α, β e γ e lados a, b e c. Note que os lados, por serem arcos de círculo, poderiam ser desenhados sobre um círculo trigonométrico. Podem ser, portanto, medidos como ângulos, usando como unidade graus ou radianos.

Há várias fórmulas associando lados e ângulos de um triângulo esférico. As mais importantes


C
γ
b
a
α
β
A
c
B

são as fórmulas dos quatro elementos e a analogia dos senos. Nas expressões abaixo faremos como no hipertexto, na página

http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm

e vamos chamar os lados de a,b e c, e os ângulos opostos a esses lados de A, B e C.

Fórmulas dos quatro elementos: 3 lados e 1 ângulo

$$cosa = cosb\ cosc\ +\ senb\ senc\ cosA$$
$$cosb = cosa\ cosc\ +\ sena\ senc\ cosB$$
$$cosc = cosa\ cosb\ +\ sena\ senb\ cosC$$

Fórmulas dos quatro elementos: 3 ângulos e 1 lado

$$cosA = -cosB\ cosC\ +\ senB\ senC\ cosa$$
$$cosB = -cosA\ cosC\ +\ senA\ senC\ cosb$$
$$cosC = -cosA\ cosB\ +\ senA\ senB\ cosc$$

Analogia dos senos

$$\frac{sena}{senA} = \frac{senb}{senB} = \frac{senc}{senC}$$

Uma característica muito importante de triângulos esféricos é que a soma de seus ângulos internos

não é mais necessariamente 180^o. Essa soma agora depende do triângulo, estando sempre contida no domínio $180^o < A + B + C < 540^o$ ou, equivalentemente, $\pi < A + B + C < 3\pi$ se exprimirmos os ângulos internos do triângulo em radianos.

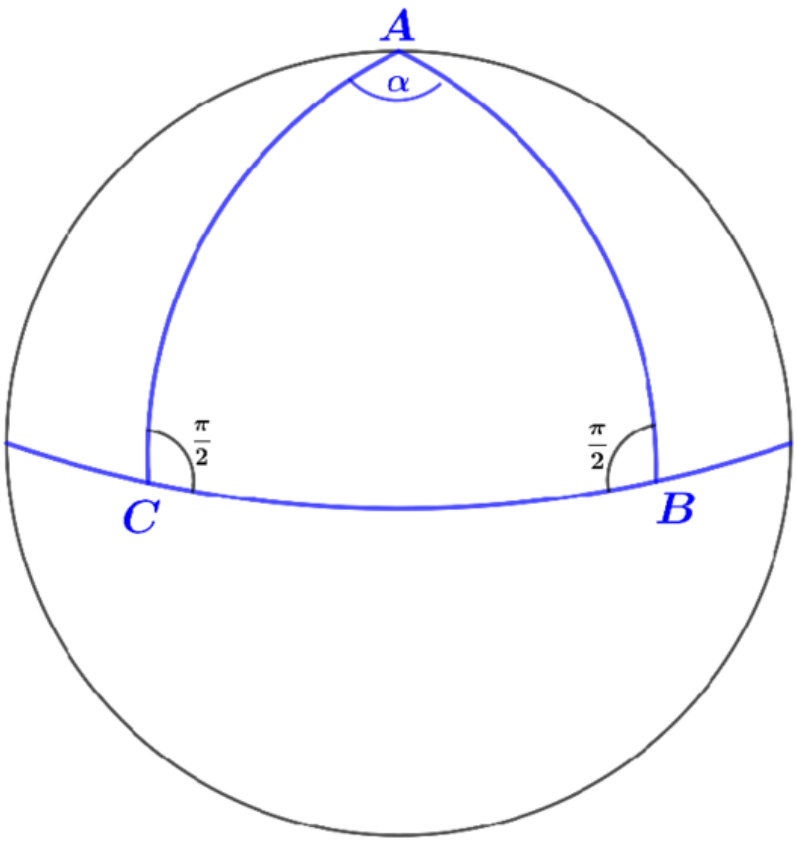
Isso significa que triângulos esféricos podem ter mais de um ângulo reto. Se apenas um ângulo interno é 90^o dizemos naturalmente que o triângulo esférico é retângulo. Se dois ângulos são retos, então o triângulos é bi-retângulo. E se $A = B = C = 90^o$, então temos o caso de um triângulo tri-retângulo.

Na figura mostrada abaixo vemos um exemplo de um triângulo esférico com dois ângulos retos, correspondentes aos vértices B e C. Se o ângulo α, no vértice A, for diferente de 90^o, então o triângulo é bi-retângulo. Se $\alpha = 90^o$, temos o caso de um tri-retângulo.

Podemos pensar que a figura abaixo corresponde à superfície da Terra, com o pólo norte geográfico em A e com B e C sobre o equador. Neste caso, os arcos que ligam A a B e A a C são arcos de meridiano. Já o arco que liga B a C é um arco sobre o equador geográfico. Assim, inevitável mesmo que os ângulos B e C sejam 90^o, pois os meridianos são

perpendiculares ao equador. E se a diferença de longitude entre os meridianos, medida pelo ângulo α, for 90^o, como dissemos antes, os três ângulos são retos e temos um caso de triângulo esférico tri-retângulo.

É conveniente pensar no triângulo da figura como representando a Terra, que é um caso familiar. Pois aí fica mais fácil também de analisar os lados desse triângulo. Sejam os lados sobre os meridianos. A medida do lado AC, por exemplo, é a diferença de latitude entre o pólo A e o ponto C sobre o equador. Mas isso equivale a $\Delta\phi$ = AC = b = 90^o. Representamos o lado AC como b pois ele é oposto ao vértice B. Então vemos que esse lado também é 90^o. O que torna o triângulo **retilátero**. Na verdade, ele é pelo menos **bi-retilátero**, pois o lado AB=c=90^o também. Isso pelo mesmo fato de que esse último lado liga o pólo a um ponto sobre o equador. Finalmente se o arco que liga B a C, sobre o equador, for 90^o, temos que o lado BC=a=90^o, o que tornaria o triângulo ao mesmo tempo tri-retângulo e tri-retilátero.


A
α
π/2
π/2
C
B