Aulas - FIS02016

basilio.santiago

June 2020

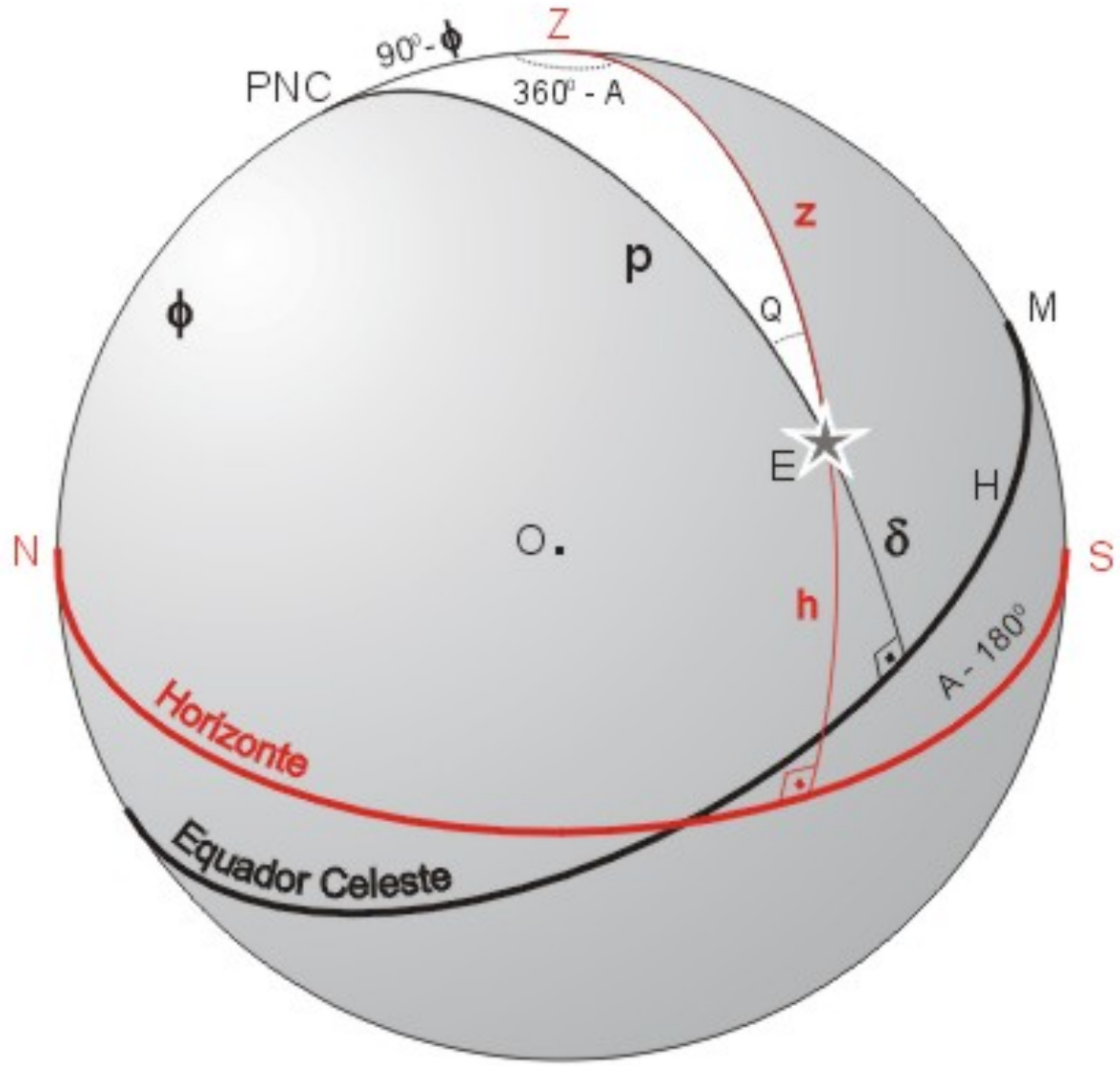
1 Triângulo Fundamental de uma estrela

Podemos então aplicar a Trigonometria Esférica ao estudo da Astronomia de Posição. Para isso, vamos examinar o triângulo fundamental de posição de uma estrela. Ele é mostrado na figura abaixo. Sues vértices são a própria estrela (E), o zênite do observador (Z) e o pólo celeste elevado para este observador (PNC). Os ângulos correspondentes a estes vértices são, respectivamente o ângulo paralático Q, $360^o - A$ e o ângulo horário da estrela H. Os lados opostos a estes vértices e ângulos são, $90^o - \phi$, $p = 90^o - \delta$ e $z = 90^o - h$.

Escrevendo as fórmulas de quatro elementos (para os 3 lados e 1 ângulo) e as analogias dos senos para este triângulo, temos então:

Fórmulas dos quatro elementos: 3 lados e 1 ângulo

$$senh = sen\delta \; sen\phi \; + \; cos\delta \; cos\phi \; cosH$$


Z
90° - ϕ
PNC
360° - A
z
p
ϕ
Q
M
E
H
N
O.
δ
S
h
A - 180°
Horizonte
Equador Celeste

$$sen\phi = senh\ sen\delta\ +\ cosh\ cos\delta\ cosQ$$
$$sen\delta = senh\ sen\phi\ +\ cosh\ cos\phi\ cosA$$

onde nas expressões acima usamos e abusamos do fato de que $cos(90^o - \theta) = sen\theta$ e $sen(90^o - \theta) = cos\theta$. Também usamos o fato de que $cos(360^o - \theta) = cos\theta$

Analogia dos senos

$$\frac{cos\phi}{senQ} = \frac{cosh}{senH} = -\frac{cos\delta}{senA}$$

onde novamente usamos que $sen(90^o - \theta) = cos\theta$ e $sen(360^o - \theta) = -sen\theta$

As expressões acima são gerais. Ou seja, valem para qualquer estrela, independentemente da sua declinação δ e de suas coordenadas horizontais A e h, para qualquer observador, seja qual for sua latitude ϕ, e para qualquer instante de tempo, caracterizado pelo ângulo horário H da estrela, ou alternativamente, pela hora sideral $S = H + \alpha$. Sendo α nessa última expressão, a ascensão reta da estrela.

Essas relações envolvem portanto, tanto as coordenadas horizontais quanto as equatoriais, da

estrela e do observador, sem falar nas medidas horárias (ou seja, de tempo).

As relações de passagem meridiana estudadas anteriormente configuram-se em casos particulares dessas relações mais gerais, conforme discutido no hipertexto da disciplina, na primeira das situações especiais descritas na página

http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast1.htm

Há outras situações específicas associadas ao triângulo fundamental de posição, as quais tornam este triângulo ou retilátero, ou retângulo, ou ambos. É o que veremos a seguir.

2 Nascer e ocaso da estrela

Neste caso, $h = 0^o \rightarrow z = 90^o$. O triângulo fundamental é retilátero, portanto. Fica fácil provar que as equações da Astronomia Esférica se simplificam bastante, pois temos que $senh = 0$ e $cosh = 1$.

Dessa forma teremos:

$$cosH = -tg\delta \; tg\phi$$

$$cosA = \frac{sen\delta}{cos\phi}$$

$$cosQ = \frac{sen\phi}{cos\delta}$$

$$senQ = senH\ cos\phi$$

$$senA = senH\ cos\delta$$

A primeira das equações acima é particularmente importante. Dada uma estrela de declinação δ e um observador de latitude ϕ, ao resolvê-la para o ângulo horário H, vamos encontrar os valores de H que correspondem ao nascer e ao por da estrela vista por aquele observador. A diferença entre esses dois valores nos dá o tempo que a estrela permanece acima do horizonte do observador. Há vários exercícios na lista 3 do curso que tratam desta questão.

A segunda equação acima nos dá onde sobre o horizonte (ou seja, com que azimute A) a estrela nasce e se põe. Novamente, esse é objeto recorrente nos exercícios de Astronomia Esférica.

Particularmente importantes são os problemas 9 e 10 daquela lista, que exploram o nascer e ocaso do

Sol nos momentos dos solstícios, quando há maior discrepância entre os intervalos de tempo do Sol acima e abaixo do horizonte.

3 Observador sobre o Equador Terrestre

Neste caso, a latitude do observador é $\phi = 0^o$. Outro caso de triângulo retilátero. Novamente, as equações se simplificam muito. Essa situação é abordada no exercício 7 da Lista 3.

Em particular, é importante constatar que neste caso o eixo de rotação é horizontal para o observador, ou seja, os pólos celestes coincidem com os pontos cardeais S e N. E então, os círculos diurno de todas as estrelas são perpendiculares ao horizonte e estão metade acima do mesmo e metade abaixo. E cada objeto passa 12h acima do horizonte e 12h abaixo. Note também que nos instantes de nascer e ocaso de uma estrela para este observador, o triângulo de posição da estrela é biretilátero.

4 Estrela no equador celeste

Último caso de lado igual a 90°. Assunto tratado em mais detalhe nos exercícios 14 e 27 da lista 3. É possível provar que essas estrelas passam 12h acima do horizonte e 12h abaixo do mesmo **independentemente da latitude ϕ do observador**. Também é fácil provar que essas estrelas nascem exatamente no ponto cardeal leste ($A = 90^o$) e se põem exatamente no ponto cardeal oeste ($A = 270^o$). Novamente, isso independe do observador.

5 Círculo das 6h e das 18h

Essa é a situação em que $H = 90^o = 6h$ ou $H = 270^o = 18h$. O triângulo fundamental de posição da estrela é então retângulo. A dedução das expressões da Astronomia Esférica para esse caso específico estão no exercício 16 da lista 3. Os problemas 18, 22 e 26 também lidam com essa situação, que é comum a todas as estrelas.

6 Passagem pelo 1° e 2° verticais

Essa é a situação em que $A = 90^o$ (1° vertical) ou $A = 270^o$ (2° vertical). O triângulo fundamental de posição da estrela é novamente retângulo nestes instante. A dedução das expressões da Astronomia Esférica para esse caso específico estão no exercício 15 da lista 3. A situação também é abordada nos problemas 13 e 19.

É fácil mostrar que a passagem por estes verticais exige que, em módulo, a declinação da estrela seja menor do que a latitude do observador. Ou seja, $|\delta| < |\phi|$.

7 Elongação

A elongação corresponde aos instantes em que o ângulo paralático é reto. Ou seja, $Q = \pm 90^o$. Triângulo é novamente retângulo, agora com vértice na estrela. Essa situação é abordada nos exercício 8, 12 e 23 da Lista 3. Novamente, nem todas as estrelas elongam. Para que isso aconteça, é fácil demonstrar que a condição $|\delta| > |\phi|$. As estrelas que elongam, o fazem duas vezes ao longo do dia, uma a leste do meridiano (elongação oriental)

e outra a oeste do meridiano (elongação ocidental). Nessas situações, o azimute atinge um valor extremo, máximo ou mínimo.

A situação da elongação também é discutida em mais detalhe na seguinte página do hipertexto:

http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2006/elongacao.htm

Finalmente, cumpre dizer que há situações em que o triângulo fundamental não é nem retilátero nem retângulo, sendo que então temos que usar as fórmulas gerais mostradas no início. Os exercícios 2, 6, 20 e 21 lidam com situações desse tipo.

8 Exercícios da lista de Astronomia Esférica

Problema 1)

Sabemos que a altura máxima ocorre na culminação superior, ou seja, quando o ângulo horário é $H = 0^o$.

$$senh = sen\delta\ sen\phi\ +\ cos\delta\ cos\phi\ cosH$$

Fazendo $H = 0^o$ na equação acima, temos:

$$senh = sen\delta\ sen\phi + cos\delta\ cos\phi = cos(\delta - \phi) = cos(\phi - \delta)$$

$$senh = cosz = cos[\pm(\delta - \phi)] \;\rightarrow\; z = \pm(\delta - \phi)$$

$$z = \pm[-47^o 29' - (-30^o 10' 20.9")] = \pm(-17^o - 19' + 20.9") =$$

$$= \pm 17^o 18' 39.1"$$

Como distância zenital só é definida no domínio $[0, 180^o]$, então a resposta correta para este caso é

$$z = 17^o 18' 39.1" \;\rightarrow\; h = 90^o - z = 72^o 41' 20.9"$$

Problema 2)

Começando pela mesma fórmula que antes:

$$senh = sen\delta\; sen\phi \;+\; cos\delta\; cos\phi\; cosH$$

Resolvendo para o ângulo horário:

$$senh - sen\delta\; sen\phi = cos\delta\; cos\phi\; cosH$$

$$cos\delta\; cos\phi\; cosH = senh - sen\delta\; sen\phi$$

$$cosH = \frac{senh - sen\delta\ sen\phi}{cos\delta\ cos\phi}$$

$$cosH = \frac{sen40^o - sen(-47^o29'00")\ sen(-30^o10'20.9")}{cos(-47^o29'00")\ cos(-30^o10'20.9")} = \frac{0.27233}{0.58424}$$

$$cosH = 0.46612\ \rightarrow\ H_1 = arccos(0.46612) = 62.21704^o$$

Este valor, H_1 corresponde à passagem pelo paralelo de altura (almucântar) de $h = 40^o$ quando **na descendente, a W do meridiano**. O outro valor, H_2, ocorre a **leste do meridiano, na ascendente.** Devido à simetria do arco diurno com relação ao meridiano, este valor é

$$H_2 = 360^o - H_1 = 297.78296^o$$

E quanto tempo, então, ω Cen passa acima desse paralelo, quando visto de CTIO? O intervalo $H_2 - H_1$ nos dá justamente contrário, ou seja, o tempo que ω Cen passa **abaixo** de $h = 40^o$. Isso porque o intervalo é sempre "instante final - instante inicial".

Logo, o intervalo de que desejamos é

$$\Delta H(acima) = 360^o - \Delta H(abaixo) = 360^o - (H_2 - H_1) =$$

$$\Delta H(acima) = 360^o - (360^o - H_1) + H_1 = 2H_1 = 124.43408^o =$$

$$\Delta H(acima) = 8.29560h = 8h17m44s$$

Problema 6)

$$sen\delta = senh\ sen\phi\ +\ cosh\ cos\phi\ cosA$$

$$sen\delta = sen(42.2)\ sen(-30.1) + cos(42.2)\ cos(-30.1)\ cos(69.5)$$

$$sen\delta = -0.11242\ \rightarrow\ -6.45509^o\ ou\ 186.45509^o$$

Obviamente, a única solução física é a primeira:
$\delta = -6.45509^o = -06^o27'18"$

Cálculo de H:

$$cosH = \frac{senh - sen\delta\ sen\phi}{cos\delta\ cos\phi}$$

$$cosH = \frac{sen(42.2) - sen(-6.45509)\ sen(-30.1)}{cos(-6.45509)\ cos(-30.1)} = 0.71579$$

$$H_1 = 44.29223^o$$

Esse H_1 corresponde à solução para W do meridiano. Mas o instante estudado corresponde a E do meridiano, pois o azimute $A < 180^o$. Então precisamos de $H_2 = 360^o - H_1 = 351.70777^o = 21.04718h = 21h02m50s$

Valores de H ao nascer e ocaso:

$$cosH = -tg\delta\ tg\phi = -0.06558$$

$H_1 = 93.76050^o$ (ocaso)

$H_2 = 266.23950^o$ (nascer)

O tempo abaixo do horizonte será: $H_2 - H_1 = 172.47900^o = 11.49860h = 11h29m55s$. O tempo acima do horizonte será $24h - 11h29m55s = 12h30m05s$

Problema 8)

Elongação: $Q = \pm 90^o \ \rightarrow \ cosQ = 0; senQ = \pm 1$

Fórmulas dos quatro elementos: 3 lados e 1 ângulo

$$senh = sen\delta\ sen\phi\ +\ cos\delta\ cos\phi\ cosH$$

$$sen\phi = senh\ sen\delta\ +\ cosh\ cos\delta\ cosQ$$

$$sen\delta = senh\ sen\phi\ +\ cosh\ cos\phi\ cosA$$

Analogia dos senos

$$\frac{cos\phi}{senQ} = \frac{cosh}{senH} = -\frac{cos\delta}{senA}$$

A fórmula dos 4 elementos que envolve $cosQ$, fica:

$$sen\phi = senh\ sen\delta$$

$$senh = \frac{sen\phi}{sen\delta}$$

Pela primeira analogia dos senos, temos:

$$\pm cos\phi = \frac{cosh}{senH}$$

$$senH = \pm\frac{cosh}{cos\phi}$$

$$\pm cos\phi = -\frac{cos\delta}{senA}$$

$$senA = \pm\frac{cos\delta}{cos\phi}$$

$$cosH = \frac{senh - sen\delta\ sen\phi}{cos\delta\ cos\phi}$$

$$cosH = \frac{\frac{sen\phi}{sen\delta} - sen\delta\ sen\phi}{cos\delta\ cos\phi}$$

$$cosH = \frac{sen\phi[1 - sen^2\delta]}{sen\delta\ cos\delta\ cos\phi} = \frac{sen\phi\ cos^2\delta}{sen\delta\ cos\delta\ cos\phi}$$

$$cosH = \frac{tg\phi}{tg\delta}$$

$$sen\delta = senh\ sen\phi\ +\ cosh\ cos\phi\ cosA$$

$$cosA = \frac{sen\delta - senh\ sen\phi}{cosh\ cos\phi}$$

$$cosA = \frac{\frac{sen\phi}{senh} - senh\ sen\phi}{cosh\ cos\phi}$$

$$cosA = \frac{sen\phi\ [1 - sen^2h]}{senh\ cosh\ cos\phi} = \frac{sen\phi\ cos^2h}{senh\ cosh\ cos\phi}$$

$$cosA = \frac{tg\phi}{tgh}$$

Problema 10)

Sol do solstício de junho: $\delta_V = +23^o27'00" = 23.45^o$

Valores de ângulo horário H no nascer e ocaso:

$$cosH = -tg\phi\ tg\delta$$

Em PoA, $\phi = -30^o$

$$cosH = -tg(-30^o)tg(23.45^o) = -(-0.57735)\times 0.43377 = 0.25044$$

$H_1 = 75.49645^o = 5.03310h = 5h01m59s$ (ocaso)
$H_2 = 360^o - H_1 = 284.50355^o = 18.96690h = 18h58m01s$ (nascer)
$\Delta H(abaixo) = H_2 - H_1 = 209.00710^o = 13.93381h = 13h56m02s$
$\Delta H(acima) = 360^o - \Delta(abaixo) = 2H_1 = 150.99290^o = 10h03m58s$
Os valores de azimute A no nascer e ocaso neste dia serão calculados pela expressão

$$cosA = \frac{sen\delta - senh\ sen\phi}{cosh\ cos\phi}$$

fazendo $h = 0^o$, o que resulta em

$$cosA = \frac{sen\delta}{cos\phi} = 0.45951$$

$A_1 = 62.64441^o = 62^o38'40"$ (nascer)
$A_2 = 360^o - 62.64441^o = 297.35559^o = 297^o21'20"$ (por)
Já a hora solar verdadeira $V = H_V + 12h$ nos instantes de nascer e ocaso do Sol nesse dia:
$V_1 = H_1 + 12h = 17h01m59s$ (por ou ocaso)

$V_2 = H_2 + 12h = 30h58m01s = 6h58m01s$ (nascer)

Problema 12)

$\omega Car : \alpha = 10h13m19.7s; \delta = -69^o55'64.4"$ Porto Alegre: $\phi = -30^o04'25"$ Elongação oriental: $Q = 90^o$

Usando a expressão geral

$$sen\phi = senh\ sen\delta\ +\ cosh\ cos\delta\ cosQ$$

mas com $Q = 90^o$, temos

$$senh = \frac{sen\phi}{sen\delta} = 0.53349$$

$h = 32.24188^o = 32^o14'31"$

Do exercício 8, temos que:

$$senA = \frac{cos\delta}{cos\phi} = 0.39646$$

$A_1 = 23.35733^o$. Esse valor é uma das soluções da equação trigonométrica acima. Mas não é a correta. A outra solução é $A_2 = 180^o - A_1 = 156.64266^o$

Já hora sideral em que essa elongação ocorre é $S = H + \alpha$

$$senH = \frac{cosh}{cos\phi} = 0.97738$$

$H_1 = 77.78904^o$. Essa não é a solução para elongação oriental, pois tem valor menor do que 180°. A outra solução seria $H_2 = 180^o - H_1 = 102.21086$

$$cosH = \frac{senh - sen\delta\ sen\phi}{cos\delta\ cos\phi} = \frac{0.06280}{0.29691} = 0.21151$$

$H_1 = 77.78890^o$. Mas a solução para E do meridiano é $H_2 = 282.21110^o = 18.81407h = 18h48m51s$. Essa última é a solução correta.

$$S = 18h48m51s + 10h13m20s = 28h61m71s = 5h02m11s$$