

Seja uma observação óptica feita com um detetor ideal (com eficiência quântica $QE=1$) e com um tempo de exposição t . Seja uma fonte astronômica cujo fluxo (em unidades de fótons/por unidade de tempo/por área de coleta do telescópio) é F . Desprezando a absorção pela atmosfera, o valor esperado para o sinal produzido por esta fonte durante a exposição será então $S = Ft$. Contudo, este raramente será o valor efetivamente medido para o sinal sobre o detetor, pois a contagem de fótons está sujeita a flutuações estatísticas que seguem uma distribuição de Poisson com média dada pelo valor esperado, $P(Ft)$. A estas flutuações chamamos de *ruído intrínseco da fonte*. O valor típico representativo desse ruído é dado por $\sigma_S = \sqrt{S} = \sqrt{Ft}$. Logo podemos definir um razão sinal/ruído, $(S/R)_{fonte}$, associada à fonte:

$$\left(\frac{S}{R}\right)_{fonte} = \frac{Ft}{\sqrt{Ft}} = \sqrt{Ft} = \sqrt{S}, \quad (1)$$

Mas note que esta razão sinal/ruído não é muito realista, sendo na verdade uma subestimativa da razão (S/R) verdadeira. Isso porque há outras fontes de ruído que contribuem para a medida de S . Uma dessas fontes é o ruído associado ao fundo de céu. Seja B o fluxo de fótons sobre o detetor devido ao fundo ao qual a fonte está superposta. Durante a exposição, portanto, um sinal $S_{ceu} = Bt$ será gerado no detetor ideal, sendo que o ruído associado é também Poissoniano, $\sigma_{S_{ceu}} = \sqrt{S_{ceu}} = \sqrt{Bt}$.

O que se faz na prática ao medir o fluxo de uma fonte é subtrair o sinal associado ao fundo de céu, estimado em algum ponto do detetor em que não haja nenhuma fonte, do sinal total, S_T , gerado na região ocupada pela fonte. Seja $M = F + B$ o valor esperado do fluxo na direção da fonte (lembre-se que na direção da fonte, o fundo de céu também está presente!). Logo, o valor esperado do sinal total nessa direção será $S_T = Mt$. Uma medida do fluxo da fonte, F_{obs} , então será:

$$F_{obs}t = Mt + P(Mt) - (Bt + P(Bt))$$

$$F_{obs} = M - B + \frac{P(Mt) - P(Bt)}{t}$$

$$F_{obs} = F + \frac{P(Mt) - P(Bt)}{t}, \quad (2)$$

onde $P(Mt)$ e $P(Bt)$ são realizações de distribuições de Poisson com as respectivas médias. Claramente, a medida do fluxo F , F_{obs} , vai flutuar; ou seja, duas observações de uma mesma fonte, com o mesmo sistema observacional, não resultarão exatamente no mesmo valor de F_{obs} , pois os valores de $P(Mt)$ e $P(Bt)$ variam aleatoriamente em torno das respectivas médias.

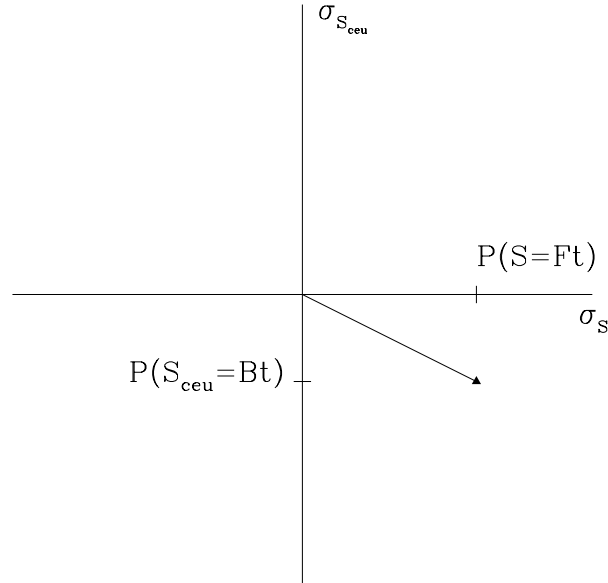
Para estimarmos a variação típica de F_{obs} , que podemos chamar de *incerteza fotométrica na medida do fluxo da fonte*, fazemos uso novamente da dispersão típica em torno da média da distribuição de Poisson, $P(x)$.

$$\sigma_{S_T} = \sqrt{Mt}$$

$$\sigma_{S_{ceu}} = \sqrt{Bt}$$

Esses são valores representativos das flutuações dos sinais na direção da fonte e do céu, respectivamente. Ou seja, os valores de contagem de fótons na direção da fonte em geral estarão tipicamente entre $Mt - \sqrt{Mt}$ e $Mt + \sqrt{Mt}$. No caso da direção onde há somente céu, a contagem total no tempo de exposição t estará geralmente contida no intervalo $Bt - \sqrt{Bt}$ e $Bt + \sqrt{Bt}$. Note que as flutuações podem ser tanto positivas quanto negativas. Além disso elas não são correlacionadas. A amplitude típica da flutuação na medida de S_{obs} , $\sigma_{S_{obs}}$ (dada pela razão no termo à direita da eq. (2)), será a combinação em quadratura das flutuações nos sinais S_T e S_{ceu} :

$$\begin{aligned}\sigma_{F_{obs}} &= \frac{\sqrt{\sigma_{Mt}^2 + \sigma_{Bt}^2}}{t} \\ \sigma_{F_{obs}} &= \frac{\sqrt{Mt + Bt}}{t} \\ \sigma_{F_{obs}} &= \sqrt{\frac{F + 2B}{t}},\end{aligned}\tag{3}$$



A soma em quadratura dos ruídos típicos nas duas direções se deve ao fato de que esses ruídos não estão correlacionados. Esses ruídos podem então ser representados como valores que oscilam independentemente ao longo de dois eixos perpendiculares, como mostrado na figura acima. Dessa forma, a amplitude do ruído combinado é dada pelo módulo do vetor mostrado na figura. A razão sinal/ruído que leva em conta a contribuição das flutuações no fundo de céu à medida de S é dada então por

$$\left(\frac{S}{R}\right) = \frac{F}{\sigma_{F_{obs}}} = F \sqrt{\frac{t}{F + 2B}}, \quad (4.a)$$

$$\left(\frac{S}{R}\right) = \frac{S}{\sqrt{S + 2S_{ceu}}}, \quad (4.b)$$

Note que no caso em que não há contagem de fundo ($B = 0$), a eq. (4) se torna idêntica à eq. (1) dada acima.

Outra coisa importante é observar o comportamento das flutuações nos sinais, do erro fotométrico e da razão sinal/ruído com o tempo de exposição. Os ruídos **aumentam** com o \sqrt{t} , o mesmo valendo para a razão sinal/ruído (eqs. (1) ou (4)). Já o erro fotométrico, eq. (3), diminui com \sqrt{t} . Note que o erro dado por (3) é um erro absoluto em fluxo. O erro relativo ou percentual é simplesmente o inverso da razão sinal ruído, também decrescente portanto com a raiz quadrada do tempo de exposição.

Outra observação importante é que o fluxo limite de detecção de um sistema observacional (telescópio + detetor + filtros, etc) pode ser considerado como aquele para o qual a razão sinal/ruído é um valor pequeno, digamos, $S/R = 3$ (detecção em 3σ). Nesse caso, o sinal do objeto necessariamente será pequeno comparado com o fundo de céu ($B \gg F$). Ou seja, em termos aproximados teremos:

$$F_{lim} \propto \sqrt{\frac{B}{t}}$$

Isso é razoável, pois um fundo de céu mais brilhante (próximo de uma grande cidade, por exemplo, ou numa noite com Lua Cheia) torna mais difícil a detecção de fontes fracas. Essa situação em que a razão S/R é dominada pelo fundo de céu é chamada de *background limited* ou, no bom Português, *limitada pelo céu*. Ela contrasta com a situação da eq. (1), que é dita *photon limited* (limitada pelo sinal do objeto).

Note que aumentar o tempo de exposição, em ambos os casos, permite aumentar S/R ou baixar o fluxo limite de detecção, F_{lim} .

Este argumento pode nos levar a crer que podemos detetar qualquer fonte, por mais fraca que seja e com qualquer sistema observacional, desde que escolhamos o valor de t suficientemente grande (fazendo a razão sinal/ruído na eq. (4) tender a infinito ou S_{lim} tender a zero!). Isso na prática não é verdade: há ainda outros termos de ruído, agora intrínsecos ao detetor, ou externos tanto à radiação incidente quanto ao detetor (raios cósmicos, por exemplo) e que não dependem do tempo de exposição t .