

FIS02014- Lista de Exercícios sobre telescópios
Prof. Basílio X. Santiago

1) Seja uma abertura circular de raio R pixl em torno de uma estrela numa imagem CCD. O sinal instrumental total dentro dessa abertura é S_T . O sinal instrumental do fundo de céu em um pixel do CCD foi estimado como sendo B_p pixel $^{-1}$. Escreva uma expressão para:

- o sinal instrumental gerado pelo céu dentro da abertura considerada.
- o sinal instrumental devido à estrela na mesma abertura.

c) a magnitude da estrela, sabendo-se que o ponto zero para o sistema telescópio+detetor+filtro em questão é PZ e que o tempo de exposição da imagem foi de t .

2) Seja uma abertura de raio $R = 8$ pixls em torno de uma estrela numa imagem CCD. O sinal total dentro dessa abertura é de $S_T = 62000$ ADU (= analog digital units). O fundo de céu foi estimado como sendo $B_p = 200$ ADU pixel $^{-1}$. Determine:

- o sinal instrumental do céu dentro da abertura considerada.

Resp.: $S_{ceu} = B_p N_p = B_p \pi R^2 = 200 \times 64\pi = 4.0 \cdot 10^4$ ADU

- o sinal instrumental devido à estrela dentro da mesma abertura.

Resp.: $S_* = S_T - S_{ceu} = 2.2 \times 10^4$ ADU

c) a razão sinal/ruído da estrela levando-se em conta apenas o ruído associado ao sinal da estrela.

Resp.: $S/R = S_*/\sqrt{S_*} = 148$

d) uma estimativa da razão sinal/ruído levando-se em conta também a presença do fundo de céu.

Resp.: $S/R = S_*/\sqrt{S_* + 2S_{ceu}} = 69$

3) Seja uma estrela cujo sinal instrumental numa imagem é S_* dentro de uma dada abertura circular. Se a contribuição do céu dentro da mesma abertura é S_{ceu} , deduza o raio da abertura em função das grandezas enunciadas, sabendo-se que o sinal total, por pixel, é de T_p pixel $^{-1}$.

4) Seja uma imagem CCD com tempo de exposição t . Se a intensidade instrumental do céu é de I_{ceu} pixel $^{-1}$ s $^{-1}$, escreva uma expressão para o sinal

do céu por pixel, B_p . Exprima também o sinal devido ao céu dentro de uma abertura elíptica de semi-eixo maior a pixl e semi-eixo menor b pixl.

5) Seja uma galáxia cuja intensidade instrumental média é $I_g = 0.01$ ADU pixel⁻¹ s⁻¹. A galáxia ocupa um área de 2500 pixels numa imagem CCD. Determine:

a) O fluxo instrumental da galáxia.

Resp.: $F_g = I_g \Omega = 0.01 \times 2500 = 25$ ADU s⁻¹

b) O sinal por ela gerado após uma exposição de $t = 900s$.

Resp.: $S_g = F_g t = I_g \Omega t = 22500$ ADU

c) O sinal médio em um pixel após uma exposição de $t = 900s$.

Resp.: $G_p = I_g t = 9$ ADU

d) A razão S/R média por pixel sobre a imagem da galáxia para um tempo de exposição $t = 900s$, levando-se em conta apenas o ruído associado ao próprio sinal da galáxia.

Resp.: $S/R = \frac{G_p}{\sqrt{G_p}} = \sqrt{G_p} = 3$

6) Seja a galáxia do problema anterior. Determine o tempo de exposição necessário para fazer com que a razão sinal/ruído média por pixel atinja o valor $S/R = 10$.

Resp.: $S/R = \sqrt{G_p} = \sqrt{I_g t}$. Logo:

$$t \propto (S/R)^2 = 900 \times (10/3)^2 = 10000s$$

Se quisermos a razão S/R para toda a galáxia, então temos que $S/R = \sqrt{S_g}$, de forma que com $t = 900s$ temos $S/R = \sqrt{22500} = 150$. Para termos $S/R = 10$ teremos então que **reduzir** o tempo de exposição :

$$t \propto (S/R)^2 = 900 \times (10/150)^2 = 4s$$

7) Seja uma estrela cuja PSF é bem descrita por uma função exponencial com simetria circular:

$$PSF(R) = PSF(0) e^{-R/R_0},$$

onde a escala exponencial é $R_0 = 2$ pixls.

Determine o raio da abertura que conterá 50% do sinal da estrela. Determine também o raio que contenha 95% do sinal.

Resp.:

$$S(\leq r) = \int_0^r 2 \pi R PSF(R) dR = 2 \pi PSF(0) \int_0^r R e^{-R/R_0} dR$$

$$S(\leq r) = 2 \pi PSF(0) \left[-R_0 r e^{-r/R_0} + R_0 \int_0^r e^{-R/R_0} dR \right]$$

$$S(\leq r) = 2 \pi PSF(0) \left[-R_0 r e^{-r/R_0} - R_0^2 e^{-r/R_0} + R_0^2 \right]$$

$$S(\leq r) = 2 \pi PSF(0) R_0^2 \left[-\frac{r}{R_0} e^{-r/R_0} - e^{-r/R_0} + 1 \right]$$

Fazendo $\lim r \rightarrow \infty$, temos:

$$S_T = 2 \pi PSF(0) R_0^2$$

Logo, para conter uma fração f do sinal total da estrela, o valor de r desejado é aquele que satisfaz:

$$-\frac{r}{R_0} e^{-r/R_0} - e^{-r/R_0} + 1 = f$$

$$+\frac{r}{R_0} e^{-r/R_0} + e^{-r/R_0} = 1 - f$$

$$+x e^{-x} + e^{-x} = 1 - f$$

$$+e^{-x} (1 + x) = 1 - f,$$

onde $f = 0.50$ ou $f = 0.95$.

8) Ainda com relação à estrela do problema anterior, calcule a correção por abertura, em unidades de magnitude, que precisa ser aplicada à abertura de raio $R = 5$ pixls para obter-se a magnitude da estrela.

9) Seja uma estrela cujo sinal numa imagem CCD é de S_* para um tempo de exposição t_1 . O sinal do fundo de céu na mesma abertura usada para a estrela é de S_{ceu} .

a) Escreva uma expressão para a razão S/R da estrela, levando em conta os ruídos associados aos sinais da estrela e céu.

b) Qual o tempo de exposição t_2 necessário para aumentar a razão S/R por um fator 5.

10) Seja uma abertura em torno de uma estrela dentro da qual o sinal total é S_T . Se o sinal do céu dentro da abertura corresponde à metade do sinal da estrela, determine o ponto zero da escala de magnitude, sabendo que o tempo de exposição da imagem foi de t e que a magnitude da estrela para o filtro usado é m_* .

11) Seja uma abertura em torno de uma estrela numa imagem CCD. O sinal instrumental da estrela dentro dessa abertura é de S_* . O sinal instrumental do fundo de céu foi estimado como sendo B_p pixel⁻¹. Deduza expressões para:

a) o raio R_1 da abertura que contenha um sinal instrumental do céu igual ao da estrela.

b) o sinal instrumental devido ao céu num anel de raio interno $R_i = m R_1$ pixls e raio externo $R_e = n R_1$ pixls.

c) a magnitude da estrela, sabendo-se que o ponto zero para o sistema telescópio+detetor+filtro em questão é ZP e que o tempo de exposição da imagem foi de t

12) Seja uma abertura de raio $R = 8$ pixls em torno de uma estrela numa imagem CCD. O sinal total dentro dessa abertura é de $S_T = 122000$ ADU. O fundo de céu foi estimado como sendo $B_p = 80$ ADU pixel⁻¹. Determine:

a) o sinal instrumental do céu dentro da abertura considerada.

b) o sinal instrumental devido à estrela dentro da mesma abertura.

c) a razão sinal/ruído da estrela levando-se em conta apenas o ruído associado ao sinal da estrela.

d) se a inclusão do ruído associado ao fundo de céu na estimativa de S/R é relevante ou não , justificando a sua opinião .

13) Seja uma imagem CCD com tempo de exposição t . Se a intensidade instrumental do céu é de I_{ceu} $\text{pixel}^{-1} \text{ s}^{-1}$, determine o sinal do céu por pixel, B_p . Seja agora uma galáxia elíptica de razão axial $r = b/a$. Qual o valor do semi-eixo maior da galáxia, se a contribuição instrumental do céu na região que ela ocupa é S_{ceu} ?

14) Seja uma galáxia cujo sinal instrumental gerado numa abertura elíptica de semi-eixo maior a pixls e razão axial $r = b/a$ é de S_g . Escreva uma expressão para o sinal médio da galáxia por pixel. E também para a intensidade instrumental média da galáxia, por pixel, sabendo-se que o tempo de exposição foi de t . Qual a intensidade instrumental média da galáxia, por $''^{-2}$, sabendo-se que a escala da imagem é s''/pixl ?

15) Seja a galáxia do problema anterior. Escreva uma expressão para a razão S/R média, por pixel, sobre a imagem da galáxia, levando-se em conta apenas o ruído associado ao próprio sinal da galáxia. Escreva também uma expressão para o tempo de exposição necessário para fazer com que a razão sinal ruído média fique igual o dobro daquela obtida com t .

16) Seja uma estrela cuja PSF é bem descrita por uma função Gaussiana com simetria circular:

$$PSF(R) = PSF(0) e^{-R^2/2\sigma^2},$$

onde a largura da Gaussiana é $\sigma = 2.5$ pixls.

Determine o raio da abertura que conterà 60% do sinal da estrela. Determine também o raio que contenha 95% do sinal.

17) Ainda com relação à estrela do problema anterior, calcule a correção por abertura, em unidades de magnitude, que precisa ser aplicada à abertura de raio $R = 4$ pixls para obter-se a magnitude da estrela.

18) Seja uma estrela cujo sinal numa imagem CCD é de $S_* = 100000$ ADU para um tempo de exposição $t = 200s$. O sinal do fundo de céu na mesma abertura usada para a estrela é de $S_{ceu} = 25000$ ADU. Determine:

a) A razão S/R da estrela, levando em conta os ruídos associados aos sinais da estrela e céu.

b) O tempo de exposição necessário para atingir $S/R = 1000$.

19) Seja uma estrela cuja PSF é bem descrita por uma função exponencial com simetria circular:

$$PSF(R) = PSF(0) e^{-R/R_0},$$

onde a escala exponencial é $R_0 = 2$ pixls.

Determine a fração do fluxo de uma estrela contida dentro do raio $R = r_0$. Determine ainda a correção em magnitude correspondente a esta abertura.

20) Seja uma distribuição de probabilidade dada pela função exponencial

$$p(x) = p_0 e^{-x}$$

a) Determine o valor de p_0 de forma que a distribuição esteja normalizada para a unidade, ou seja, $\int_0^\infty p(x)dx = 1$

b) Calcule os momentos de ordem 1 e 2 da distribuição $p(x)$. Qual o valor médio da distribuição ?

c) Qual a flutuação típica em torno da média para esta distribuição ?

21) Suponha que um dado seja viciado, de forma que a distribuição de probabilidade de um número x ($x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ser sorteado seja dada por

$$p(x) = p_0 e^{-x}$$

a) Determine o valor de p_0 de forma que a distribuição $p(x)$ seja corretamente normalizada.

b) Determine o valor médio deste dado.

22) Seja agora $p(r) = p_0 e^{-r/r_0}$ a distribuição de probabilidade de um fóton incidir a uma distância r do centro da imagem de uma fonte pontual.

a) Determine o valor de p_0 de forma que a distribuição $p(r)$ seja corretamente normalizada.

b) Determine o valor de r interior ao qual um fóton tem 50% de chance de incidir.

c) Determine o valor de r no qual a probabilidade de um fóton nele incidir é igual à metade da probabilidade de incidir no centro da imagem.