FIS02013 - Lista de questões sobre lentes gravitacionais
Prof. Basílio X. Santiago

1) Explique com suas palavras o que constitui a aproximação de lente fina para tratar o efeito de lenteamento gravitacional.

R: A aproximação de lente fina supõe que a dimensão da lente é muito menor do que as distâncias entre esta e a fonte, D_{ds}, e ao observador, D_d. Além disso, a aproximação de lente fina simplifica a deflexão da luz, assumindo que ela ocorre instantaneamente sobre o plano da lente, sendo, portanto, apenas uma função da distância, sobre esse plano, entre o feixe de luz da fonte e o centro da lente.

2) Calcule o raio do anel de Einstein causado por uma lente pontual de massa semelhante à de um buraco negro supermassivo, $M = 10^8$ $M_\odot$ e cuja distância é $D_d = 200$ Mpc. Assuma que a fonte está a uma distância $D_s = 600$ Mpc. Assuma também uma geometria puramente Euclidiana para o espaço, de forma que $D_{ds} = D_s - D_d$.

Expresse o valor do anel em segundos de arco.

R:

$$\theta_E^2 = \frac{4GMD_{ds}}{D_dD_sc^2}$$

$$\theta_E^2 = \frac{4x6.67x2x400x3.1x10^{49}}{3.1x200x3.1x600x9x10^{60}}$$

$$\theta_E^2 = \frac{6.616x10^{53}}{1.038x10^{67}}$$

$$\theta_E^2 = 6.374x10^{-14}rad^2$$

$$\theta_E = 2.525x10^{-7}rad = 5.2x10^{-2}arcsec$$

3) Calcule a amplificação da fonte do problema anterior no caso em que sua imagem se forma a $\theta = 0.1$ arcsec.

R:

$$\mu = \left(1 - \frac{\theta_E^4}{\theta^4}\right)^{-1}$$

$$\mu = \left(1 - \frac{(0.052)^4}{(0.1)^4}\right)^{-1}$$

$$\mu = \left(1 - 0.073\right)^{-1} = 1.079$$

4) Deduza a expressão para o ângulo de deflexão da luz no caso de uma esfera isotérmica singular, cujo perfil de densidade espacial é dado por

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}$$

Para isso determine a distribuição de densidade superficial no plano da lente, em função da distância ξ ao eixo que conecta o observador ao centro da lente e depois insira na expressão para o ângulo de deflexão .

R:

Calculemos primeiro a densidade projetada de matéria no plano da lente sobre um ponto ξ sobre este plano. Para isso vamos exprimir a variável radial r como sendo

$$r = sqrt(\xi^2 + l^2)$$

onde l é a variável ao longo da linha de visada. Assim, precisamos integrar a expressão de $\rho(r)$ ao longo da linha de visada:

$$\Sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r(\xi, l)) dl$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + l^2} dl$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{\pi G} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + l^2} dl$$

Fazemos $l = \xi tg(u)$. Logo $dl = \xi sec^2(u)\ du$.

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{\pi G \xi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + tg^2(u)} \xi sec^2(u) du$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{\pi G \xi} \int_0^{\pi/2} du$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{\pi G \xi} \frac{\pi}{2}$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{2G\xi}$$

Usando agora a expressão para o ângulo de deflexão α, e lembrando que o sistema tem simetria circular, temos

$$\alpha(\xi) = \frac{4G}{c^2\xi} \int_0^{\xi} 2\pi\xi' \Sigma(\xi') d\xi'$$

$$\alpha(\xi) = \frac{8\pi G}{c^2\xi} \int_0^{\xi} \xi' \Sigma(\xi') d\xi'$$

$$\alpha(\xi) = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2\xi} \int_0^{\xi} \frac{\xi'}{\xi'} d\xi'$$

$$\alpha(\xi) = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2\xi} \xi$$

$$\alpha(\xi) = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}$$

5) Calcule o raio do anel de Einstein no caso de um aglomerado de galáxias que segue um distribuição de densidade igual ao de uma esfera isotérmica singular e cuja dispersão de velocidades é $\sigma = 1000 km/s$ e distância é de $D_d = 500$ Mpc. Assuma o caso de uma fonte que diste $D_{ds} = 300$ Mpc da lente.

R:

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma^2 D_{ds}}{D_s c^2}$$

$$\theta_E = \frac{4x3.1416x10^6x300}{800x9x10^{10}}$$

$$\theta_E = \frac{3.77x10^9}{7.20x10^{13}}$$

$$\theta_E = \frac{3.77x10^9}{7.20x10^{13}}$$

$$\theta_E = 0.52x10^{-4}rad = 10.79arcsec$$

6) Calcule a amplificação da fonte do problema anterior no caso em que sua imagem se forma a $\theta = 25$arcsec.

R:

$$\mu = \left(1 - \frac{\theta_E}{\theta}\right)^{-1}$$

$$\mu = \left(1 - \frac{10.79}{25.00}\right)^{-1} = 1.76$$

7) Explique as diferenças entre os 3 regimes básicos de lenteamento gravitacional: forte, fraco e micro. Ou seja, quais as características da lente e/ou imagem lenteada em cada caso?

R: Nos regimes de lente forte e fraco, a lente é espacialmente resolvida. A diferença entre estes dois regimes se dá na(s) imagem(ens) da fonte. No regime forte, a densidade superficial de matéria no plano da lente no local onde ocorre a deflexão da luz da fonte é maior do que um valor crítico. Ou seja, a deflexão de um feixe é muito grande, o que permite a formação de imagens múltiplas de fontes pontuais ou grandes deformações de fontes extensas, na forma de arcos longos. A amplificação do fluxo da fonte neste caso é também grande. No regime fraco apenas uma leve deformação tangencial da imagem da fonte é esperada, com baixa amplificação .

Já no regime micro, a lente não é resolvida, sendo um objeto pontual, consistente com uma estrela, planeta ou buraco negro. O anel de Einstein é correspondentemente pequeno e as imagens múltiplas da fonte, mesmo que se formem, também não são resolvidas. O efeito de microlenteamento, portanto, é sentido apenas pela amplificação do fluxo da fonte.