

1) Explique com suas palavras as duas limitações básicas da Lei de Hubble para determinar distâncias extragalácticas.

R:

Para determinar distâncias apenas com a Lei de Hubble, precisamos conhecer o valor da constante de Hubble,  $H_0$ , o qual ainda tem uma incerteza de uns 10-15%.

Mesmo que saibamos o valor de  $H_0$  precisamente, a medida de velocidade radial devida à expansão do Universo a partir do redshift é contaminada pela existência de movimentos peculiares, que se supõe serem causados pela gravidade resultante das não-homogeneidades na distribuição de matéria (e de galáxias) em cada ponto.

Na verdade, as velocidades peculiares são de amplitude maior ou comparável do que o fluxo de Hubble (expansão) para distâncias de uns 30-40 Mpc ou menos. A determinação de  $H_0$  diretamente (ou seja, comparando o redshift com a distância) sobre galáxias até essas distâncias é, portanto, ineficaz. Para distâncias maiores, as velocidades peculiares se tornam relativamente menos importantes, mas os métodos primários de determinação de distância já não são aplicáveis. Daí a necessidade de se combinar métodos primários e secundários.

2) O que diferencia os métodos primários de determinação de distâncias dos métodos secundários? Liste os métodos discutidos que pertencem a cada categoria.

R:

Os métodos primários permitem que se determinem distâncias diretamente, usando-se argumentos geométricos ou físicos. A expansão da radiação da supernova SN1987 até atingir o material originalmente ejetado pela progenitora é um exemplo de método primário, baseado em argumentos geométricos e em medidas de retardo temporal de sinais de luz. A relação P-L das Cefeidas já é bem conhecida e calibrada, de forma que a detecção e medida de períodos dessas variáveis em outras galáxias constitui um método primário de inferir suas distâncias.

Métodos secundários têm incertezas maiores e efeitos sistemáticos ainda não totalmente compreendidos. Ainda assim permitem que sejam determinadas

com certa precisão razões de distâncias entre duas galáxias ou aglomerados de galáxias. Os métodos secundários discutidos no livro PS são SNIa, flutuações em brilho superficial, nebulosas planetárias e as relações de escala.

3) Com base na discussão sobre flutuações em brilho superficial, prove que a flutuação relativa de intensidade esperada em uma galáxia é dada por

$$\frac{\sigma_I}{I} \propto \frac{1}{D\sqrt{\langle I \rangle}}$$

onde  $D$  é a distância da galáxia,  $\langle I \rangle$  é a intensidade média das regiões onde a flutuação é medida.

Assuma que a flutuação em  $I$  é proporcional à flutuação no número de estrelas, a qual segue uma distribuição de Poisson. Lembre-se ainda que intensidade é fluxo por unidade de ângulo sólido.

R:

O número  $N$  de estrelas que contribuem para a intensidade num dado ângulo sólido infinitesimal observado  $\omega$  será

$$N = \Sigma A = \Sigma \omega D^2$$

onde  $\Sigma \propto \langle I \rangle$  é a densidade superficial de estrelas no elemento de ângulo sólido,  $A$  é a área por ele subentendida e  $D$  é a distância.

Logo temos que a flutuação em  $I$ ,  $\sigma_I \propto \sigma_N$ . Ou seja, a flutuação em intensidade é proporcional à flutuação no número de estrelas que efetivamente contribuem para essa intensidade.

$$\frac{\sigma_I}{I} = \frac{\sigma_N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\frac{\sigma_I}{I} = \frac{1}{D\sqrt{\Sigma}} = \frac{1}{D\sqrt{\langle I \rangle}}$$

4) Explique com suas próprias palavras o conceito comumente usado de *escada de distâncias*. Para isso reflita sobre e utilize os conceitos auxiliares de: *combinação de métodos; métodos primários e secundários; calibração de um indicador de distância; velocidade peculiar e velocidade de expansão*.

R:

A escada de distâncias (do inglês *distance ladder*) é uma combinação de métodos primários e secundários que permite a calibração da Lei de Hubble, pela determinação da constante  $H_0$ . Os degraus iniciais da escada são os métodos primários de determinação de distâncias, inclusive dentro da Galáxia. Os métodos do paralaxe e do ponto de convergência permitem a obtenção de distâncias de estrelas e aglomerados estelares próximos. São o primeiro degrau. Estes métodos levam à determinação de distâncias de outros aglomerados, onde há estrelas RR Lyrae e Cefeidas, utilizando ajustes de diagramas HR, ou então o uso do chamado *paralaxe espectroscópico*. Esse degrau da escada, por seu turno, permite a calibração da relação P-L das Cefeidas, o qual já se constitui num método primário extragaláctico. As distâncias de Cefeidas em galáxias até o aglomerado de galáxias de Virgo, por sua vez, permitem a calibração dos métodos secundários, (mais um degrau). A aplicação destes a aglomerados ainda mais distantes, como o de Coma, finalmente leva ao objetivo inicial, qual seja, o de calibrar a lei de Hubble de forma isenta do efeito das velocidades peculiares sobre a expansão cósmica.

5) Deduza a expressão 3.40 para  $\Phi(M)$  a partir da expressão 3.38 para  $\Phi(L)$ .

R:

$$\Phi(L)dL = \frac{\Phi_*}{L_*} \left( \frac{L}{L_*} \right)^\alpha \exp(-L/L_*) dL$$

$$\Phi(M)dM = \Phi(L)dL$$

$$\Phi(M) = \Phi(L(M)) \frac{dL}{dM}, \quad (1)$$

$$\Phi(L(M)) = \frac{\Phi_*}{10^{-0.4M_*}} 10^{-0.4\alpha(M-M_*)} \exp(-10^{[-0.4(M-M_*)]}), \quad (2)$$

$$\frac{dM}{dL} = -2.5 \log_e \frac{1}{L}$$

Logo

$$\left| \frac{dL}{dM} \right| = \frac{L}{1.086} = \frac{10^{-0.4M}}{1.086}, \quad (3)$$

Inserindo (3) e (2) em (1), temos então

$$\Phi(M) = \frac{\Phi_*}{10^{-0.4M_*}} 10^{-0.4\alpha(M-M_*)} \exp(-10^{[-0.4(M-M_*)]}) \frac{10^{-0.4M}}{1.086}$$

$$\tilde{\Phi}(M) = \frac{\Phi_*}{1.086} 10^{-0.4(\alpha+1)(M-M_*)} \exp(-10^{[-0.4(M-M_*)]})$$

6) Deduza a expressão 3.43 para a densidade de luminosidade (luminosidade por unidade de volume) de uma população de galáxias que segue a função de luminosidade de Schechter.

Prove também que o número total de galáxias por unidade de volume de tal população é dado por

$$n = \phi^* \Gamma(\alpha + 1)$$

R:

A densidade de luminosidade é expressa por

$$l_{tot} = \int_0^\infty L \Phi(L) dL = \int_0^\infty \Phi_* \left(\frac{L}{L_*}\right)^{\alpha+1} \exp(-L/L_*) dL$$

Fazendo  $x = \alpha + 2$  e  $y = L/L_*$  (de forma que  $dL = L_* dy$ ) na expressão 3.44 no pé da página 118, a qual define a função  $\Gamma$ , verificamos imediatamente que

$$l_{tot} = \Phi_* L_* \Gamma(\alpha + 2)$$

Se desejamos calcular a densidade de galáxias (ao invés da densidade de luminosidade), tudo que temos que fazer é integrar a própria função de Schechter.

$$n = \int_0^\infty \Phi(L) dL = \int_0^\infty \frac{\Phi_*}{L_*} \frac{L}{L_*}^\alpha \exp(-L/L_*) dL$$

$$n = \Phi_* \Gamma(\alpha + 1)$$

7) Com base na discussão sobre as populações de galáxias vermelhas e azuis da Figura 3.33, e assumindo que a cor se correlaciona com a idade média das estrelas numa galáxia, responda:

a) Qual das duas populações de galáxias têm idade média maior para suas estrelas?

b) Fixada uma população em cor, como a idade média das estrelas se correlaciona com a luminosidade?

R:

a) a população mais vermelha tende a ter estrelas mais velhas e/ou de maior metalicidade (ao que se chama de degenerescência idade-metalicidade). Dada a hipótese enunciada (de que a cor se correlaciona com a idade), temos então que o ramo mais vermelho é mais velho.

b) As galáxias mais luminosas tendem a ser mais vermelhas para as duas populações de galáxias, o que, pela hipótese enunciada, corresponde a uma idade maior para suas estrelas típicas.

8) Usando o conceito de função de massa inicial estelar,  $\phi(m)$ , expresse a integral que representa a fração **em número** de estrelas de uma população estelar que têm massa menor ou igual à solar, ou seja,  $m_L \leq m \leq 1m_\odot$ . Determine essa fração para o caso de uma função de Salpeter. Utilize  $m_L = 0.1m_\odot$  e  $m_U = 100m_\odot$ .

R:

A fração de estrelas com massa no domínio  $m_L \leq m \leq 1m_\odot$  será dada por

$$\frac{\int_{m_L}^{m_\odot} \phi(m) dm}{\int_{m_L}^{m_U} \phi(m) dm}$$

Assumindo a função de Salpeter,  $\phi(m) = \phi_0 m^{-2.35}$ , temos que

$$\int_{m_L}^{m_\odot} \phi(m) dm = \frac{-\phi_0}{1.35} (m_\odot^{-1.35} - m_L^{-1.35})$$

e

$$\int_{m_L}^{m_U} \phi(m) dm = \frac{-\phi_0}{1.35} (m_U^{-1.35} - m_L^{-1.35})$$

Tomando a razão, a constante de normalização se cancela e temos que:

$$\frac{\int_{m_L}^{m_\odot} \phi(m) dm}{\int_{m_L}^{m_U} \phi(m) dm} = \frac{(m_\odot^{-1.35} - m_L^{-1.35})}{(m_U^{-1.35} - m_L^{-1.35})}$$

$$\frac{\int_{m_L}^{m_\odot} \phi(m) dm}{\int_{m_L}^{m_U} \phi(m) dm} = \frac{(1 - 0.1^{-1.35})}{(100^{-1.35} - 0.1^{-1.35})} = 0.95$$

9) Determine agora, usando o mesmo conceito de função de massa estelar inicial, a fração da massa total da população contida em estrelas no mesmo domínio de  $0.1 \leq m \leq 1m_\odot$ . Utilize novamente a  $\phi(m)$  de Salpeter.

R:

A razão que queremos calcular agora é simplesmente

$$\frac{\int_{m_L}^{m_\odot} m\phi(m) dm}{\int_{m_L}^{m_U} m\phi(m) dm}$$

$$\int_{m_L}^{m_\odot} m\phi(m) dm = \frac{-\phi_0}{0.35} (m_\odot^{-0.35} - m_L^{-0.35})$$

$$\int_{m_L}^{m_U} m\phi(m) dm = \frac{-\phi_0}{0.35} (m_U^{-0.35} - m_L^{-0.35}) = 1m_\odot$$

Tomando a razão temos então

$$\frac{\int_{m_L}^{m_\odot} m\phi(m) dm}{\int_{m_L}^{m_U} m\phi(m) dm} = \frac{(m_\odot^{-0.35} - m_L^{-0.35})}{(m_U^{-0.35} - m_L^{-0.35})}$$

$$\frac{\int_{m_L}^{m_\odot} m\phi(m) dm}{\int_{m_L}^{m_U} m\phi(m) dm} = \frac{(1 - 0.1^{-0.35})}{(100^{-0.35} - 0.1^{-0.35})} = 0.61$$

10) Examinando a Figura 3.48(a) do livro PS, responda: o que acontece com as cores (B-V) e (V-K) à medida que uma população estelar envelhece? Explique com suas palavras o motivo porque as cores integradas de uma população estelar evoluem mais rapidamente quando a população é jovem, tal como mostrado na mesma figura.

R:

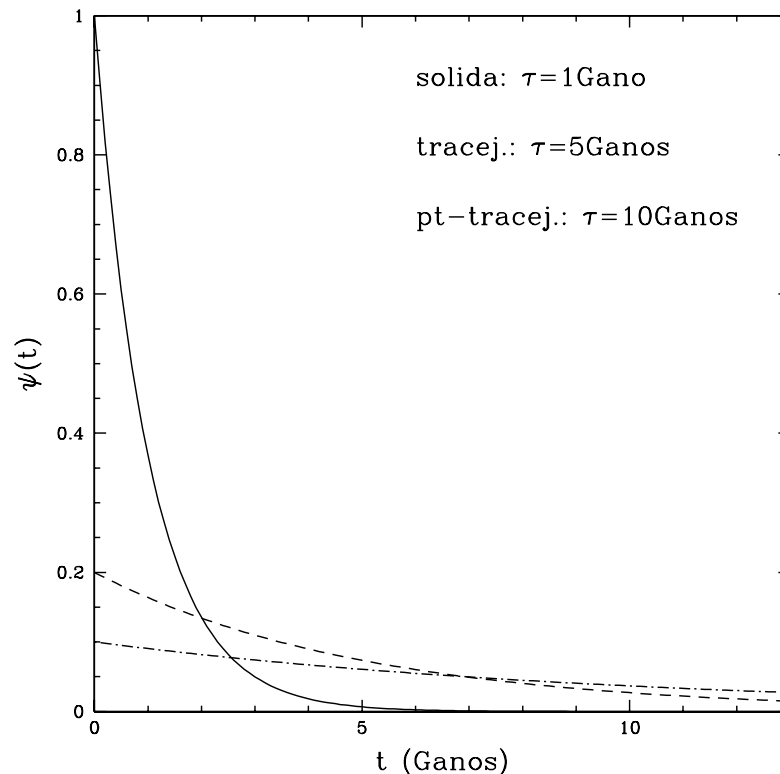
As cores (B-V) e (V-K) aumentam, ou seja, a população fica mais avermelhada (o que equivale a dizer que sua luz integrada passa a ser dominada por estrelas frias).

A variação temporal das cores integradas,  $d(B - V)/dt$  e  $d(V - K)/dt$ , é maior quando a população é jovem porque a escala de tempo de evolução das estrelas que dominam o brilho dessa população é menor, já que populações jovens têm seu brilho dominado por estrelas de alta massa. À medida em que a população envelhece, sua cor passa ser dominada por estrelas de massa intermediária ou aproximadamente solar, as quais evoluem mais lentamente.

11) Faça um gráfico para os históricos de formação estelar,  $\psi(t)$ , dados pela expressão 3.69 do PS, para os casos em que  $\tau = 1Gano$ ,  $\tau = 5Ganos$ ,  $\tau = 10Ganos$ . Em todos os casos, considere  $t_f = 0$  e utilize o domínio  $0 \leq t \leq 14$  Ganos.

R:

O gráfico encontra-se abaixo, tendo sido usados símbolos distintos para cada caso, conforme indicado.



Conforme esperado, quanto maior a escala característica  $\tau$ , mais prolongada no tempo é a formação estelar no sistema. Ou seja, no caso de  $\tau = 1Gano$ , a taxa de formação cai por 90% relativamente ao valor inicial em torno de 2 Ganos. Isso **aproxima** esse caso de uma população estelar simples, pelo menos

muito mais do que nos demais casos, em que o processo de formação estelar é muito mais estendido no tempo.

12) Com base nos gráficos dos 3 históricos, responda: em qual dos casos espera-se que a cor integrada da população seja mais vermelha e em qual deles espera-se uma cor integrada mais azul?

Utilize agora a Figura 3.48(a) para **estimar** a cor (V-K) da população com  $\tau = 1Gano$ , quando sua idade for  $t = 12Ganos$ . Lembre-se que a Figura 3.48(a) mostra a evolução das cores para uma população simples, em que todas as estrelas têm a mesma idade (ou seja, formaram-se instantaneamente num instante  $t$  no passado).

R:

A cor mais vermelha, assumindo-se novamente que a metalicidade não seja muito diferente nos 3 casos, é esperada para a população com idade média maior, ou seja, aquela com  $\tau = 1Gano$ . A cor mais azul, pelo mesmo argumento, é esperada para o caso em que  $\tau = 10Ganos$ . Neste sistema, há uma considerável população jovem, posto que a  $\phi$  atual é da ordem de 30% do valor inicial.

Como o caso com  $\tau = 1Gano$  é o que mais se aproxima de uma população simples, com surto instantâneo de formação estelar, podemos usar a figura em questão para estimar-lhe a cor após 12 Ganos. Se desprezarmos o fato de haver formação estelar estendida, teremos  $V - K \simeq 3.4$ . No outro extremo, podemos *descontar* uns 2 Ganos para levar em conta a contribuição das estrelas mais jovens formadas no sistema. Assim, a idade *efetiva* seria de uns 10 Ganos, o que resulta em  $V - K \simeq 3.2$ .

13) Estime o *yield*  $y$  do meio interestelar esperado para uma galáxia isolada cuja metalicidade média atual é  $Z(t_0) = 0.03$  e na qual a fração atual da massa bariônica na forma de gás e poeira é  $\mu_g = 0.10$ .

Estime também a sua metalicidade  $Z(t_0 - 5Ganos)$ , ou seja, há 5 anos atrás, quando a fração da massa da galáxia contida no meio interestelar era  $\mu_g = 0.25$ .

$$y = -\frac{Z}{\ln\mu_g} = \frac{0.03}{2.30} = 0.013$$

$$Z(t_0 - 5Ganos) = -y \ln(\mu_g) = -0.013x(-1.386) = 0.018$$