Lentes Gravitacionais

Prof. Basílio Santiago

Derivação da equação da lente

Usando a figura mostrada na apresentação anterior (de autoria de Cristina Furlanetto), temos que provar que:

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d}\vec{\xi} - D_{ds}\vec{\alpha}(\vec{\xi})$$

Isso será feito assumindo-se que os ângulos posição verdadeira da fonte com relação à direção ao centro da lente, β, posição da imagem com relação à mesma origem, θ, e de deflexão , α, são todos pequenos.

Demonstração :

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\eta}}{D_s}$$

$$\vec{\theta} = \frac{\vec{\xi}}{D_d}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{X}}{D_{ds}}$$

onde $\vec{X}$ é o segmento de reta no plano da fonte que resulta do prolongamento da linha de visada à imagem lenteada até o dito plano da fonte, e subtraído de $\vec{\eta}$. Todas as relações acima presumem que os ângulos são pequenos.

Outra observação relevante é que $\vec{\alpha}$ neste texto corresponde ao *alpha chapeu* na figura da apresentação da equação da lente de C. Furlanetto.

$$\vec{\eta} + \vec{X} = \theta D_s = \frac{\vec{\xi}}{D_d} D_s$$

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\xi}}{D_d} D_s - \vec{X} = \frac{\vec{\xi}}{D_d} D_s - \vec{\alpha} D_{ds}$$

Dividindo tudo por D_s, temos

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s}\vec{\alpha}$$

Massa puntual

Neste caso, pelo tratamento da deflexão da luz usando a relatividade geral no limite de campos fracos, temos que o ângulo de deflexão da luz é dado por

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM\vec{\xi}}{c^2\xi^2}$$

Logo a equação da lente fica

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s}\frac{4GM\vec{\xi}}{c^2\xi^2}$$

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s D_d}\frac{4GM\vec{\theta}}{c^2\theta^2}$$

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{\theta_E^2\vec{\theta}}{\theta^2}$$

onde

$$\theta_E^2 = \frac{4GMD_{ds}}{D_d D_s c^2}$$

$$\theta_E = \left(\frac{4GMD_{ds}}{D_d D_s c^2}\right)^{1/2}$$

é o chamado raio de Einstein.

Como o caso de uma massa pontual tem simetria circular, os vetores posição da imagem e da fonte, $\vec{\theta}$ e $\vec{\beta}$ são colineares. Ou seja, no caso de uma fonte também pontual, suas imagens formam-se ao longo do eixo de deslocamento da fonte com relação à lente.

Assim sendo, podemos tratar a eq. da lente como uni-dimensional, eliminando a notação vetorial. A relação entre a posição angular da fonte com relação ao centro da lente (β) e a posição angular da imagem (θ) é dada então por

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

Fazendo $y = \beta/\theta_E$ e $x = \theta/\theta_E$, temos que a equação da lente reduz-se a

$$y = x - \frac{1}{x}$$

$$yx = x^2 - 1$$

Que tem como soluções

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$$

Uma solução óbvia para a equação acima é dada no caso em que $y = 0$, ou seja $\beta = 0$, o que significa que a fonte está perfeitamente alinhada com a lente. Neste caso:

$x = \pm 1 \rightarrow \theta = \pm\theta_E$

Como a solução tem que ter simetria circular dado o perfeito alinhamento da fonte, essa solução corresponde a um anel centrado na lente, o chamado anel de Einstein.

Se deslocamos a fonte numa direção , digamos $y > 0$, teremos uma imagem no lado oposto $x < 0$ (e com $|x| < 1$) e outra no mesmo lado da fonte $x > 0$ (e com $|x| > 1$) . Ou seja, enquanto uma das imagens se afasta do centro da lente, a outra se aproxima, tendendo a $x = 0$ quando $y \to \infty$.

Deflection angle, convergence, critical density

The deflection angle by a single point mass lens is given by

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM\vec{\xi}}{c^2\xi^2}$$

where ξ is the impact parameter of the radiation propagation vector relative to the point mass lens.

For a generalized distribution of small point mass lenses, this becomes

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2}\sum dm(\vec{\xi'}, r')\frac{\vec{\xi} - \vec{\xi'}}{|\vec{\xi} - \vec{\xi'}|^2}$$

Transforming that into a continuous mass distribution yields

$$\vec{\alpha}(\xi) = \frac{4G}{c^2}\int d^2\vec{\xi'}\int dr'\rho(\vec{\xi'}, r')\frac{\vec{\xi} - \vec{\xi'}}{|\vec{\xi} - \vec{\xi'}|^2}$$

The deflection angle $\vec{\alpha}$, in the thin lens approximation, is given by

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2}\int d^2\vec{\xi'}\Sigma(\vec{\xi'})\frac{\vec{\xi} - \vec{\xi'}}{|\vec{\xi} - \vec{\xi'}|^2}$$

where

$$\Sigma(\vec{\xi'}) = \int dr'\rho(\vec{\xi'}, r')$$

is mass distribution projected on the image plane.

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4G}{c^2}\int D_d^2 d^2\vec{\theta'}\Sigma(\vec{\theta'})\frac{\vec{\theta} - \vec{\theta'}}{D_d|\vec{\theta} - \vec{\theta'}|^2}$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4D_dG}{c^2}\int d^2\vec{\theta'}\Sigma(\vec{\theta'})\frac{\vec{\theta} - \vec{\theta'}}{|\vec{\theta} - \vec{\theta'}|^2}$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4\pi D_d G}{\pi c^2} \int d^2\vec{\theta'} \Sigma(\vec{\theta'}) \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta'}}{|\vec{\theta} - \vec{\theta'}|^2}$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\vec{\theta'} \kappa(\vec{\theta'}) \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta'}}{|\vec{\theta} - \vec{\theta'}|^2}$$

where

$$\kappa(\vec{\theta'}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta'})}{\Sigma_{crit}}$$

where κ is called the *convergence* and

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G D_d}$$

Σ_{crit} is a critical density. If $\kappa > 1$ (i.e. $\Sigma > \Sigma_{crit}$), multiple images form.

We can define a scalar function $\psi(\vec{\theta})$ which works as a potential function for the deflection angle

$$\vec{\alpha} = \Delta\psi$$

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \kappa(\vec{\theta'}) ln|\vec{\theta} - \vec{\theta'}|$$

The relation between $\vec{\alpha}$ and ψ stems from the fact that

$$\Delta lnr = \frac{\partial lnr}{\partial r} \mathbf{e_r}$$

$$\Delta lnr = \frac{\mathbf{e_r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

The Laplacian of ψ is given by

$$\Delta^2 \psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta})$$

This will be used in the next section.

Esférica Isotérmica Singular

A distribuição de densidade neste caso é dada por

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}$$

onde r é a distância radial ao centro da distribuição . Calculemos então a densidade superficial em função da posição sobre o plano da imagem ξ. Para isso temos que integrar o perfil de densidade espacial acima ao longo da linha de visada.

$$\Sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{dr'}{\xi^2 + r'^2}$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{\pi G} \int_{0}^{\infty} \frac{dr'}{\xi^2 + r'^2}$$

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma^2}{2G\xi}$$

Com a densidade superficial $\Sigma(\xi)$, podemos então agora calcular o ângulo de deflexão , usando a aproximação da lente fina.

$$\alpha = \frac{4G}{c^2\xi} 2\pi \int_0^{\xi} d\xi'\xi'\Sigma(\xi')$$

$$\vec{\alpha} = \frac{4\pi\sigma^2\vec{\xi}}{c^2\xi}$$

Substituindo a expressão para α acima, a equação da lente então fica

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{\theta_E\vec{\theta}}{\theta}$$

onde

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma^2 D_{ds}}{D_s c^2}$$

é o anel de Einstein no caso em testilha.

Assim como no caso da massa pontual, aqui também temos um caso de lenteamento com simetria circular, já que a lente é circular. Assim, novamente os vetores de posição de uma fonte pontual e da imagem com relação ao centro da lente serão colineares. Podemos novamente tratar o problema em uma dimensão

$$\beta = \theta - \theta_E \frac{\theta}{|\theta|}$$

Ou

$$y = x - \frac{x}{|x|}$$

Como as duas imagens estarão em linha com o centro da lente (já que é lente com simetria circular), e em lados a ele opostos, podemos arbitrar um lado como $x > 0$ e o outro como $x < 0$. O lado positivo é onde se encontra a fonte, ou seja, $y > 0$. Temos então :

$$y = x - 1, \text{se } x > 0 \rightarrow x = y + 1$$

$$y = x + 1, \text{se } x < 0 \rightarrow x = y - 1$$

Logo, a separação entre as duas imagens é sempre

$$\Delta x = 2 \rightarrow \Delta\theta = 2\ \theta_E$$

.

Mas temos que lembrar que uma das 2 imagens some no centro da SIS se $\beta > \theta_E$ (ou analogamente $y > 1$). Então , temos um dos 2 casos:

A- $y \leq 1$: formam-se duas imagens visíveis, com separação $= 2\theta_E$

B- $y > 1$: forma-se uma imagem visivel, situada além do anel de Einstein.

Amplification

The amplification μ is given by the inverse of the determinant of the Jacobian matrix that transforms from the source coordinates on the source plane to the image coordinates on the image plane. Mathematically:

$$\mu = \frac{1}{detA}$$

where

$$A(\vec{\theta}) = \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\vec{\theta}}$$

$$A_{ij} = \frac{\partial\beta_i}{\partial\theta_j}$$

Using the lens equation we have

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial\alpha_i}{\partial\theta_j}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}$$

The second line follows from the fact that the deflection angle is the gradient of the potential $\psi(\vec{\theta})$.

The elements of the Jacobian matrix A can then be written as

$$A_{11} = 1 - \kappa - \gamma_1$$

$$A_{22} = 1 - \kappa + \gamma_1$$

$$A_{12} = -\gamma_2$$

$$A_{21} = -\gamma_2$$

where

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial^2\theta_1} - \frac{\partial^2\psi}{\partial^2\theta_2}\Big)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_1\partial\theta_2}$$

The terms γ are known as *shear*.
And finally

$$\mu = \frac{1}{detA} = \frac{1}{(1-\kappa^2) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}$$

Amplificação da imagem: sistema com simetria circular

Seja um diferencial do vetor posição da fonte $\vec{\beta}$.

$$\vec{\beta} = \beta \mathbf{e}_\beta$$

onde $\mathbf{e}_\beta$ é o vertor unitário na direção do vetor posição da fonte, sendo β o seu módulo.

$$d\vec{\beta} = d\beta\mathbf{e}_\beta + \beta d\mathbf{e}_\beta$$

Exprimindo $\mathbf{e}_\beta$ em componentes cartesianos, temos

$$\mathbf{e}_\beta = cosv\mathbf{e_x} + senv\mathbf{e_y}$$

onde $\mathbf{e_x}$ e $\mathbf{e_y}$ são unitários no sistema cartesiano e v é coordenada angular polar (de forma que (β, v) formam um sistema polar).

$$d\mathbf{e}_\beta = -senvdv\mathbf{e_x} + cosvdv\mathbf{e_y} = dv\mathbf{e_v}$$

Logo:

$$d\vec{\beta} = d\beta\mathbf{e}_\beta + \beta dv\mathbf{e_v}$$

Analogamente, o diferencial do vetor posição da imagem $\vec{\theta}$ será

$$d\vec{\theta} = d\theta \mathbf{e}_\beta + \theta dv \mathbf{e}_\mathbf{v},$$

lembrando que os unitários radial e azimutal são os mesmos nos dois planos, pois trata-se de uma massa pontual e o problema tem simetria circular. Ou seja, um deslocamento radial da posição da fonte ($d\beta$) é acompanhado por um deslocamento da posição da imagem ($d\theta$) ao longo da mesma direção . E um deslocamento na posição azimutal da fonte vai corresponder a um deslocamento pelo mesmo ângulo (mas com raios β e θ não necessariamente iguais) na posição azimutal da imagem.

A matriz A é definida como

$$\frac{d\vec{\beta}}{d\vec{\theta}}$$

Seus termos serão portanto:

$$A_{11} = \frac{d\beta}{d\theta}$$

$$A_{12} = \frac{1}{\theta}\frac{d\beta}{dv} = 0$$

$$A_{21} = \beta\frac{dv}{d\theta} = 0$$

$$A_{22} = \frac{\beta dv}{\theta dv} = \frac{\beta}{\theta}$$

$A_{12} = A_{21} = 0$ pela simetria circular do problema. Ou seja, um deslocamento radial da fonte em seu plano não leva a um deslocamento azimutal da imagem, mas apenas a um delocamento radial da mesma. E vice-versa.

Logo,

$$detA = A_{11}\ A_{22} = \frac{\beta}{\theta}\frac{d\beta}{d\theta}$$

A amplificação é definida como

$$\mu = \frac{1}{detA} = \frac{\theta}{\beta}\frac{d\theta}{d\beta}$$

Essa expressão para a amplificação vale para qualquer lente com simetria circular, ainda que a tenhamos deduzido para uma massa pontual.

Amplificação no caso de lente massa pontual

No caso de uma massa pontual a eq. da lente é dada por:

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

$$\frac{d\beta}{d\theta} = 1 + \frac{\theta_E^2}{\theta^2}$$

Logo:

$$detA = \big(1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\big)\big(1 + \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\big)$$

$$detA = \big(1 - \frac{\theta_E^4}{\theta^4}\big)$$

onde

$$\theta_E = \frac{4GMD_{ds}}{D_d D_s c^2}$$

Logo

$$\mu = \frac{1}{detA} = \big(1 - \frac{\theta_E^4}{\theta^4}\big)^{-1}$$

Portanto, a amplificação máxima (teoricamente infinita) no caso de uma lente pontual, ocorre quando

$$detA = 0 \rightarrow \theta = \theta_E$$

Vimos que este é o caso do anel de Einstein, que ocorre quando a fonte está perfeitamente alinhada com o centro da lente. Dizemos tecnicamente então que $\beta = 0$ é uma cáustica (locus no plano da fonte em que a amplificação é infinita), à qual corresponde à curva crítica do anel (curva crítica é o mapeamento da cáustica no plano da imagem).

À medida que a fonte se desalinha $\beta > 0$, a amplificação diminui e tende a zero. Isso é equivalente a dizer que, na prática, os arcos gravitacionais observados costumam estar próximos à curva crítica.

Amplificação no caso de lente esfera singular

No caso de uma esfera isotérmica singular, o problema novamente tem simetria circular e, como já vimos, pode ser tratado em uma dimensão . Mas a eq. da lente agora nos dá

$$\beta = \theta - \theta_E$$

onde

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma^2 D_{ds}}{D_s c^2}$$

Logo:

$$detA = \big(1 - \frac{\theta_E}{\theta}\big)$$

Então , novamente temos uma curva crítica na forma de uma anel de Einstein, em que $\theta = \theta_E$ e que novamente corresponde a uma cáustica pontual, $\beta = 0$.