FIS02012 - Relatividade Especial explicitando a velociadade da luz
Prof. Basílio X. Santiago

Estamos acostumados a usar o *sistema natural* de unidades, em que $c = 1$, tal como descrito no Cap. 1 do livro do Bernard Schutz.

Neste caso, por exemplo, o vetor deslocamento é dado por $\vec{dx} = (dt, dx, dy, dz)$ e o intervalo fica:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Temos que lembrar que a dimensionalidade correta para o intervalo exige que o intervalo temporal seja multiplicado por c. Então , mantendo a velocidade da luz explicitada teremos um novo vetor deslocamento:

$$\vec{dx} = (cdt, dx, dy, dz)$$

e o intervalo

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Isso significa que os componentes não nulos do tensor métrico de Minkowski são os mesmos: $g_{00} = -1; g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$

Lembrando que γ é adimensional, e novamente usando o argumento da dimensionalidade, as transformações de Lorentz, portanto, ficam:

$$\overline{ct} = \gamma ct - \frac{v}{c}\gamma x$$

$$\overline{x} = \gamma x - \frac{v}{c}\gamma ct$$

Se definimos então o quadri-vetor velocidade no referencial próprio (mesmo que instantâneo) de uma partícula como sendo $\vec{U} = (c, 0, 0, 0)$ temos que no referencial que se move a uma velocidade $-v$ com relação à partícula:

$$\vec{U} = (\gamma c, \gamma v, 0, 0)$$

O quadri-vetor momentum então fica:

$$\vec{p} = m\vec{U} = (m\gamma c, m\gamma v, 0, 0)$$

Computando a magnitude de $\vec{p}$:

$$\vec{p}.\vec{p} = -c^2 m^2 \gamma^2 + m^2 \gamma^2 v^2$$

$$\vec{p}.\vec{p} = -c^2 m^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -m^2 c^2$$

Já a magnitude do quadri-vetor velocidade fica:

$$\vec{U}.\vec{U} = -c^2$$

Lembrando que a magnitude de $\vec{p}$ é

$$\vec{p}.\vec{p} = -(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2 c^2$$

e que o componente $p^0 = E/c$, onde E é a energia da partícula, temos:

$$-\frac{E^2}{c^2} + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2 c^2$$

$$-E^2 + [(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2]c^2 = -m^2 c^4$$

$$E^2 = m^2 c^4 + [(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2]c^2$$