

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Estrelas de nêutrons em teorias relativísticas de campos médios \*

André Ribeiro Taurines

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. César Augusto Zen Vasconcellos e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre  
1999

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*aos meus pais*

# Agradecimentos

ao professor César Vasconcellos,  
pela dedicação e orientação  
em um trabalho tão interessante;

ao Demétrio, Enilda, Veva, Miriam e Daniel,  
pelo constante incentivo;

à Verônica, pelo apoio nos momentos finais;

ao pessoal do grupo de Física de Hádrons,  
Guilherme, Lutz, Moisés, Mesquita, Sérgio e Alberto,  
pelas produtivas discussões e esclarecimentos de conceitos;

aos colegas da sala M208,  
Henrique, Marco, Gustavo, Arlei, Job e Júlio  
que estiveram comigo nestes dois anos;

à Silvia, da biblioteca,  
pela sua competência  
e boa vontade;

a Toga<sup>TM</sup> produções,  
pelos bons momentos proporcionados.

# Resumo

Neste trabalho aplicamos a teoria relativística de campos médios na fenomenologia de estrelas de nêutrons. Além do original modelo de Walecka, analisamos as propriedades nucleares dos modelos Não-Linear, ZM e ZM3 e a extensão deles para abarcar o octeto bariônico fundamental; o estudo deste lagrangiano com híperons para os modelos ZM e ZM3 ainda não havia sido feito. O equilíbrio beta generalizado entre as partículas, a conservação da carga elétrica e bariônica, mais a equação para o campo  $\sigma$  constitui um sistema bastante acoplado de 11 equações a ser resolvido para encontrar-se as quantidades de cada espécie fermiônica; o autor deste trabalho desenvolveu um programa em computador que resolve numericamente este sistema com alto grau de precisão e integra a equação de estado resultante às equações de equilíbrio hidrostático (TOV). Obtemos valores para massa, raio, *redshift*, populações hiperônicas, distribuição radial das partículas, entre outras propriedades estelares. Ademais, o autor propõe um modelo fenomenológico novo, no qual se parametriza com constantes matemáticas a intensidade dos acoplamentos méson-núcleon. Estuda-se a influência desses acoplamentos na obtenção da massa efetiva, da incompressibilidade e do coeficiente relativístico; fazemos também uma análise da dependência da massa máxima de uma sequência de estrelas de nêutrons com estas propriedades nucleares.

# Abstract

In this work we apply the relativistic mean field theory to the phenomenology of neutron stars. Besides the original Walecka model, we analyze nuclear properties of the Non-Linear, ZM and ZM3 models and their extension to embrace the fundamental baryon octet; the study of the ZM and ZM3 lagrangians with hyperon degrees of freedom was done for the first time, as far as we know, in this work. The generalized beta equilibrium among the particles generates a strongly coupled system of 11 equations to be solved to find the different fermionic populations; the author of this work has developed a computational program which solves numerically this system of equations with high precision accuracy and which integrates the resulting equation of state to the hydrostatic equilibrium equations (TOV). We have obtained numerical values for the mass, radius, redshift, hyperon populations, radial distribution of particles, and for other relevant stellar properties. Furthermore, the author proposes a new phenomenological lagrangian model which exhibits a parametrization, through mathematical constants, of the intensity of the meson-nucleon coupling. We study the influence of these couplings in the determination of the nucleon effective mass, the compression modulus and the relativistic coefficient; we also analyze the dependence of the maximum mass of a neutron star sequence with these nuclear properties.

# Índice

<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>1. Estrelas Compactas</b> . . . . .	4
1.1 Introdução . . . . .	4
1.2 Evolução Estelar . . . . .	4
1.2.1 Anãs Brancas . . . . .	5
1.2.2 Estrelas de Nêutrons . . . . .	5
1.2.3 Buracos Negros . . . . .	6
1.3 Equilíbrio e Estabilidade de Estrelas . . . . .	6
1.4 Modelo de Gás Ideal de Férmions Degenerados . . . . .	12
1.5 Regimes Cinemáticos e Equação de Estado . . . . .	13
1.6 Estrelas Politrópicas . . . . .	14
1.7 Limites para Massa Máxima de Estrelas de Nêutrons . . . . .	16
<b>2. Teoria relativística de campos médios</b> . . . . .	20
2.1 Introdução . . . . .	20
2.2 Propriedades da Matéria Nuclear . . . . .	21
2.3 Modelo $\sigma - \omega$ . . . . .	24
2.4 Aperfeiçoamentos . . . . .	32
2.4.1 Introdução do Méson $\rho$ . . . . .	32
2.4.2 Generalização para o Octeto Bariônico . . . . .	36
2.5 Modelos alternativos . . . . .	38
2.5.1 Modelo Não-Linear de Boguta-Bodmer (NL) . . . . .	39
2.5.2 Modelos com Acoplamento Derivativo (ZM) . . . . .	41
<b>3. Teoria de Estrelas de Nêutrons</b> . . . . .	46
3.1 Introdução . . . . .	46
3.2 Evidências Experimentais: Pulsares . . . . .	47
3.3 Características Gerais . . . . .	50
3.3.1 Neutralidade Elétrica . . . . .	50
3.3.2 Equilíbrio Químico . . . . .	51
3.4 Populações Bariônicas na Estrela . . . . .	52
3.5 Propriedades de Estrelas de Nêutrons . . . . .	55

---

<b>4. Modelo com Acoplamento Ajustável</b> . . . . .	63
4.1 Introdução . . . . .	63
4.2 Modelos Fenomenológicos e um Modelo com Acoplamento Ajustável . . . . .	64
4.3 Propriedades nucleares do Modelo com Acoplamento Ajustável . . . . .	68
4.4 Estrelas de Nêutrons e o Modelo com Acoplamento Ajustável . . . . .	72
<b>Conclusão</b> . . . . .	83
<b>A. Notação e Fatores de Conversão</b> . . . . .	84
<b>B. Equações de Equilíbrio Químico</b> . . . . .	86
<b>Bibliografia</b> . . . . .	88

# Introdução

Tem-se utilizado na busca da descrição das propriedades globais do núcleo a tradicional teoria não-relativística de Brueckner [1] a qual se baseia em potenciais derivados do espalhamento entre núcleons livres. No entanto, a grande diferença entre a interação forte no vácuo e a existente em sistemas de muitos corpos como o núcleo tem levado esta teoria a, por exemplo, superestimar a densidade de saturação da matéria nuclear em até 50% [2]. Em sistemas com densidades maiores que a nuclear, como as encontradas em *estrelas de nêutrons*, as deficiências desta teoria aumentam, comprometendo até a causalidade. Para estes sistemas é imprescindível a utilização de uma *teoria relativística* que descreva a interação forte.

A *cromodinâmica quântica* (QCD) atende a estas exigências e acredita-se que seja, de fato, a teoria fundamental da interação forte. Nesta teoria, considera-se que os hádrons (bárions e mésons) sejam compostos por quarks e anti-quarks os quais interagem entre si via troca de glúons. Seria natural aplicar esta teoria baseada em graus de liberdade tão elementares como os dos quarks e glúons na descrição da matéria nuclear, já que os núcleons (prótons e nêutrons) são bárions. Porém, esta teoria se mostra muito complexa e avessa a desenvolvimentos teóricos quando se tenta a partir dela explicar as propriedades nucleares; por ser tão fundamental, a QCD procura descrever, a partir de graus de liberdade quarkônicos elementares, um sistema de muitos corpos (o núcleo) em que estes graus de liberdades estão *embutidos* em partículas compostas como os núcleons. Isto acopla muito as equações da teoria tornando-as praticamente intratáveis. De fato, na escala da energia nuclear (MeV) os graus de liberdade importantes são os dos núcleons.

Pensando nisso, Walecka [3] apresentou uma teoria relativística de campos médios na qual considera os núcleons interagindo entre si através da troca de mésons escalares e vetoriais, sem considerar explicitamente a presença de quarks; os mésons escalares correspondem à componente atrativa da força nuclear e os vetoriais à repulsiva. Este modelo, conhecido como *modelo de Walecka* ou QHD <sup>1</sup>, possui duas constantes de acoplamento as quais *não* são determinadas a partir do espalhamento entre núcleons; elas são tais que a teoria consiga reproduzir a energia de ligação do núcleo e sua densidade de saturação. É uma *teoria efetiva*, já que a influência do meio e dos graus de liberdade mais elementares estão embutidos nestas constantes de acoplamento. Muitos bons resultados foram obtidos na descrição de propriedades de partícula única do núcleo finito, como distribuição de carga e interação spin-órbita, aplicando-se este modelo [4].

No entanto, nesta teoria algumas propriedades nucleares são superestimadas, como a incompressibilidade da matéria nuclear ( $560\text{ MeV}$ ), e outras subestimadas, como a massa

---

<sup>1</sup> *Quantum HadroDynamics*.

efetiva do núcleon no meio (55% da massa do núcleon livre). Com o objetivo de sanar estas deficiências, modelos alternativos, mas que seguem a mesma filosofia, apareceram na literatura. O modelo Não-Linear de Boguta-Bodmer [5] introduz termos de auto-acoplamento do méson escalar  $\sigma$ ; troca do acoplamento mínimo de Yukawa entre o méson escalar e o núcleon por um do tipo derivativo foi a sugestão de Zimanyi e Moszkowski (modelo ZM [6]).

Teorias do tipo QHD são bastante adequadas à descrição da matéria em estrelas de nêutrons, pois nestes modelos o formalismo é covariante e, portanto, a causalidade é intrinsecamente respeitada. Além disso, a *aproximação de campo médio* utilizada no modelo de Walecka e seus similares é tanto mais válida quanto maior a densidade de partículas.

A descrição destes objetos compactos estelares, as estrelas de nêutrons, é fundamental para a física nuclear, pois elas são um laboratório gigante para nossas investigações sobre o comportamento da equação de estado da matéria nuclear em densidades maiores que a densidade de saturação. De acordo com Lindblom [7], se obtivermos experimentalmente uma precisa relação entre a massa e o raio destas estrelas poderemos determinar biunivocamente esta equação de estado. Outra utilidade dos modelos de estrelas de nêutrons é a identificação de buracos negros, pois se medimos a massa de um objeto astrofísico compacto como sendo maior que a massa máxima de uma estrela de nêutrons, muito provavelmente trata-se de um buraco negro. Os pulsares só puderam ser identificados como estrelas de nêutrons altamente magnetizadas em rotação devido à prévia existência de modelos teóricos sobre aqueles objetos. Alterações no período de rotação dos pulsares têm sido suspeitas de indicarem a existência nestas estrelas da tão procurada transição hádron-plasma quark-glúon [8].

Glendenning desenvolveu um formalismo bastante completo [9] no qual descreve a matéria existente nas estrelas de nêutrons como composta em boa parte por *híperons* (bárions com estranheza não nula mais massivos que os núcleons); para tanto, utilizou a versão Não-Linear da teoria de Walecka de modo a incluir outras partículas como as do octeto bariônico fundamental ( $n, p, \Lambda, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-, \Xi^0$ ) e os léptons ( $e^-$  e  $\mu^-$ ). Com esta abordagem, consegue-se determinar como as diferentes partículas estão radialmente distribuídas nestas estrelas, além de valores para *redshift*, número bariônico, proporção híperon/núcleon, entre outras propriedades estelares. Seus resultados para massa máxima de uma sequência de estrelas de nêutrons estão em total acordo com as massas de *pulsares* já medidas. É propósito do presente trabalho estudar o formalismo desenvolvido por Glendenning na descrição das estrelas de nêutrons e estendê-lo a outros modelos do tipo QHD.

O capítulo 1 deste trabalho introduz o estudo das estrelas compactas (anãs brancas e estrelas de nêutrons), através de um simples modelo de gás degenerado de férmions livres. A equação de estado proveniente deste modelo é introduzida nas equações de equilíbrio hidrostático da estrela as quais, no contexto da Relatividade Geral, assumem a forma das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [10, 11]. Como resultado da integração destas equações encontramos uma relação entre a massa da estrela e sua densidade central. Desenvolvemos uma análise de estrelas politrópicas de modo a facilitar a compreensão da existência de uma massa limite para objetos compactos, como mostrou pioneiramente Chandrasekhar [12].

No segundo capítulo apresentamos o desenvolvimento teórico que sustenta o modelo de Walecka na descrição de propriedades do núcleo atômico. A partir de um lagrangiano com campos mesônicos e nucleônicos obtemos resultados para a massa efetiva do núcleon, a incompressibilidade da matéria nuclear e os potenciais escalar e vetorial. Para uma melhor

descrição da energia de simetria introduz-se o méson isovetorial  $\rho$ ; em seguida generalizamos o formalismo para abarcar todo o octeto bariônico fundamental. Apresentamos então os modelos alternativos que apareceram para corrigir as deficiências do modelo original de Walecka, como os já citados modelos Não-Linear e ZM, e uma versão deste último, o modelo ZM3 [6, 13]; estudamos as vantagens e desvantagens de cada um deles.

A teoria completa de Glendenning para estrelas de nêutrons é desenvolvida no capítulo 3. A partir da combinação das equações de equilíbrio químico entre as diversas partículas do sistema, dos resultados da teoria relativística de campos médios, e dos vínculos de conservação de carga elétrica e bariônica é possível determinar em que quantidades as partículas aparecem no sistema. Estas 11 equações acopladas entre si constituem um sistema bastante complexo que só pode ser resolvido numericamente com o auxílio do computador. O autor deste trabalho desenvolveu um programa em *Fortran 77*, com alto grau de precisão, que resolve este sistema de equações e depois encontra a equação de estado correspondente. Esta é a introduzida nas equações TOV, também resolvidas numericamente no programa, fornecendo, entre outras propriedades estelares, a massa e o raio da estrela como função de sua densidade central.

No último capítulo desta dissertação o autor propõe, baseado numa natural generalização dos modelos existentes na literatura, um modelo com acoplamentos méson-núcleon controlados por um parâmetro matemático  $\lambda$ . Investigamos a dependência neste parâmetro das várias propriedades nucleares, como incompressibilidade, massa efetiva, potenciais escalar e vetorial. Em seguida estudamos os efeitos destes acoplamentos ajustáveis na massa máxima de uma sequência de estrelas de nêutrons e na proporção híperon/núcleon. Como os modelos ZM e ZM3 estão incluídos neste modelo geral, apresentamos, pela primeira vez no conhecimento do autor, uma abordagem da teoria de Glendenning para estrelas de nêutrons utilizando estes modelos.

## Capítulo 1

# Estrelas Compactas

### 1.1 Introdução

Neste capítulo acompanharemos a evolução das estrelas desde sua formação até sua fase final, compacta. Como veremos na seção 1.2, este último estágio pode ser de três tipos: anã branca, estrela de nêutrons ou buraco negro, dependendo da massa que a estrela que os originou possuía na sequência principal.

Como esses objetos compactos produzem um campo gravitacional muito intenso, as equações de equilíbrio hidrostático precisam ser adequadas à Teoria da Relatividade Geral (TRG). Conjugadas a condições de estabilidade microscópicas, estas equações nos fornecem as configurações possíveis para anãs brancas e estrelas de nêutrons (seção 1.3). Uma sequência destas configurações pode ser desenvolvida se possuímos uma equação de estado da matéria, baseada em algum modelo teórico.

Um modelo simples de gás de Fermi ideal descreve de maneira satisfatória as principais características dos dois primeiros tipos de objetos compactos. Na seção 1.4 mostraremos como este modelo consegue explicar o mecanismo que possibilita o equilíbrio nas estrelas compactas, qual seja, a pressão de férmions degenerados. Para uma melhor compreensão do desenvolvimento que se segue no capítulo 3, aplicaremos o modelo ao caso das anãs brancas. Apesar de não serem o foco de nosso trabalho, elas servirão para ilustrar claramente como, a partir de um equação de estado, pode-se obter resultados tão úteis como a relação massa-raio ou a massa máxima que uma estrela compacta pode ter. Estas considerações estão nas seções 1.5 e 1.6

Na última seção, baseados em princípios físicos bastante gerais, apresentamos os limites inferior e superior para as massas máximas de estrelas de nêutrons. Modelos mais realísticos, como o que desenvolvemos nos próximos capítulos, nos fornecem valores de massas máximas que se situam entre estes extremos. Como demandam um formalismo diferente que foge ao escopo do presente trabalho, não nos aprofundamos no estudo dos buracos negros.

### 1.2 Evolução Estelar

“No princípio era o pó”; as nuvens de poeira que existem no meio interestelar podem colapsar sob a influência de fatores como rotação, pressão, ondas de choque e gravidade; a região de matéria concentrada em equilíbrio que se forma é conhecida como *protoestrela*

<sup>1</sup>. Nela, a compressão gerada pela força gravitacional provoca aumento de densidade e temperatura em sua região central. Este gradiente térmico induz uma diferença de pressão a qual sustentará temporariamente a estrutura estelar.

Irradiação de parte da energia da estrela debilita o balanço deste quase-equilíbrio hidrostático a favor da gravidade propiciando o aumento da densidade central e, consequentemente, o aquecimento desta região. Quando for alcançada a temperatura de ignição de fusão do núcleo do hidrogênio em hélio, a estrela estará entrando em sua fase luminosa mais duradoura, a sequência principal.

Fusão termonuclear é a fonte de energia que impede o colapso gravitacional destas estrelas e as faz brilhar até o momento em que forem produzidos núcleos de  $^{56}Fe$  no caroço central; fusão além deste elemento não é exotérmica.

Quando todo o hidrogênio for consumido no caroço da estrela, começa a fusão do hélio; o hidrogênio continua queimando em camadas mais externas. O mesmo processo acontece agora com o hélio: o carbono produzido por sua queima o substitui no caroço deslocando-o para fora. Desta forma, camadas concêntricas de elementos em fusão vão se formando cada vez que elementos mais pesados são produzidos nas regiões mais internas; quanto mais massivo o núcleo, menor é a duração da fase. À medida que cada elemento é consumido, o caroço se contrai até atingir a temperatura necessária para o início de um novo processo de fusão.

Dependendo de sua massa neste estágio de sua evolução, a estrela poderá seguir três caminhos distintos transformando-se em uma *anã branca*, uma *estrela de nêutrons*, ou um *buraco negro*.

### 1.2.1 Anãs Brancas

Para estrelas de até 8 massas solares ( $M_{\odot} \sim 2 \times 10^{33}g$ ), as camadas de núcleos leves ao redor do caroço se expandem até formarem uma *gigante vermelha*. Paralelamente, a região central continua fundindo núcleos mais pesados e se contraindo mais a cada novo elemento formado. Às vezes, esta transição para uma nova fusão é violenta podendo causar explosiva expulsão do envelope externo, fenômeno que provoca o aparecimento de uma *nebulosa planetária*.

A constituição do caroço remanescente dependerá do último estágio de combustão antes da instabilidade expulsar o envelope, mas em geral é formado de hélio, carbono e oxigênio. A pressão de elétrons degenerados será o sustentáculo desta nova estrutura cuja temperatura é insuficiente para fundir núcleos; é chamada *anã branca* devido ao pequeno raio ( $\sim 10^3km$ ) e à alta temperatura superficial ( $8000K$ ). Nosso sol está fadado a este fim, mas como a rapidez com que as transformações que ocorrem numa estrela é proporcional à sua massa, o astro-rei ainda terá 5 bilhões de anos antes de colapsar.

### 1.2.2 Estrelas de Nêutrons

Estrelas com mais de oito massas solares têm um destino diferente: elas fundem elementos cada vez mais pesados e seu envelope agora expande-se até  $10^8km$  formando uma

---

<sup>1</sup> A massa mínima necessária para que a nuvem desabe sobre si mesma é conhecida como massa de Jeans, função de densidade e temperatura.

*supergigante vermelha*. Seu caroço de alguns milhares de quilômetros funde-se até alcançar o limite do ferro quando cessa a fusão nesta região, continuando nas camadas externas com Si, C, entre outros. Como nas anãs brancas, o novo balanço hidrostático do caroço será proporcionado pela pressão dos elétrons não-relativísticos degenerados.

À medida que as camadas ao redor do caroço de ferro acrescentam-lhe massa, os elétrons vão se tornando relativísticos. Neste estágio, o aumento de sua contribuição para a pressão é deficitário frente ao paralelo aumento da densidade. Além disso, um estado de energia mais baixa pode ser atingido através da captura de elétrons por prótons (*neutronização*), o que acarreta uma diminuição da pressão de sustentação. Estes fatores concorrem para a existência de uma massa máxima para este tipo de objeto além da qual o caroço de ferro não suportaria a atração gravitacional e colapsaria.

A partir daí começa uma rápida implosão do caroço que desencadeará um processo dinamicamente complexo denominado explosão de *supernova*. Deste fenômeno astrofísico resta um caroço quente - *estrela protoneutrônica* - com temperatura de dezenas de  $MeV$ , mas que se esfria rapidamente para um  $MeV$  ou menos. Temos então a configuração final não colapsada para estrelas de massa maior que  $8M_{\odot}$ : uma *estrela de nêutrons* constituída principalmente de nêutrons, mas também de prótons, híperons, léptons e, talvez, plasma de quarks e glúons, distribuídos em um raio de  $\sim 10km$  e densidade de  $\sim 10^{15}g/cm^3$ . As evidências experimentais deste tipo de objetos são os *pulsares*, estrelas de nêutrons altamente magnetizadas em rotação que possuem um cone de radiação que nos atinge periodicamente. Uma análise mais detalhada destes objetos será feita no capítulo 3.

### 1.2.3 Buracos Negros

Por vezes, a explosão em supernova não consegue expulsar quantidade suficiente de material e o colapso gravitacional torna-se inevitável, já que nem mesmo a pressão dos núcleons degenerados somada à componente repulsiva da força nuclear pode sustentar estrelas com massa acima do limite de Oppenheimer-Volkoff, abordado na próxima seção; aparece então um objeto colapsado denominado *buraco negro*.

Este tipo de objeto compacto pode também se formar de outras formas. Uma delas decorre do fenômeno da *hiperonização* nas estrelas protoneutrônicas, o qual, similarmente à neutronização, reduz a pressão dos nêutrons e prótons através de sua conversão em híperons, podendo provocar o colapso da estrela. Buracos negros de pequena massa ( $\sim 1.5M_{\odot}$ ) são formados neste tipo de processo.

Acrescimento de massa de companheiras de estrelas de nêutrons em sistemas binários e a condensação de densos aglomerados de estrelas também podem dar origem a buracos negros, sendo este último tipo *suspeito* de protagonizar o núcleo de galáxias ativas por ser do tipo supermassivo ( $10^3 - 10^8M_{\odot}$ ).

## 1.3 Equilíbrio e Estabilidade de Estrelas

Os três tipos de objetos compactos vistos na seção anterior demandam uma abordagem baseada na Teoria da Relatividade Geral (TRG), pois os potenciais gravitacionais envolvidos

Objeto	Massa $M_{\odot}$	Raio $(R_{\odot})$	Densidade $g/cm^3$	Potencial $GM/Rc^2$
Sol	1	1	1	$10^{-6}$
Anã Branca	$\sim 1$	$10^{-2}$	$10^7$	$\sim 10^{-4}$
Estrela de Nêutrons	1 – 3	$\sim 10^{-5}$	$10^{15}$	$\sim 10^{-1}$
Buraco Negro	Arbitrário	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$	$\sim 1$

**Tab. 1.1:** *Comparação entre propriedades do Sol com diferentes objetos estelares compactos.  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}g$ ,  $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 km$*

têm tal intensidade que a formulação newtoniana deixa de ter validade, como pode ser visto na tabela 1.1. Apesar disso, as anãs brancas têm sido tratadas na maioria das vezes com a teoria de Newton, já que as correções da TRG são, neste caso, bastante pequenas.

De modo a resolvermos as equações de Einstein <sup>2</sup> para nosso problema introduziremos algumas hipóteses. Primeiramente, supomos que a matéria na estrela se comporta como um fluido perfeito. Assim, o tensor energia-momentum toma a forma [14]

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \varepsilon)u^{\mu}u^{\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $g^{\mu\nu}$  é o tensor métrico (ver Apêndice A),  $p$  é a pressão,  $\varepsilon$  é a densidade de energia e  $u^{\mu} \equiv dx^{\mu}/d\tau$  é a quadri-velocidade de um elemento do fluido. Também consideramos a estrela como sendo relativística, esfericamente simétrica e estática. A métrica mais geral nestas condições é

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sen^2\theta d\phi^2, \quad (1.2)$$

o que nos permite identificar para as componentes do tensor métrico:

$$g_{00} = e^{2\nu(r)}, \quad g_{11} = -e^{2\lambda(r)}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2sen^2\theta. \quad (1.3)$$

Esta é a conhecida métrica de Schwarzschild [15].

Os componentes do tensor de Ricci, que decorrem desta escolha são:

$$\begin{aligned} R_{00} &= (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r})e^{2(\nu-\lambda)}; \\ R_{11} &= \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}; \\ R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1; \\ R_{33} &= R_{22}sen^2\theta. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Na região de espaço vazio, exterior à estrela, as equações de Einstein são

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0, \quad (1.5)$$

---

<sup>2</sup> A partir deste ponto utilizaremos a convenção  $G = c = 1$  exposta no Apêndice A. Neste apêndice também aparece um resumo da formulação lagrangiana da TRG.

o que leva, a partir da definição da curvatura escalar,

$$R \equiv g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

a  $R = 0$  e  $R^{\mu\nu} = 0$ . Aplicando estas relações em (1.4) obtemos a solução encontrada por Schwarzschild em 1916 [16], válida para  $r \geq R_*$  (região exterior à estrela):

$$\begin{aligned} g_{00}(r) &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right); \\ g_{11}(r) &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Na região interior à estrela ( $r \leq R_*$ ), devido à presença de matéria, as equações de Einstein precisam incluir o tensor energia-momentum,  $T^{\mu\nu}$ , na forma:

$$G^{\mu\nu} = -8\pi T^{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

onde  $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$  é denominado tensor de Einstein. Desta forma, a curvatura escalar não mais se anula e precisamos calculá-la. A partir da expressão (1.6), encontramos

$$R = e^{-2\lambda} \left( -2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + 4\frac{\lambda'}{r} - 4\frac{\nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2}, \quad (1.9)$$

o que nos permitirá calcular os componentes de  $G^{\mu\nu}$  visto que já temos os elementos de  $R^{\mu\nu}$  (eq. 1.4).

Da hipótese de que a estrela é estática, temos

$$u^m = 0, \quad (m = 1, 2, 3); \quad (1.10)$$

notando que  $u_\mu u^\mu = 1$  vem

$$u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}. \quad (1.11)$$

Substituindo estes resultados em (1.1) obtemos

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_m^m = -p \text{ (sem soma sobre o índice } m\text{)}. \quad (1.12)$$

Combinando (1.4), (1.6) e (1.12) encontramos as seguintes expressões para as componentes do tensor de Einstein:

$$G_0^0 = e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\varepsilon(r); \quad (1.13)$$

$$G_1^1 = e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p(r); \quad (1.14)$$

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi p(r); \quad (1.15)$$

$$G_3^3 = G_2^2 = 8\pi p(r). \quad (1.16)$$

A integração da equação (1.13) leva a

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{8\pi}{r} \int_0^r \varepsilon(r)r^2 dr. \quad (1.17)$$

Definindo a massa gravitacional da estrela contida num volume de raio  $r$  como

$$M(r) \equiv 4\pi \int_0^r \varepsilon(r)r^2 dr, \quad (1.18)$$

obtemos

$$g_{11} = -e^{2\lambda(r)} = - \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1}. \quad (1.19)$$

Nota-se que a componente radial do tensor métrico possui formas muito parecidas dentro e fora da estrela (ver eq. (1.7)).

De modo a se obter as equações de equilíbrio estelar expressas em função de grandezas físicas como massa, raio, densidade de energia e pressão, seria adequado que tivéssemos expressões de  $\lambda'$ ,  $\nu'$  e  $\nu''$  dependentes apenas daquelas grandezas<sup>3</sup>. Para tanto, isolemos  $\lambda'$  em (1.13):

$$2r\lambda' = (1 - 8\pi r^2 \varepsilon)e^{2\lambda} - 1, \quad (1.20)$$

e  $\nu'$  em (1.14):

$$2r\nu' = (1 + 8\pi r^2 p)e^{2\lambda} - 1. \quad (1.21)$$

Tomando-se a derivada radial da equação acima, obtemos a seguinte expressão para  $\nu''$ :

$$2r^2\nu'' = 1 + (16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p')e^{2\lambda} - (1 + 8\pi r^2 p)(1 - 8\pi r^2 \varepsilon)e^{4\lambda}. \quad (1.22)$$

Substituindo as equações (1.20), (1.21) e (1.22) em (1.15), única das equações de Einstein que ainda não havíamos utilizado, obtemos

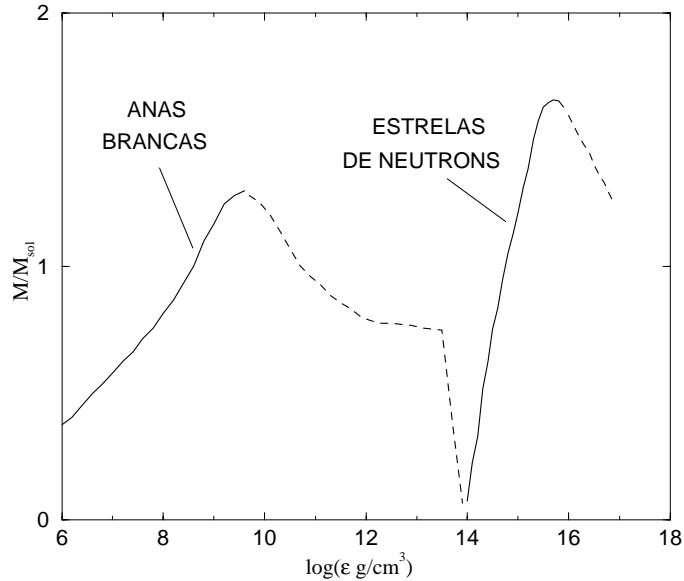
$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)\varepsilon(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)} \right) \left( 1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right) \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1}. \quad (1.23)$$

As expressões (1.18) e (1.23) são conhecidas como equações de *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (TOV) [10, 11]. A interpretação física destas equações torna-se simples quando as rearranjamos na forma

$$4\pi r^2 dp = -\frac{M(r)dM(r)}{r^2} \left( 1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)} \right) \left( 1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right) \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1}, \quad (1.24)$$

onde  $dM(r) = 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr$ . O lado esquerdo da expressão se refere à força que a pressão interna exerce sobre uma casca esférica em  $r$  de espessura  $dr$  e massa  $dM(r)$ ; no primeiro termo do lado direito está a atração gravitacional que a massa gravitacional contida em  $r$

<sup>3</sup> Note-se que  $\lambda(r)$  é função explícita de  $M(r)$  de acordo com (1.19).



**Fig. 1.1:** Massa de objetos estelares compactos em função de sua densidade central,  $\epsilon_c$ .

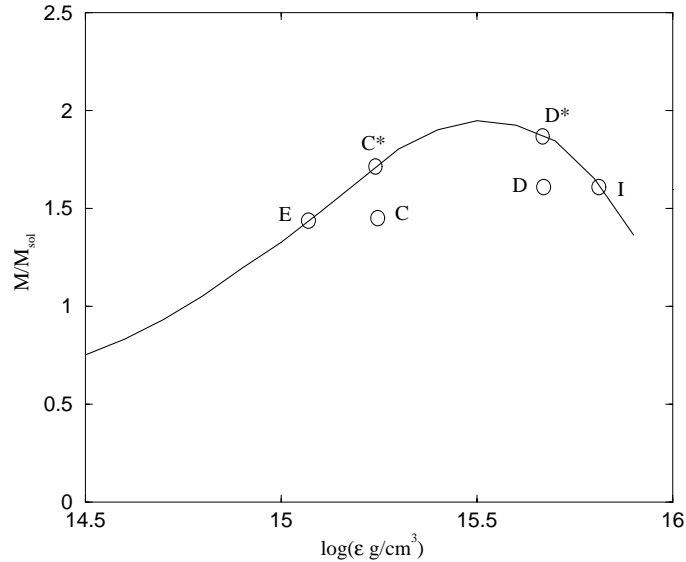
exerce sobre a casca. Os demais termos entre parênteses são as correções à teoria newtoniana, originárias da Relatividade Geral. Deve-se notar que estas correções são todas positivas (ver seção 1.7), de modo a garantir que o gradiente da pressão seja sempre negativo, ou seja, tanto maior a pressão quanto mais nos aproximamos do centro da estrela. Para estrelas como nosso sol estes termos são desprezíveis, pois  $p \ll \epsilon$  para astros não relativísticos e, portanto,  $p/\bar{\epsilon} \ll M(r)/(4\pi r^3 \bar{\epsilon}/3)$ , ou,  $4\pi r^3 \ll M(r)$ . Além disso, como podemos ver na tabela 1.1,  $M_{\odot}/R_{\odot} \sim 10^{-6}$ .

Estas equações devem ser integradas desde a origem, onde  $M(0) = 0$  e  $\epsilon(0) \equiv \epsilon_c$ , até que se atinja um raio,  $R$ , em que a pressão é nula. Não sendo possível suportar qualquer massa, define-se este ponto como o raio da estrela e  $M(R)$  como a massa gravitacional que se mede nas observações. Para cada equação de estado (e.g.  $\epsilon = \epsilon(p)$ ) que introduzimos nestas equações, obtemos uma relação única entre a massa da estrela e sua densidade central (fig. 1.1).

As equações TOV garantem o equilíbrio hidrostático, mas não asseguram a estabilidade da estrela já que se pode estar tanto num ponto de mínima ou de máxima energia. Sendo respeitada a condição de estabilidade microscópica da matéria,  $dp/d\rho \geq 0$ , e portanto o princípio de Le Chatelier, pode-se notar na figura 1.1 que existem duas regiões de configurações estáveis ao longo de um grande intervalo de densidade central: a região correspondente às anãs brancas e a que corresponde a estrelas de nêutrons<sup>4</sup>. As estrelas que aparecem na figura 1.1 nas linhas pontilhadas são instáveis frente a modos radiais de oscilação [17].

Pode ser mostrado [18] que uma condição necessária mas não suficiente para a existência

<sup>4</sup> É claro que para densidades centrais mais baixas apareceriam outras configurações estáveis como planetas e anãs marrons.



**Fig. 1.2:** Típica solução das equações TOV para estrelas compactas. Estrelas no trecho da curva com inclinação positiva são estáveis frente a perturbações.

de configurações estáveis numa sequência de estrelas é

$$\frac{\partial M(\epsilon_c)}{\partial \epsilon_c} > 0. \quad (1.25)$$

Uma interpretação física desta condição pode ser obtida da análise da figura 1.2 a qual exhibe uma sequência de estrelas compactas nas proximidades da região de massa máxima. Suponhamos que o equilíbrio da estrela E seja perturbado e sua configuração se desloque para o ponto C; para se reequilibrar a estrela deveria adquirir massa e ir para o ponto C\*. Como isto não é possível, aparece um déficit de massa que favorece a componente da pressão no balanço hidrostático. Como resultado disso, a densidade central volta a diminuir e retoma seu valor de equilíbrio em E. Analisando-se o caso de uma perturbação em uma estrela em I que a leve para um ponto D de densidade central menor, a nova configuração de equilíbrio exigirá um aumento de massa para alcançar D\*. Novamente, isto não é possível e aparece um déficit de massa o qual favorecerá a componente da pressão. Como no caso da estrela E, uma diminuição da densidade central advém daí, mas neste caso este efeito estará afastando ainda mais a estrela D de sua configuração de equilíbrio em I. Esta análise vale também para uma perturbação que inicialmente provoque um excesso de massa. Portanto, estrelas numa sequência que não obedecem a condição (1.25) são instáveis.

Sendo esclarecidos estes aspectos quanto ao equilíbrio e à estabilidade de estrelas compactas, podemos nos lançar à busca do ingrediente mais importante na modelagem destes objetos que é a sua equação de estado. Para tanto, utilizaremos inicialmente o modelo mais simples de gás de férmions degenerados para obter resultados gerais para anãs brancas e estrelas de nêutrons, como fizeram pioneiramente Chandrasekhar [12] e Landau [19], respectivamente. Apesar da ênfase deste trabalho ser as estrelas de nêutrons, consideramos oportuno desenvolver sucintamente as equações de equilíbrio para estrelas politrópicas, pois, nestas, podemos encontrar soluções analíticas que facilitam a compreensão dos fenômenos

mais importantes envolvidos.

## 1.4 Modelo de Gás Ideal de Férmions Degenerados

Neste conhecido modelo, as partículas obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli: somente um férmion pode ocupar um dado estado quântico; o termo *ideal* se refere à desconsideração de qualquer tipo de interação entre os componentes do sistema e *degenerado* significa o preenchimento de todos os estados quânticos possíveis, compatíveis com o Princípio de Pauli, até o nível de Fermi. Esta última hipótese baseia-se na suposição de que a temperatura é desprezível frente à energia de Fermi,  $k_B T \ll E_F$ . Nas anãs brancas a temperatura é de  $\sim 10^7 K$  e a energia de Fermi dos elétrons será, no mínimo, igual à massa do elétron livre,  $m_e = 0.511 MeV$  ou  $6 \times 10^9 K$ , validando a aproximação. Nas estrelas de nêutrons a validade é ainda mais garantida, pois as energias de Fermi envolvidas são da ordem de  $10^3 MeV$  (massa de repouso do núcleon) e as temperaturas não passam de um  $MeV$ .

Para cada tipo de férmion num gás nestas condições temos densidade de energia, pressão e densidade de partículas iguais a [18]:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + m^2} k^2 dk; \\ p &= \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} k^2 dk; \\ \rho &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Nestas expressões,  $\gamma$  denota a degenerescência do estado quântico, ou seja, quantas partículas podem ser distinguidas em um mesmo nível de energia através de um outro número quântico (em geral, o spin). Claramente, para prótons, nêutrons e elétrons  $\gamma = 2$ . Deve-se notar que a pressão de fato obedece a relação termodinâmica  $p = \rho^2 \partial(\varepsilon/\rho)/\partial\rho$ .

Consideremos um gás de nêutrons, prótons e elétrons livres vinculados pela conservação de carga bariônica e elétrica. Esta configuração está em *equilíbrio beta*,

$$n \rightleftharpoons p^+ + e^- + \bar{\nu},\tag{1.27}$$

e corresponde ao estado de mais baixa energia do sistema. Das equações (1.26), cada uma das partículas contribue para a densidade de energia, pressão e densidade de partícula através de

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \bar{\mu}_i k_{F,i} (\bar{\mu}_i^2 - \frac{1}{2} m_i^2) - \frac{1}{2} m_i^4 \ln \left| \frac{\bar{\mu}_i + k_{F,i}}{m_i} \right| \right]; \\ p_i &= \frac{1}{12\pi^2} \left[ \bar{\mu}_i k_{F,i} (\bar{\mu}_i^2 - \frac{5}{2} m_i^2) + \frac{3}{2} m_i^4 \ln \left| \frac{\bar{\mu}_i + k_{F,i}}{m_i} \right| \right]; \\ \rho_i &= \frac{k_{F,i}^3}{3\pi^2}; \quad i = n, p, e,\end{aligned}\tag{1.28}$$

onde  $\bar{\mu}_i = \sqrt{k_{F,i}^2 + m_i^2}$  é a energia de Fermi e também, como veremos a seguir, o potencial químico da partícula  $i$ .

Como se pode ver no apêndice B, quando temos  $p$  componentes em um sistema vinculado por  $q$  grandezas conservadas e queremos minimizar a energia do sistema, sempre poderemos expressar os potenciais químicos dos  $p$  componentes em função de apenas  $q$  desses potenciais. Em nosso caso, temos três partículas e duas grandezas conservadas:

$$\begin{aligned}\rho_B &= \rho_p + \rho_n; \\ \rho_e &= \rho_p,\end{aligned}\tag{1.29}$$

o que nos dá dois potenciais químicos independentes, digamos  $\mu_e$  e  $\mu_n$ . Da equação de equilíbrio beta (1.27) e de (B.6), a expressão para  $\mu_p$  será

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e,\tag{1.30}$$

onde

$$\mu_i \equiv \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \rho_i} = \sqrt{k_{F,i}^2 + m_i^2}.\tag{1.31}$$

Assim, podemos de fato identificar  $\bar{\mu}_i = \mu_i$ . Na próxima seção estudaremos os limites de alta e baixa densidade destas equações os quais nos ajudarão a determinar a equação de estado para o gás ideal de férmions degenerados.

## 1.5 Regimes Cinemáticos e Equação de Estado

Podemos identificar dois limites: o ultra-relativístico (ou de alta densidade), em que se considera  $k_{F,i} \gg m_i$  e o não relativístico (ou de baixa densidade), em que  $k_{F,i} \ll m_i$ .

No regime de altas densidades, desprezando-se as massas das partículas em (1.28), obtemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &\approx \frac{k_{F,i}^4}{4\pi^2} = 12(3\pi^2)^{1/3} \rho_i^{4/3}; \\ p_i &\approx \frac{k_{F,i}^4}{12\pi^2} = 4(3\pi^2)^{1/3} \rho_i^{4/3};\end{aligned}\tag{1.32}$$

ou

$$p_i = \frac{\varepsilon_i}{3}.\tag{1.33}$$

A baixas densidades, a aproximação  $k_{F,i}/m_i \ll 1$  leva a

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &\approx \frac{m_i^4}{\pi^2} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^3 + \frac{1}{10} \left( \frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^5 \right] = \rho_i m_i + \frac{3}{10m_i} (3\pi^2)^{2/3} \rho_i^{5/3}; \\ p_i &\approx \frac{m_i^4}{3\pi^2} \left[ \frac{1}{5} \left( \frac{k_{F,i}}{m_i} \right)^5 \right] = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5m_i} \rho_i^{5/3}.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Baseados nas expressões acima, podemos investigar as contribuições de cada partícula à pressão do sistema em determinado intervalo de densidade de energia.

Abaixo da densidade em que se inicia a produção de nêutrons ( $1,25 \times 10^7 g/cm^3$ , conhecida como *limiar do nêutron*), o gás, neutro, é composto apenas de prótons e elétrons não relativísticos. Comparando-se as pressões destas partículas, utilizando os resultados de (1.34), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{p_e}{p_p} &= \frac{m_p}{m_e} \gg 1; \\ \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_p} &= \frac{m_e}{m_p} \ll 1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Abaixo das densidades típicas de estrelas de nêutrons ( $\sim 10^{15} g/cm^3$ ) e acima do limiar do nêutron, os elétrons serão relativísticos ( $k_{F,e} \gg m_e$ ), mas os prótons e nêutrons não ( $k_{F,p}, k_{F,n} \ll m_N$ ). Considerando-se que nesta região os núcleons estejam ligados em núcleos e que a energia de simetria<sup>5</sup> leve a  $k_p \sim k_n$ , sua contribuição para a densidade de energia é

$$\varepsilon_N = \rho_e m_N \nu, \quad (1.36)$$

onde  $\nu = (\rho_p + \rho_n)/\rho_e$  é o número médio de núcleons por elétron. Esta contribuição será predominante na densidade de energia total, já que  $\varepsilon_{elet} \sim k_{F,e}^4 \ll m_N$ . Porém, a parte correspondente aos elétrons na pressão continua prevalecendo:

$$\frac{p_e}{p_p} = \frac{5 m_p}{4 k_e} \gg 1. \quad (1.37)$$

Desta forma, vemos que até densidades de  $\sim 10^9 g/cm^3$  estas estrelas, as anãs brancas, serão sustentadas pela pressão de elétrons relativísticos degenerados.

Para densidades superiores a  $10^{14} g/cm^3$ , como nas estrelas de nêutrons, todas as partículas tornam-se relativísticas. A resolução da equação de equilíbrio químico (1.30), desprezando-se as massas, nos informa que a proporção entre nêutrons, prótons e elétrons será de 8 : 1 : 1, ou seja,  $k_{F,n} \gg k_{F,p}, k_{F,e}$ . Comparando-se a contribuição de cada partícula para a pressão (eq (1.32)), podemos notar que, mesmo neste modelo simples, a pressão de nêutrons relativísticos degenerados será o elemento que evitará o colapso da estrela de nêutrons.

## 1.6 Estrelas Politrópicas

No domínio das anãs brancas discutido na seção anterior, vimos que os elétrons dominam a pressão, mas em quase nada contribuem para a densidade de energia. Além disso, como  $p_e \ll \varepsilon_e$  e  $\varepsilon_e \ll \varepsilon_{p,n}$  podemos afirmar que a pressão total será muito menor que a densidade de energia total ( $p \ll \varepsilon$ ). Nesta aproximação, como já vimos, pode-se desprezar os três termos provenientes da TRG em (1.23), ficando a equação de equilíbrio hidrostático na forma

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)\varepsilon(r)}{r^2}, \quad (1.38)$$

---

<sup>5</sup> Tendência que os núcleos têm de serem mais estáveis quando o número de prótons é igual ao de nêutrons. No próximo capítulo estudamos a energia de simetria em mais detalhes.

ou, combinando-se esta expressão com (1.18),

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 dp}{\varepsilon dr} \right) = -4\pi r^2 \varepsilon. \quad (1.39)$$

Ao inserir na equação acima uma equação de estado do tipo

$$p = K\varepsilon^\gamma, \quad (1.40)$$

a massa e o raio da estrela aparecem sob a forma de uma expressão analítica, como veremos. Estrelas que obedecem a uma equação de estado do tipo (1.40) são denominadas *politrópicas*.

Uma equação diferencial conhecida pode ser obtida de (1.39) e (1.40) se introduzirmos a transformação:

$$r = \left( \frac{K\gamma}{4\pi(\gamma-1)} \right)^{1/2} \varepsilon_c^{\frac{\gamma-2}{2}} \xi, \quad \varepsilon = \varepsilon_c \theta^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (1.41)$$

onde  $\varepsilon_c = \varepsilon(0)$  e  $\theta = \theta(\xi)$ . Resulta desta substituição a equação de *Lane-Emden* [20] de índice  $(\gamma-1)^{-1}$ :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0, \quad (1.42)$$

com condições iniciais  $\theta(0) = 1$  e  $\theta'(0) = 0$  que saem de  $\varepsilon_c = \varepsilon(0)$  e  $p'(0) = 0$ . Obtendo-se  $\theta(\xi)$ , seu primeiro zero, definido como  $\xi_1$ , corresponderá ao raio da estrela, pois neste ponto a pressão se anula.

Das definições (1.41) e utilizando-se a expressão da equação de Lane-Emden, pode-se mostrar que

$$R = \left( \frac{K\gamma}{4\pi(\gamma-1)} \right)^{1/2} \varepsilon_c^{\frac{\gamma-2}{2}} \xi_1, \quad (1.43)$$

e

$$M(R) = 4\pi \varepsilon_c^{(3\gamma-4)/2} \left( \frac{K\gamma}{4\pi(\gamma-1)} \right)^{3/2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (1.44)$$

É interessante notar que, de acordo com (1.25), uma condição que deve ser satisfeita por uma equação de estado politrópica para garantir sua estabilidade é que  $\gamma$  seja superior a  $4/3$ .

Na região de elétrons não-relativísticos, a equação politrópica correspondente aparece das expressões (1.34) e (1.36):

$$p = K\varepsilon^\gamma, \quad K = \frac{1}{15\pi^2 m_e} \left( \frac{3\pi^2}{m_N \nu} \right)^\gamma, \quad \gamma = 5/3. \quad (1.45)$$

Para este valor de  $\gamma$ , a equação (1.42) nos dá  $\xi_1^2 = 3.65$  e  $\theta'(\xi_1) = -0.2$ . Assim, teremos para a massa da estrela

$$M = 2.79 \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{m_e}} \right)^{1/2} M_\odot, \quad (1.46)$$

onde  $\varepsilon_{m_e} = [m_e^2/(3\pi^2)]m_N$  é a densidade de energia em que  $k_{F,e} = m_e$ . Quanto menor  $\varepsilon_c/\varepsilon_{m_e}$ , melhor será a aproximação.

Também temos uma equação politrópica para nossos resultados utilizando a aproximação ultra-relativística (ver eq. (1.32)):

$$p = K\varepsilon^\gamma, \quad K = \frac{1}{12\pi^2} \left( \frac{3\pi^2}{m_N\nu} \right)^\gamma, \quad \gamma = 4/3. \quad (1.47)$$

Das expressões (1.43) e (1.44), nota-se que

$$R \sim M^{(\gamma-2)/(3\gamma-4)}, \quad (1.48)$$

e, portanto, para  $\gamma \rightarrow 4/3$  o raio da estrela tende a zero e a massa a um único valor, fazendo com que  $\varepsilon_c \rightarrow \infty$ . Para este valor de  $\gamma$ , a resolução da equação de Lane-Emden nos dá  $\xi_1 = 6.90$  e  $\theta'(\xi_1) = -0.04$ , e um valor para a massa da estrela de

$$M = 5.87\nu^{-2}M_\odot. \quad (1.49)$$

Esta é a expressão da *massa máxima para anãs brancas*, primeiramente derivada por Chandrasekhar [12, 20]. Para anãs compostas principalmente de  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$  e  ${}^{16}\text{O}$ , temos  $\nu \sim 2$ , o que leva a uma massa máxima de  $1.5M_\odot$ .

Para um gás degenerado de nêutrons relativísticos, a equação de estado seria simplesmente  $p = \varepsilon/3$ . A aproximação  $p \ll \varepsilon$  que fizemos para chegar a (1.38) não é mais válida e temos que utilizar as equações TOV com todos os seus termos.

## 1.7 Limites para Massa Máxima de Estrelas de Nêutrons

Um limite inferior para a maior massa possível para as estrelas de nêutrons sai do modelo de gás degenerado de nêutrons relativísticos. Nesta abordagem, não se considera nenhum tipo de interação entre as partículas, o que não é realístico. No grau de compactação de uma estrela de nêutrons, a componente repulsiva da força forte é predominante e fundamental na construção da equação de estado. Num gás livre, o fato de não haver outro ingrediente anti-colapso além do Princípio de Pauli faz com que a pressão não possa suportar o campo gravitacional associado a grandes massas. Por isso, a massa máxima que advir deste modelo será considerada um limite inferior. Em 1939, Oppenheimer e Volkoff [11] aplicaram esse modelo às soluções das equações de Einstein em esferas de fluidos que Tolman [10] acabava de encontrar; eles obtiveram para a massa máxima da estrela,  $M_{max}$ , raio,  $R$  e densidade central,  $\varepsilon_c$ , respectivamente:

$$M_{max} = 0.71M_\odot; \quad R = 9.5km; \quad \varepsilon_c = 5 \times 10^{15}g/cm^{-3}. \quad (1.50)$$

Um limite superior pode ser encontrado na análise de Rhoades e Ruffini [21]. Estes autores partiram de princípios muito gerais para chegar a uma equação de estado próxima ao limite causal:

- vale a equação (1.23) para a estrutura estelar (desconsidera-se rotação, por exemplo);
- vale o princípio de Le Chatelier:  $dp/d\varepsilon \geq 0$ ;
- velocidade do som menor que a da luz:  $\sqrt{dp/d\varepsilon} < 1$ ;
- a equação de estado no limite causal para altas densidades deve conectar-se continuamente a uma equação de estado para baixas densidades.

Adotaremos a equação de Bethe-Baym-Pethick-Sutherland-Siemens (BPS) [22] para baixas densidades. De acordo com os princípios acima pode-se propor uma densidade de energia e pressão dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\rho) &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_f - p_f + (\varepsilon_f + p_f) \left( \frac{\rho}{\rho_f} \right)^2 \right]; \\ p(\rho) &= \varepsilon(\rho) - \varepsilon_f + p_f,\end{aligned}\tag{1.51}$$

onde  $\varepsilon_f$  e  $p_f$  denotam o ponto em que a equação de estado no limite causal se encontra com a BPS. Note-se que a pressão obedece a relação termodinâmica  $p = \rho^2 \partial(\varepsilon/\rho)/\partial\rho$ .

As equações de equilíbrio hidrostático (1.18) e (1.23) mantém a mesma forma quando escritas nas variáveis reescaloadas:

$$\bar{p} = p/a, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon/a, \quad \bar{r} = \sqrt{ar}, \quad \bar{M} = \sqrt{a}M.\tag{1.52}$$

Assim, se definimos  $a \equiv \varepsilon_f - p_f$ , teremos como equação de estado no limite causal  $\bar{p} = \bar{\varepsilon} - 1$  e podemos integrar as equações TOV sem que seja necessário especificar o ponto de conexão entre as equações de estado. Além disso, tendo escolhido um valor de  $a$ , podemos facilmente encontrar resultados para um outro ponto  $a'$  através de (1.52):

$$R(a') = \sqrt{a/a'}R(a), \quad M(a') = \sqrt{a/a'}M(a).\tag{1.53}$$

Não podemos escolher o ponto de conexão em densidades muito baixas como a densidade de saturação, pois do contrário estaríamos considerando que a equação de estado a partir dessa densidade tem comportamento no limite causal, o que não é realístico. Fazendo o ponto de encontro ser em  $\varepsilon_f = 4.636 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$  e  $p_f = 6.1 \times 10^{32} \text{dina/cm}^2$ , a resolução da equação OTV para esta equação de estado nos leva, para a estrela de massa máxima, a [23]:

$$M = 3.14M_{\odot} \quad \text{e} \quad R = 13.4 \text{km}.\tag{1.54}$$

Se considerássemos a densidade de saturação como o ponto de conexão teríamos uma massa máxima de  $4.3M_{\odot}$ , mas já vimos que esta não seria uma escolha adequada. O limite de  $3.14M_{\odot}$  encontrado por Rhoades e Ruffini parece ser o melhor valor. Qualquer outra equação de estado deverá fornecer uma massa máxima menor que esta.

Podemos encontrar um limite interessante para a razão massa-raio em uma estrela de nêutrons; a restrição sai da análise das equações TOV para uma estrela de densidade constante [15]. Tal estrela é hipotética, pois deveria ser constituída de matéria incompressível para poder sustentar a estrutura estelar. De fato, como veremos no capítulo 3, a

densidade de energia em uma estrela de nêutrons se não é constante, varia muito pouco ao longo de seu raio.

Para uma estrela de densidade constante  $\varepsilon_0$ , a sua massa será dada por (1.18):

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0 r^3. \quad (1.55)$$

Substituindo esse resultado em (1.23) e integrando a expressão resultante em relação ao raio, obtemos

$$\frac{p(r) + \varepsilon_0}{3p(r) + \varepsilon_0} = \sqrt{\frac{1 - 2M/R}{1 - 2Mr^2/R^3}}. \quad (1.56)$$

Podemos encontrar desta equação uma expressão para  $p(r)$ :

$$p(r) = \varepsilon_0 \left[ \frac{\sqrt{1 - 2M/R} - \sqrt{1 - 2Mr^2/R^3}}{\sqrt{1 - 2Mr^2/R^3} - 3\sqrt{1 - 2M/R}} \right], \quad (1.57)$$

e outra para  $2M/R$ :

$$\frac{2M}{R} = 1 - \left( \frac{p_c + \varepsilon_0}{3p_c + \varepsilon_0} \right)^2, \quad (1.58)$$

onde  $p_c = p(0)$  é a pressão central. Aumentando o raio da estrela, cresce sua massa, mas também sua pressão central. A maior massa possível seria aquela em que  $p_c$  fosse tão grande que pudéssemos desprezar  $\varepsilon_0$  da expressão (1.58), fornecendo-nos um limite para a razão massa-raio

$$\frac{2M}{R} < \frac{8}{9}. \quad (1.59)$$

Weinberg em [15] mostra que a relação acima de fato vale para *qualquer* estrela estática, baseado apenas na não-singularidade da função métrica temporal  $\nu(r)$  (ver (1.3)).

Este limite serve para encontrarmos o valor máximo do *desvio para o vermelho* (*redshift*) sofrido pela radiação emitida por uma estrela. Suponhamos um átomo excitado na superfície da estrela e um observador a uma distância muito grande dela. O intervalo entre duas cristas de onda da radiação emitida pelo átomo na superfície da estrela será

$$d\tau_s = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{00}(R)}dx^0. \quad (1.60)$$

Quando as duas cristas chegarem ao observador no infinito, o intervalo medido entre os dois eventos de recepção será

$$d\tau_o = \sqrt{g_{00}(\infty)}dx^0. \quad (1.61)$$

Utilizando a métrica de Schwarzschild, podemos ver que a razão entre as frequências da radiação medidas em  $s$  e em  $o$  será:

$$\frac{\omega_o}{\omega_s} = \left( \frac{g_{00}(R)}{g_{00}(\infty)} \right)^{1/2} = \sqrt{1 - 2M/R}. \quad (1.62)$$

Convencionalmente, o desvio para o vermelho ( $z$ ) é expresso como a razão entre a diferença entre os comprimentos de onda da radiação com e sem campo gravitacional e o comprimento de onda na ausência do campo:

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{\omega_s}{\omega_o} - 1, \quad (1.63)$$

ou, em nossa métrica,

$$z = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} - 1. \quad (1.64)$$

De acordo com (1.59), sempre teremos  $z < 2$ .

No próximo capítulo desenvolvemos uma teoria para a matéria existente nas estrelas de nêutrons, de modo a encontrar uma equação de estado mais realística que as aplicadas até aqui. Isto, somado às características gerais de estrelas de nêutrons, discutidas no capítulo 3, permitir-nos-á encontrar melhores valores para a massa, o raio, o número bariônico, entre outras grandezas, para esses objetos estelares.

## Capítulo 2

# Teoria relativística de campos médios

### 2.1 Introdução

A teoria mais aceita na descrição da interação forte é a *Cromodinâmica Quântica* (QCD); bárions e mésons constituídos por quarks interagindo via troca de glúons. Estes, ao contrário dos fótons na eletrodinâmica quântica, possuem a carga associada à interação (*carga de cor*) e interagem uns com uns outros, o que complica muito o formalismo e torna a teoria quase intratável. No limite de altas densidades ou de grandes transferências de momentum, a descrição dos processos pela QCD é facilitada pelo fenômeno da *liberdade assintótica*; os quarks interagem muito fracamente e podem ser usados métodos de perturbação. Para densidades da ordem da densidade nuclear, o alto grau de acoplamento das partículas é revelado no *confinamento* dos quarks em bárions e mésons. A teoria mostra-se então extremamente complexa e avessa aos métodos tradicionais de aproximação.

Inúmeras tentativas de contornar este problema - fundamental para a física nuclear - foram feitas, principalmente através do desenvolvimento de modelos fenomenológicos. Entre os mais importantes estão os modelos de sacola, os modelos de sólitons topológicos e as teorias relativísticas de campos médios; estas últimas são o tema do presente capítulo e serão a base de nossa descrição da matéria em estrelas de nêutrons.

Uma teoria relativística de campos médios [4] é covariante e leva em conta apenas os graus de liberdade hadrônicos que, de fato, são os mais importantes na escala de densidades considerada. Neste modelo, os bárions interagem entre si através da troca dos mésons  $\sigma$  e  $\omega$ <sup>1</sup> aos quais correspondem, respectivamente, as componentes atrativa e repulsiva da força forte. Além de descrever bem propriedades de partícula única do núcleo finito, também apresenta bom desempenho na descrição das propriedades globais da matéria nuclear (*bulk nuclear matter*), relevantes no estudo de estrelas de nêutrons. As constantes de acoplamento do modelo são determinadas de modo a reproduzirem as energias de ligação por núcleon e a densidade de saturação da matéria nuclear. Um terceiro méson, o  $\varrho$ , é inserido na teoria para reproduzir a energia de simetria da matéria nuclear, a qual favorece estados com mínima diferença entre o número de prótons e de nêutrons.

A introdução de bárions mais pesados, os híperons, se faz necessária para densidades

---

<sup>1</sup> Na verdade não existe uma partícula  $\sigma$ ; esta é uma partícula virtual que apenas parametriza as componentes escalares das diversas partículas que participam da componente atrativa da força nuclear, como os píons.

maiores que a de saturação nuclear. Infelizmente, estas partículas não aparecem no estado fundamental da matéria nuclear, o que dificulta a análise de suas propriedades. Algumas suposições deverão ser feitas para encontrar as constantes de acoplamento associadas à interação dos híperons com os mésons  $\sigma, \omega$  e  $\rho$ .

Neste capítulo, primeiramente vamos discutir as propriedades da matéria nuclear que queremos reproduzir e só então apresentar o lagrangiano do modelo  $\sigma - \omega$  básico, também conhecido como modelo de Walecka ou modelo da hadrodinâmica quântica (QHD-I). Em seguida, justificamos a introdução do méson  $\rho$  na teoria e depois apresentamos a generalização necessária para abrigar todo o octeto bariônico fundamental.

## 2.2 Propriedades da Matéria Nuclear

A partir das principais características do núcleo atômico pretendemos poder descrever razoavelmente a matéria extremamente densa nas estrelas de nêutrons. Estes objetos compactos possuem uma carga bariônica ( $A$ ) muito grande, da ordem de  $10^{57}$ . É, portanto, apropriado descrevê-las considerando as propriedades da *matéria nuclear infinita* que definiremos a seguir.

A célebre fórmula semi-empírica de massa desenvolvida por Weiszacker [24] a partir do modelo nuclear de gota líquida, trouxe a noção de matéria nuclear infinita. Mesmo sendo uma idealização, suas propriedades esclarecem muito dos fenômenos que ocorrem no núcleo finito como densidade de saturação, papel da repulsão coulombiana, entre outros.

Essencialmente, a fórmula semi-empírica de massa nos fornece a massa de um núcleo qualquer como função apenas de  $Z$  e  $N$  (número de prótons e nêutrons, respectivamente). Várias contribuições são consideradas na elaboração da fórmula, sendo as mais importantes a energia de volume, a energia de superfície, a repulsão coulombiana e a energia de simetria. A expressão para a energia de ligação total do núcleo é

$$B(A, Z) = -a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 Z^2 A^{-1/3} + a_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}. \quad (2.1)$$

A massa do núcleo será igual a soma das massas dos núcleons livres menos o módulo da energia de ligação,  $|B(A, Z)|$ . Interpretamos cada um dos termos abaixo.

A principal característica do núcleo é a existência de uma densidade de saturação, originária da componente repulsiva da força nuclear. Quando adicionamos mais núcleons a um núcleo saturado a densidade de sua região central não aumenta mais como acontecia até aquele momento. Assim, com uma densidade aproximadamente constante, podemos definir o volume de um único núcleon como  $v$  e o do núcleo todo como  $V = Av$ . Idealizando o núcleo como uma esfera, tiramos que  $R_{nuc} = r_0 A^{1/3}$ , onde  $r_0$  é uma constante que poderia ser interpretada grosseiramente como o raio de um núcleon típico nesta densidade. Esta contribuição para a fórmula semi-empírica se chama *energia de volume* e é o primeiro termo da expressão (2.1), proporcional a  $A$ .

Os núcleons na superfície do núcleo interagem apenas com as partículas mais internas, ou seja, possuem um número menor de vizinhos. Assim, a energia de ligação diminui e temos que introduzir na fórmula semi-empírica o termo conhecido como *energia de superfície*; este será proporcional a  $R_{nuc}^2$  ou, desde que  $R_{nuc} \sim A^{1/3}$ , a  $A^{2/3}$ . É o segundo termo da equação (2.1).

Há que se levar em conta também a repulsão coulombiana entre os prótons no núcleo. De um resultado elementar da eletrostática, se considerarmos essas partículas como cargas positivas distribuídas uniformemente em uma esfera de raio igual ao do núcleo, teremos uma *energia de repulsão* igual a

$$E_{coul} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{R_{nucl}} \sim \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \quad (2.2)$$

ou seja, proporcional a  $Z^2 A^{-1/3}$ ; o fator de proporcionalidade é representado por  $a_3$  na equação (2.1).

À medida que adicionamos mais núcleons, a repulsão coulombiana entre os prótons obriga-nos a acrescentar uma proporção cada vez maior de nêutrons para conseguirmos manter o núcleo ligado. Porém, sabe-se que os núcleos tendem a ter um número igual de prótons e nêutrons ( $N = Z$ ). Desta forma, é necessário adicionar um termo de *energia de simetria* que favorecerá estados com mínima diferença entre  $N$  e  $Z$ . Como os dados experimentais indicam que para uma mesma razão  $N/Z$ , um núcleo com o dobro de partículas tem o dobro de energia de simetria, concluímos que este termo deverá ser proporcional a  $A$ . Um desvio da situação ideal  $N = Z = A/2$ , resultará numa diminuição de  $|B(A, Z)|$ ; assim:

$$E_{simetria} \propto \left( \frac{1}{2} - \frac{Z}{N+Z} \right)^2 A \equiv a_4 A^{-1} (A - 2Z)^2. \quad (2.3)$$

Este é o último termo da expressão para a energia de ligação total do núcleo. De acordo com [25, 26], temos

$$a_1 \sim 16.0 MeV, \quad a_2 \sim 17.8 MeV, \quad a_3 \sim 0.710 MeV \quad \text{e} \quad a_4 \sim 32.5 MeV. \quad (2.4)$$

Segundo a definição de [1], a substância nuclear hipotética que se cria ao desligarmos a interação eletromagnética e fazemos  $A \rightarrow \infty$ , mantendo  $N = Z$ , se chama *matéria nuclear infinita simétrica*. É fácil ver que ao dividirmos (2.1) por  $A$  e tomarmos os limites acima, o único termo que sobra em (2.1) é o termo que corresponde à energia de volume:

$$\frac{B(A \rightarrow \infty, Z = A/2)}{A} \equiv \frac{B}{A} = -16.0 MeV. \quad (2.5)$$

O parâmetro  $r_0 = 1.17 fm$  é determinado nas análises de espalhamento elétron-núcleo; como o volume de um núcleon com este raio é  $(4\pi/3)r_0^3$ , a densidade de partícula da matéria nuclear será

$$\rho_0 = \frac{1}{(4\pi/3)r_0^3} = 0.15 fm^{-3}. \quad (2.6)$$

A densidade acima é denominada *densidade de saturação*. Os valores de  $B/A$  e  $\rho_0$  servirão para normalizar a equação de estado nuclear fornecendo-nos as constantes de acoplamento de nosso modelo fenomenológico.

Como vimos no capítulo anterior, estrelas de nêutrons são objetos fortemente assimétricos em isospin, pois elas são eletricamente neutras, sendo o número de nêutrons bastante superior ao de prótons e elétrons. Porém, uma das características da força nuclear é favorecer

estados com simetria em isospin. Assim, um modelo que queira descrever da melhor maneira possível a matéria nestas estrelas deverá poder reproduzir o coeficiente da energia de simetria  $a_{sim} \equiv a_4$ .

Podemos identificar  $B(A, Z)/A$  com  $\varepsilon/\rho - M$ , onde  $\varepsilon$  é a densidade de energia.  $\varepsilon_0/\rho_0$  será a soma do termo constante da energia de volume  $-a_1$  mais alguma contribuição que aparecer do termo de energia de simetria, para o caso em que  $N \neq Z$ . Uma variação infinitesimal de  $\varepsilon/\rho$  em relação à simetria corresponderá a uma variação no termo  $a_{sim}$ . Definindo  $t \equiv (N - Z)/A = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ , teremos

$$2a_{sim} t dt = d(\varepsilon/\rho),$$

$$a_{sim} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2(\varepsilon/\rho)}{\partial t^2} \right)_{t=0}. \quad (2.7)$$

Outra importante propriedade da matéria nuclear que deve ser reproduzida em nossa teoria é a incompressibilidade ou módulo de compressão,  $K$ . Ela indica a concavidade da equação de estado  $\rho \times \varepsilon/\rho$  na densidade de saturação, como pode ser visto a partir de sua definição [1]:

$$K = \left[ k^2 \frac{d^2}{dk^2} \left( \frac{\varepsilon}{\rho} \right) \right]_{k=k_F}. \quad (2.8)$$

Como indica o comportamento da equação de estado para altas densidades, esta grandeza será fundamental na determinação das massas das estrelas de nêutrons. Seus melhores valores saem das análises de ressonâncias gigantes monopulares (modos de oscilação radiais do núcleo), mas a margem de erro em sua determinação ainda é grande com  $K$  ficando entre  $200 - 300 MeV$  [27, 28].

Por último, mas não menos importante, seria adequado que nossa teoria reproduzisse os resultados experimentais para a massa efetiva do núcleon,  $M^*$ . Esta grandeza exprime o desvio na massa dos núcleons que aparece decorrente de sua interação com os mésons escalares os quais correspondem às componentes escalares atrativas da força nuclear. Como veremos, a densidade de energia dependerá fundamentalmente de  $M^*$ , sendo, como a incompressibilidade, uma grandeza de enorme relevância na análise de estrelas de nêutrons. O espalhamento de nêutrons em núcleos de chumbo fornece valores para massa efetiva na densidade de saturação que vão de 0.7 a 0.8 vezes a massa do núcleon livre. Para efeito de esclarecimento, a massa efetiva medida nestes experimentos não é a massa efetiva de Dirac que veremos na próxima seção; antes, ela pode ser aproximadamente identificada com a massa efetiva de Landau, a qual guarda relação clara com a massa de Dirac:

$$M_{Landau}^* = \left( \frac{k}{\partial \varepsilon(k)/\partial k} \right)_{k_F} = \sqrt{k_F^2 + M_{Dirac}^{*2}}. \quad (2.9)$$

De acordo com o famoso artigo [29], que conta com a participação de um brasileiro, L. C. Gomes, um núcleo comporta-se como se fosse formado por núcleons movendo-se sob a ação de um campo médio. O modelo que iremos apresentar na próxima seção tem esta peculiaridade dos núcleons como pedra angular em seu desenvolvimento.

Partícula	Campo	Natureza	Massa (MeV)
Sigma	$\sigma$	escalar/isoescalar	520
Ômega	$\omega$	vetorial/isoescalar	783
Rô	$\varrho$	vetorial/isovetorial	770
Núcleons	$\psi$	espinorial	939

**Tab. 2.1:** Características das partículas presentes no modelo de Walecka.

## 2.3 Modelo $\sigma - \omega$

Estamos prontos para introduzir o lagrangiano da teoria de campos relativísticos<sup>2</sup> proposta por Walecka [3], mas antevista em trabalhos de Johnson e Teller [30] e Duerr [31]. Como já adiantamos, a descrição da matéria nuclear será feita inicialmente pelos campos dos núcleons, de um méson escalar  $\sigma$  e de um méson vetorial  $\omega$ . Na próxima seção vamos inserir o méson isovetorial  $\varrho$ ; as principais características destes campos estão mostradas na tabela 2.1.

Neste modelo, o acoplamento entre os campos nucleônicos e mesônicos é mínimo para que no limite de fontes estáticas ( $M \rightarrow \infty$ ) possamos restaurar o potencial de Yukawa [32]. A exigência de uma escalaridade nos leva a um lagrangiano de interação da forma:

$$\mathcal{L}_{int} = g_\sigma \sigma(x) \bar{\psi}(x) \psi(x) - g_\omega \bar{\psi}(x) \omega_\mu \gamma^\mu \psi(x). \quad (2.10)$$

Combinando com o lagrangiano livre das partículas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{livre} &= \bar{\psi}(x) [i\gamma_\mu \partial^\mu - M] \psi(x) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - m_\sigma^2 \sigma^2(x)) \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu}(x) \omega^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu(x) \omega^\mu(x), \end{aligned} \quad (2.11)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x) [i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig_\omega \omega^\mu(x)) - (M - g_\sigma \sigma(x))] \psi(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma(x) \partial^\mu \sigma(x) - m_\sigma^2 \sigma^2(x)) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu}(x) \omega^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu(x) \omega^\mu(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

como lagrangiano total do modelo básico de Walecka.

Aplicando a este lagrangiano as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi_i / \partial x^\mu)} \right) = 0, \quad (2.13)$$

onde  $\phi_i$  são os diferentes campos que compõem a teoria, encontramos as seguintes equações para os campos  $\sigma, \omega$  e  $\psi$ :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma(x) = g_\sigma \bar{\psi}(x) \psi(x); \quad (2.14)$$

$$\partial_\nu \omega^{\nu\mu} + m_\omega^2 \omega^\mu(x) = g_\omega \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x); \quad (2.15)$$

$$[i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig_\omega \omega^\mu(x)) - (M - g_\sigma \sigma(x))] \psi(x) = 0. \quad (2.16)$$

<sup>2</sup> Daqui pra frente usamos a convenção  $\hbar = c = 1$ .

A primeira equação é do tipo Klein-Gordon com uma fonte escalar de Lorentz, a densidade escalar  $\rho_s = \bar{\psi}\psi$ . A segunda é semelhante à que Proca utilizou para descrever um fóton massivo, mas com uma fonte vetorial de Lorentz, a corrente quadrivetorial bariônica  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Uma equação de Dirac com desvio na massa e no termo de quadrimomentum aparece como nossa última expressão.

Estas equações de campo estão fortemente acopladas e algum tipo de aproximação deve ser introduzida para podermos extrair resultados. Como as constantes de acoplamento para a força nuclear,  $g_\sigma$  e  $g_\omega$ , são expressivas precisamos lançar mão de algum método não perturbativo. Considerando a matéria nuclear como *uniforme, estática* e em seu *estado fundamental*, podemos enxergar o núcleon sob a ação de uma interação nuclear média [29] e trabalhar apenas com os valores médios dos campos dos mésons:  $\sigma \rightarrow \langle\sigma\rangle$  e  $\omega^\mu \rightarrow \langle\omega^\mu\rangle$ . Este tipo de abordagem é conhecida como *aproximação de campo médio* (ACM). Quanto maior a densidade bariônica melhor a validade dela, mostrando-se muito conveniente para aplicações em estrelas de nêutrons.

Como nesta aproximação não existe mais dependência espaço-temporal nos campos dos mésons, as equações para os campos ficam:

$$m_\sigma^2 \langle\sigma\rangle = g_\sigma \langle\bar{\psi}\psi\rangle; \quad (2.17)$$

$$m_\omega^2 \langle\omega^\mu\rangle = g_\omega \langle\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\rangle; \quad (2.18)$$

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu + ig_\omega\langle\omega^\mu\rangle) - (M - g_\sigma\langle\sigma\rangle)]\psi = 0. \quad (2.19)$$

Da equação (2.19) vemos que o campo dos núcleons representa um auto-estado de momentum, pois não há dependência espaço-temporal nos operadores que agem sobre ele. Assim, podemos escrever  $\psi(x) = \psi(k)e^{-ik\cdot x}$  e obter:

$$[\gamma_\mu(k^\mu - g_\omega\omega^\mu) - (M - g_\sigma\sigma)]\psi = 0. \quad (2.20)$$

Introduzindo as definições:

$$P_\mu \equiv k_\mu - g_\omega\omega_\mu; \quad (2.21)$$

$$M^* \equiv M - g_\sigma\sigma, \quad (2.22)$$

podemos reescrever (2.20) como:

$$(\gamma_\mu P^\mu - M^*)\psi(P) = 0. \quad (2.23)$$

Para racionalizar o operador de Dirac acima devemos multiplicar à esquerda por  $(\gamma_\mu P^\mu + M^*)$  e usar as propriedades das matrizes  $\gamma^\mu$  [33]. Disso obtemos:

$$(P_\mu P^\mu - M^{*2})\psi(P) = 0, \quad (2.24)$$

o que nos leva a

$$P_0 = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^{*2}}. \quad (2.25)$$

Assim, os auto-valores de energia com momentum  $\mathbf{k}$  para partículas e antipartículas serão:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{k}) &\equiv k_0(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}) + g_\omega\omega_0; \\ \bar{e}(\mathbf{k}) &= E(\mathbf{k}) - g_\omega\omega_0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde

$$E(\mathbf{k}) \equiv P_0(\mathbf{k}) = \sqrt{(\mathbf{k} - g_\omega \boldsymbol{\omega})^2 + (m - g_\sigma \sigma)^2}. \quad (2.27)$$

É adequado definir agora o potencial escalar (S) e vetorial (V); o primeiro é o desvio que a massa do núcleon sofre em decorrência da presença do méson escalar  $\sigma$  e, adotando a convenção de [13], pode ser definido como

$$S = M^* - M. \quad (2.28)$$

O potencial vetorial se refere ao desvio na energia de Fermi,  $k_0(\mathbf{k})$ , o qual apareceu quando introduzimos o méson vetorial  $\omega$  na teoria:

$$V = k_0(\mathbf{k}) - \sqrt{(\mathbf{k} - g_\omega \boldsymbol{\omega})^2 + M^{*2}}. \quad (2.29)$$

De (2.22) e (2.26), vê-se claramente que para o modelo de Walecka temos

$$S = -g_\sigma \sigma, \quad (2.30)$$

$$V = g_\omega \omega. \quad (2.31)$$

O próximo passo no tratamento do problema será o cálculo da densidade escalar e da corrente quadrvetorial bariônica presentes em (2.17) e (2.18). Serot e Walecka em [4] abordam o problema construindo o espinor dos núcleons em função de operadores de criação e destruição e utilizando as relações de anti-comutação destes operadores para chegar a expressões para a densidade e corrente.

Seguiremos, no entanto, um procedimento diferente e mais econômico mostrado por Glendenning em [9]. Cada estado de um núcleon é caracterizado pelo seu momentum  $\mathbf{k}$  e pelo seu spin e isospin, aos quais relacionaremos um único número quântico  $\kappa$ . O valor esperado de um operador  $\Gamma$  neste estado será  $\langle \bar{\psi} \Gamma \psi \rangle_{\mathbf{k}\kappa}$ ; o valor esperado em todo o sistema de muitos núcleons de nosso problema será a soma do valor esperado do operador em cada estado possível até o nível de Fermi, ou seja:

$$\langle \bar{\psi} \Gamma \psi \rangle = \sum_{\kappa} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (\bar{\psi} \Gamma \psi)_{\mathbf{k}\kappa} \Theta[\mu - e(\mathbf{k})], \quad (2.32)$$

onde  $\Theta(x)$  é a função de Heavside, igual a 1 para  $x \geq 0$  e a 0 nos demais intervalos, definida a partir da distribuição de Fermi-Dirac para partículas e antipartículas,  $n_\kappa(T)$  e  $\bar{n}_\kappa(T)$  respectivamente:

$$n_k(T) = \{ \exp[(e(k) - \mu)/k_B T] + 1 \}^{-1}; \quad (2.33)$$

$$\bar{n}_k(T) = \{ \exp[(e(k) + \mu)/k_B T] + 1 \}^{-1}, \quad (2.34)$$

quando se toma o limite à temperatura nula,  $T \rightarrow 0$ ;  $\mu$  é a energia de Fermi e em nosso caso igual a  $E(k_F) + g_\omega \omega_0$ .

Suponhamos que o operador geral  $\Gamma$  represente o hamiltoniano de Dirac, ou seja:

$$\Gamma \equiv H_D = \gamma_0[\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu + M^*]. \quad (2.35)$$

Como  $\psi$  é auto-estado deste operador, teremos:

$$(\psi^\dagger H_D \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = (\psi^\dagger \gamma_0 [\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu + M^*] \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = E(\mathbf{k}) + g_\omega \omega_0, \quad (2.36)$$

onde usamos a normalização

$$(\psi^\dagger \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = 1. \quad (2.37)$$

Tomemos a derivada da equação (2.36) em relação a uma grandeza  $\xi$  qualquer:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\psi^\dagger H_D \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = (\psi^\dagger \frac{\partial H_D}{\partial \xi} \psi)_{\mathbf{k}\kappa} + k_0(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi^\dagger \psi)_{\mathbf{k}\kappa}. \quad (2.38)$$

Como  $(\psi^\dagger \psi)_{\mathbf{k}\kappa}$  é constante, o último termo se anula. Para compreender o poder desta equação, derivemos (2.36) em relação a  $\omega_0$  para reencontrar a normalização dos campos nucleônicos:

$$(\psi^\dagger \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = 1. \quad (2.39)$$

Assim, temos a expressão para a densidade bariônica, fonte do campo  $\omega_0$  em (2.18):

$$\rho = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = 4 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Theta[\mu - e(\mathbf{k})], \quad (2.40)$$

onde 4 é a degenerescência de spin e isospin do núcleon.

Outro resultado interessante que podemos obter a partir de (2.38) vem da derivada em relação a  $k^i$ :

$$(\bar{\psi} \gamma^i \psi)_{\mathbf{k}\kappa} = \frac{\partial}{\partial k^i} E(\mathbf{k}). \quad (2.41)$$

A corrente vetorial bariônica fica:

$$\langle \bar{\psi} \gamma^i \psi \rangle = 4 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left( \frac{\partial}{\partial k^i} E(\mathbf{k}) \right) \Theta[\mu - e(\mathbf{k})], \quad (2.42)$$

$$= 4 \int \frac{dk^j dk^k}{(2\pi)^3} \int dE(k^j, k^k) = 0. \quad (2.43)$$

O valor de  $\mu$  é o mesmo em toda a superfície de Fermi, e portanto a integral será a diferença entre dois números iguais, ou seja, nula. Como consequência deste resultado, vemos da equação (2.18) que as componentes espaciais ( $\omega^i$ ) do campo  $\omega$  se anulam. As equações (2.26) e (2.27) ficam:

$$e(\mathbf{k}) = g_\omega \omega_0 + E(k); \quad (2.44)$$

$$E(\mathbf{k}) = \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2}, \quad (2.45)$$

e a superfície de Fermi é simplesmente uma esfera, o que nos permite resolver a integral em (2.40):

$$\rho = 4 \int_0^{k_F} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{2k_F^3}{3\pi^2}. \quad (2.46)$$

Podemos obter uma expressão para a densidade escalar  $\rho_s$ , fonte do méson escalar, derivando (2.36) em relação a  $M$ :

$$(\bar{\psi}\psi)_{\mathbf{k}\kappa} = \frac{\partial E(k)}{\partial M}. \quad (2.47)$$

Substituindo em (2.32), conseguimos finalmente:

$$\rho_s \equiv \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \frac{M - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2}}. \quad (2.48)$$

Sobraram-nos, assim, duas equações a resolver:

$$g_\sigma \sigma = \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \frac{M - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2}} \quad (2.49)$$

e

$$g_\omega \omega_0 = \left( \frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \rho. \quad (2.50)$$

Das expressões acima e de (2.44), vemos que à medida que a densidade bariônica cresce, a componente temporal do méson vetorial aumenta o auto-valor de energia num estado  $k$ , enquanto o méson escalar o diminui através da redução da massa efetiva. Como consequência, haverá uma densidade, dita de saturação, em que aparecerá um mínimo na energia por núcleon. Ao tentar reproduzir este mínimo de  $-16.0 MeV$  em  $\rho_0 = 0.15 fm^{-3}$ , é que determinaremos as constantes  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ , parâmetros da teoria.

Para encontrar a equação de estado, lembremos da expressão do tensor energia-momentum em uma formulação lagrangiana:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.51)$$

Seu valor esperado no sistema em repouso da matéria é diagonal (ver eq. (1.1)) e com os elementos não nulos iguais à pressão e à densidade de energia. Utilizando nosso lagrangiano, encontramos:

$$\varepsilon = -\langle \mathcal{L} \rangle + \langle \bar{\psi} \gamma_0 k_0 \psi \rangle; \quad (2.52)$$

$$p = \langle \mathcal{L} \rangle + \frac{1}{3} \langle \bar{\psi} \gamma_i k_i \psi \rangle. \quad (2.53)$$

Aplicando a ACM e a equação de Dirac ao lagrangiano (2.12) conseguimos:

$$\langle \mathcal{L} \rangle = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2. \quad (2.54)$$

O segundo termo aparecendo em  $\varepsilon$  é a contribuição à energia total do estado com momentum  $k$  até o nível de Fermi:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma_0 k_0 \psi \rangle &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk e(k), \\ &= m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

O termo que nos resta avaliar na expressão para a pressão sai ao derivarmos (2.36) em relação a  $\mathbf{k}$ :

$$(\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi)_{\mathbf{k}\kappa} = \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}. \quad (2.56)$$

Assim,

$$\langle \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}\psi \rangle = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma)^2}} dk. \quad (2.57)$$

Temos então as expressões completas para a densidade de energia e pressão:

$$\varepsilon = +\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma)^2}, \quad (2.58)$$

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma)^2}}. \quad (2.59)$$

Eliminando  $\rho$  de  $\varepsilon(\rho)$  e  $p(\rho)$ , obtemos a equação de estado procurada na forma  $p = p(\varepsilon)$  ou sua inversa. Deve-se notar a consistência termodinâmica da teoria, já que  $p = \rho^2 \partial(\varepsilon/\rho)/\partial\rho$ .

Na determinação dos parâmetros  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$  será útil a expressão para o potencial químico em  $\rho_0$ . Da primeira lei da termodinâmica temos:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN, \quad (2.60)$$

ou, derivando em relação a  $V$  e fazendo a temperatura igual a zero obtemos para o potencial químico:

$$\mu = \frac{\varepsilon + p}{\rho}. \quad (2.61)$$

Na densidade de saturação da matéria nuclear, a energia por núcleon ( $B/A \equiv \varepsilon/\rho - M$ ) atinge seu mínimo valor possível,  $B/A = -16.0 \text{ MeV}$ , fazendo com que a pressão vá a zero neste ponto (teorema de Hugenholtz-van Hove [34]). Definindo o potencial químico em  $\rho_0$  como  $\mu_0$ , teremos então:

$$\mu_0 = \varepsilon_0/\rho_0 = B/A + M. \quad (2.62)$$

Combinando a equação acima com o fato de que  $\mu = e(k_F)$ , encontramos:

$$g_\omega\omega_0 + \sqrt{k_{F0}^2 + M^{*2}} = B/A + M. \quad (2.63)$$

Usando a equação para o campo  $\omega_0$ :

$$\left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 = (B/A + M - \sqrt{k_{F0}^2 + M^{*2}})/\rho_0. \quad (2.64)$$

O valor de  $M^*$  na expressão acima será obtido resolvendo-se a equação auto-consistente que aparece quando introduzimos a equação de campo de  $\sigma$  na definição da massa efetiva:

$$M^* = M - \left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \frac{M - g_\sigma \sigma}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}}. \quad (2.65)$$

Uma terceira equação deve ser considerada na busca dos parâmetros da teoria; precisamos verificar se, de fato, a pressão está se anulando no ponto de saturação. De (2.59):

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{m_\sigma}{g_\sigma}\right)^2 (M - M^*)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{g_\omega}{m_\omega}\right)^2 \rho_0^2 + \frac{1}{3} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} = 0. \quad (2.66)$$

As três equações (2.64), (2.65) e (2.66) são funções de três variáveis:  $M^*$ ,  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ , sendo portanto um sistema totalmente determinado. No presente modelo, os valores encontrados<sup>3</sup> foram:

$$(g_\sigma/m_\sigma)^2 = 15.72 fm^2; \quad (2.67)$$

$$(g_\omega/m_\omega)^2 = 12.02 fm^2; \quad (2.68)$$

$$M^*/M = 0.54. \quad (2.69)$$

$$(2.70)$$

As figuras (2.1) foram produzidas utilizando-se estes parâmetros; aproveitamos para introduzir a equação de estado para a matéria de nêutrons ( $\gamma = 2$ ) nas equações OTV, mesmo não sendo realístico supor que uma estrela de nêutrons seja composta apenas de nêutrons. Também encontramos para o modelo de Walecka:

$$K = 560 MeV;$$

$$S = -433.45 MeV;$$

$$V = 355.67 MeV.$$

Esta massa efetiva de  $M^*/M = 0.54$  está fora do intervalo 0.7–0.8 de valores sugeridos pelos experimentos para esta grandeza; também a incompressibilidade de 560 MeV é demasiada alta. Para corrigir estas deficiências apresentaremos na seção 2.5 modelos alternativos a este de Walecka.

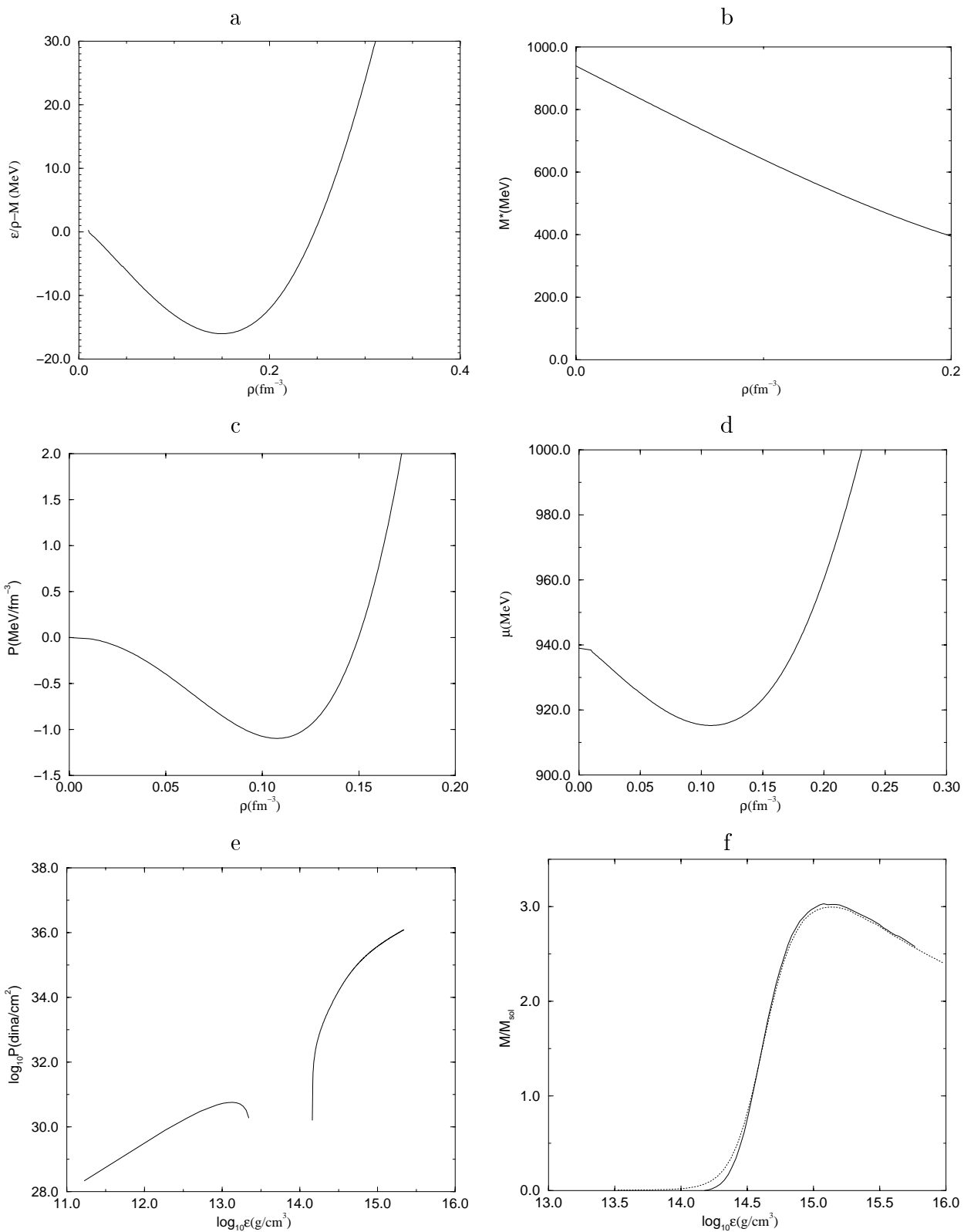
O coeficiente  $a_{sim}$  da energia de simetria deste modelo é dado por (2.7); para uma densidade bariônica fixa,  $\rho_0$ , temos que:

$$\begin{aligned} \rho_n + \rho_p &= \rho, \\ \rho_n - \rho_p &= \rho t, \end{aligned} \quad (2.71)$$

o que nos leva a  $k_n = k_0(1+t)^{1/3}$  e  $k_p = k_0(1-t)^{1/3}$ . Expressando  $\varepsilon/\rho$  em termos de  $t$  e tomando a sua derivada em relação a essa variável, teremos:

$$\frac{\partial(\varepsilon/\rho)}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{k_0^2(1+t)^{2/3} + M^{*2}} - \sqrt{k_0^2(1-t)^{2/3} + M^{*2}} \right). \quad (2.72)$$

<sup>3</sup> Os valores de  $(g_\sigma/m_\sigma)^2 = 11.79$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2 = 8.65$  encontrados em [4] são referentes a  $B/A = -15.75 MeV$  e  $\rho_0 = 0.193 fm^{-3}$ .



**Fig. 2.1:** a) Energia de ligação por núcleon, b) Massa efetiva, c) Pressão, d) Potencial químico, e) Equação de estado para matéria de nêutrons, f) Sequência de estrelas de nêutrons usando equação de estado com (linha pontilhada) e sem (linha sólida) méson  $\rho$ .

Substituindo este resultado em (2.7) temos

$$a_{sim} = \frac{k_0^2}{6\sqrt{k_0^2 + M^{*2}}} = 19.3 MeV, \quad (2.73)$$

o que é bem pouco satisfatório comparado com seu valor experimental de  $32.5 MeV$ . Por isso, na próxima seção vamos introduzir o méson  $\varrho$  para que consigamos o efeito de restauração de simetria de isospin com o valor adequado. Faremos os cálculos para nêutrons e prótons, mas em seguida generalizaremos todo o formalismo para o octeto bariônico fundamental.

## 2.4 Aperfeiçoamentos

### 2.4.1 Introdução do Méson $\varrho$

Antes da introdução do méson  $\varrho$  na teoria devemos obter alguns resultados de campos isovetoriais que nos serão úteis. Campos deste tipo são descritos através de índices gregos para as componentes de Lorentz e latinos para o espaço de isospin; assim:

$$\mathbf{e}^\mu \equiv (\varrho_1^\mu, \varrho_2^\mu, \varrho_3^\mu). \quad (2.74)$$

Temos nove componentes para o campo  $\varrho$ . Seu lagrangiano livre ficará

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{e}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{e}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\mu, \quad (2.75)$$

onde  $\mathbf{e}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{e}_\nu - \partial_\nu \mathbf{e}_\mu$ . A correspondente equação de Euler-Lagrange para este campo é:

$$\partial_\mu \mathbf{e}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{e}^\nu = 0. \quad (2.76)$$

Como os campos  $\mathbf{e}_\mu$  entram no lagrangiano através de produtos escalares, é claro que serão invariantes frente a uma rotação no espaço de isospin do tipo:

$$\mathbf{e}_\mu \rightarrow \mathbf{e}_\mu + \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{e}_\mu. \quad (2.77)$$

$\mathbf{\Lambda}$  é um vetor de componentes infinitesimais que parametriza a rotação. Da expressão geral para a corrente de Noether:

$$J_j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} F_i^j, \quad (2.78)$$

onde  $F_i^j$  é a variação na expressão do campo  $\phi_i$  correspondente a uma transformação interna, infinitesimal e contínua, obtemos a seguinte corrente associada à invariância (2.77):

$$\mathbf{I}^\nu = \mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}^{\nu\mu}. \quad (2.79)$$

Outra invariância no espaço de isospin aparece ao considerarmos o lagrangiano de Dirac para prótons e nêutrons:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}_p(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi_p + \bar{\psi}_n(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi_n, \\ &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi,\end{aligned}\tag{2.80}$$

onde  $\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$ . Este lagrangiano é invariante frente a uma transformação contínua de fase do tipo

$$\psi \rightarrow e^{-i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Lambda}/2}\psi,\tag{2.81}$$

onde  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  representam as matrizes de isospin de Pauli e  $\boldsymbol{\Lambda}$  é novamente um vetor infinitesimal no espaço de isospin. A corrente quadrivetorial conservada de isospin que aparece desta invariância é dada por

$$\mathbf{I}^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\psi.\tag{2.82}$$

A componente temporal desta corrente pode ser interpretada com uma densidade de isospin.

Com estes resultados estamos aptos a introduzir a força de restauração de isospin no modelo de Walecka tal como aparece na fórmula semi-empírica de massa. Assim, como no caso do méson vetorial  $\omega$ , cuja fonte é a densidade bariônica e que contribui quadraticamente à densidade de energia, também queremos um campo mesônico que tenha como fonte a densidade de isospin para que esta apareça em forma quadrática na expressão de  $\varepsilon$ . A partir do apresentado acima, é natural que escolhamos o méson isovetorial  $\varrho$  e o acoplemos aos núcleons através da corrente (2.82). Os termos livres deste méson também contribuem para a corrente conservada de isospin através de (2.79).

Podemos considerar a corrente total de isospin como sendo a soma das correntes (2.79) e (2.82) e adicionar ao lagrangiano um termo do tipo  $g_\rho\boldsymbol{\varrho}_\mu\cdot\mathbf{I}^\mu$ . Porém, neste termo aparecem derivadas dos campos  $\boldsymbol{\varrho}_\mu$  e, portanto (ver eq.(2.78)), ela mesma contribuirá com novos termos à corrente total conservada de isospin. Para se obter coerência, devemos calcular esta contribuição e, se esta não contiver mais derivadas dos campos isovetoriais, acrescentá-la a  $\mathbf{I}^\mu$ . De fato, o termo extra que aparece na corrente total será  $2g_\rho(\boldsymbol{\varrho}^\nu \times \boldsymbol{\varrho}^\mu) \times \boldsymbol{\varrho}_\mu$ , ficando como corrente total conservada de isospin a expressão

$$\mathbf{I}^\nu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\nu\boldsymbol{\tau}\psi + \boldsymbol{\varrho}_\mu \times \boldsymbol{\varrho}^{\nu\mu} + 2g_\rho(\boldsymbol{\varrho}^\nu \times \boldsymbol{\varrho}^\mu) \times \boldsymbol{\varrho}_\mu.\tag{2.83}$$

A correspondente alteração no lagrangiano será  $\mathcal{L}_\varrho = -g_\rho\boldsymbol{\varrho}_\nu\cdot\mathbf{I}^\nu$ . Isto implica no acréscimo de um termo  $-(g_\rho/2)\gamma_\nu\boldsymbol{\varrho}^\nu\cdot\boldsymbol{\tau}\psi$  na equação de Dirac e de uma equação de campo para o méson  $\varrho$  da forma

$$\partial_\mu\boldsymbol{\varrho}^{\mu\nu}(x) + m_\rho^2\boldsymbol{\varrho}^\nu(x) = g_\rho\mathbf{I}^\nu(x).\tag{2.84}$$

Pode-se mostrar que as duas primeiras componentes no espaço de isospin de  $\boldsymbol{\varrho}^\mu$  são nulas, sobrando apenas  $\rho_3^\mu$  [35]. Isto pode ser entendido a partir da definição do *estado normal* da matéria nuclear infinita em que estamos trabalhando: é uniforme, isotrópica e os

autoestados dos bárions no meio carregam os mesmos números quânticos que possuem no vácuo [9]; assim, não é possível a inclusão, neste estado normal, de mésons carregados.

Fazendo a aproximação de campo médio também para o méson  $\varrho$ , temos que  $\varrho_3^\mu(x) \rightarrow \langle \varrho_3^\mu \rangle$  e some a sua dependência com o espaço-tempo, sobrando para a equação de campo apenas:

$$g_\rho \varrho_3^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle = \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \frac{1}{2} (\rho_p - \rho_n), \quad (2.85)$$

$$g_\rho \varrho_3^k = \frac{1}{2} \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \langle \bar{\psi} \gamma^k \tau_3 \psi \rangle = 0. \quad (2.86)$$

A última equação se anula pelas mesmas razões que as componentes espaciais de  $\omega$  (ver eq.(2.43)), pois a matriz  $\tau_3$  agindo em  $\psi$  somente acrescenta um fator  $\pm 1$  ao termo  $\langle \bar{\psi} \gamma^k \psi \rangle$ .

A equação de Dirac fica então:

$$\gamma_0 \left[ \gamma \cdot \mathbf{k} + g_\omega \gamma_0 \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \gamma_0 \tau_3 \varrho_{03} + M^* \right] \psi(k) = k_0(k) \psi(k), \quad (2.87)$$

nos dando como autovalores:

$$e_{I_3}(k) \equiv k_0(k) = g_\omega \omega_0 + g_\rho \varrho_{03} I_3 + E(k), \quad (2.88)$$

$$E(k) = \sqrt{k^2 + M^{*2}}, \quad (2.89)$$

onde  $I_3$  sai de  $\frac{1}{2} \tau_3 \psi \equiv I_3 \psi$  e seu valor é  $+1/2$  para o próton e  $-1/2$  para o nêutron.

Nosso lagrangiano de campo médio está na forma:

$$\langle \mathcal{L} \rangle = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\rho^2 \varrho_{03}^2. \quad (2.90)$$

Lembrando das equações (2.52) e (2.53), ainda precisamos dos valores de:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \gamma_0 k_0 \psi \rangle &= \sum_\kappa \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (\bar{\psi} \gamma_0 k_0 \psi)_{\mathbf{k}\kappa} \Theta[\mu - e_{I_3}(k)], \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,p}} k^2 dk \left[ g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho \varrho_{03} + \sqrt{k^2 + M^{*2}} \right] \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,n}} k^2 dk \left[ g_\omega \omega_0 - \frac{1}{2} g_\rho \varrho_{03} + \sqrt{k^2 + M^{*2}} \right], \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde a degenerescência em  $\kappa$  foi substituída por uma soma explícita das projeções de isospin. Da mesma forma, podemos distinguir as densidades de prótons e nêutrons:

$$\rho_p = 2 \int_0^{k_{F,p}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{k_{F,p}^3}{3\pi^2}; \quad (2.92)$$

$$\rho_n = \frac{k_{F,n}^3}{3\pi^2}, \quad (2.93)$$

sendo  $\rho = \rho_p + \rho_n$ .

Usando as equações dos campos  $\omega$  e  $\varrho$  podemos simplificar (2.91):

$$\langle \bar{\psi} \gamma_0 k_0 \psi \rangle = m_\omega^2 \omega_0^2 + m_\rho^2 \varrho_{03}^2 + \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{k_{F,p}} k^2 dk \sqrt{k^2 + M^{*2}} + \int_0^{k_{F,n}} k^2 dk \sqrt{k^2 + M^{*2}} \right]. \quad (2.94)$$

Substituindo esta expressão e mais (2.57) em (2.52) e (2.53) obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= +\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \varrho_{03}^2 \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{k_{F,p}} k^2 dk \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2} + \int_0^{k_{F,n}} k^2 dk \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2} \right]; \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \varrho_{03}^2 \\ &+ \frac{1}{3} \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{k_{F,p}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2}} + \int_0^{k_{F,n}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma \sigma)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.96)$$

As constantes  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$  são as mesmas já encontradas para matéria simétrica; resta-nos determinar  $(g_\rho/m_\rho)^2$ . Partindo de:

$$a_{sim} \equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 (\varepsilon/\rho)}{\partial t^2} \right]_{t=0}, \quad (2.97)$$

onde,  $t = (\rho_n - \rho_p)/\rho$ , e seguindo o procedimento mostrado na seção 2.1, chegamos a:

$$a_{sim} = \frac{k_F^3}{12\pi^2} \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 + \frac{k_F^2}{6\sqrt{k_F^2 + M^{*2}}}. \quad (2.98)$$

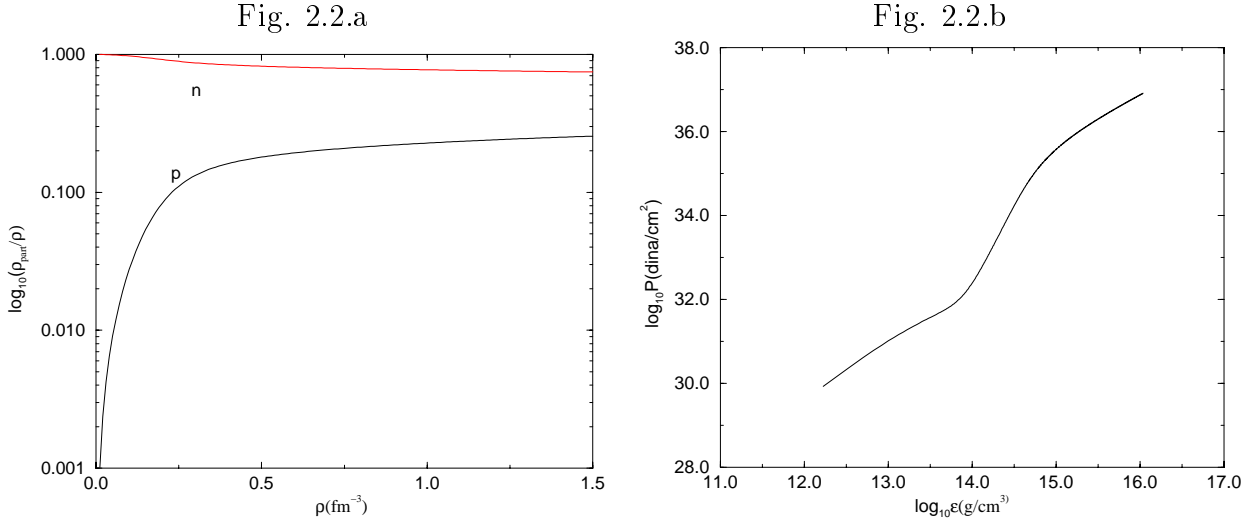
Utilizando o valor experimental de  $a_{sim} = 32.5 MeV$ , obtemos:

$$\left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 = 3.52 fm^2. \quad (2.99)$$

Já podemos fazer uma aplicação da teoria relativística de campos médios desenvolvida até aqui, já que, como vimos no capítulo 1, muitos autores consideram o caso mais simples de estrelas de nêutrons constituídas apenas de nêutrons, prótons e elétrons; falta-nos apenas poder vincular  $k_{F,p}$  e  $k_{F,n}$  de alguma maneira, pois até agora são independentes um do outro. Alguns estudos parametrizam a proporção entre nêutrons e prótons através de um fator,  $\xi \equiv \rho_p/\rho$ , e fazem-no variar entre 0 e 1 para ver seus efeitos nas massas dessas estrelas. Porém, seria mais adequado que buscássemos algum fenômeno físico adicional que nos pudesse fornecer uma equação ligando  $k_{F,p}$  a  $k_{F,n}$ .

Como veremos mais detalhadamente no próximo capítulo, o equilíbrio químico nas estrelas de nêutrons nos fornece o vínculo que desejamos entre as populações de nêutrons e prótons. Supondo que a matéria nestas estrelas seja composta apenas de n,  $p^+$  e  $e^-$  e que estejam em equilíbrio beta,

$$n \rightleftharpoons p^+ + e^- + \bar{\nu}, \quad (2.100)$$



**Fig. 2.2:** a) *Proporção entre prótons e nêutrons em estrelas de nêutrons no modelo de Walecka com méson  $\varrho$ .* b) *Equação de estado no modelo de Walecka com méson  $\varrho$ .*

os resultados deduzidos no Apêndice B nos dizem que

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad (2.101)$$

ou, de (2.88),

$$+\frac{1}{2}g_\rho \varrho_{03} + \sqrt{k_{F,p}^2 + M^{\star 2}} = -\frac{1}{2}g_\rho \varrho_{03} + \sqrt{k_{F,n}^2 + M^{\star 2}} - \sqrt{k_{F,e}^2 + m_e^2}. \quad (2.102)$$

Devido à neutralidade de carga da estrela de nêutrons demonstrada no capítulo seguinte, o número de elétrons será igual ao de prótons e, portanto,  $k_{F,e} = k_{F,p}$ . Temos assim três equações (densidade bariônica total, equação do campo sigma e condição de equilíbrio químico) a três incógnitas ( $k_{F,p}$ ,  $k_{F,n}$  e  $g_\sigma \sigma$ ) constituindo um sistema bem determinado de equações.

Podemos ver na figura (2.2.a) a proporção entre prótons e nêutrons neste modelo com méson  $\varrho$ . Em (2.2.b) aparece a equação de estado com este méson; nota-se que desaparece a transição líquido-gás. Os resultados da integração das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para a teoria com méson  $\varrho$  praticamente não diferem dos valores encontrados quando se o desconsidera (fig. (2.1.f)).

Como as altas densidades presentes nas estrelas de nêutrons permitem que os potenciais químicos dos prótons e nêutrons ultrapassem valores das massas de alguns híperons, um estado de mais baixa energia pode ser alcançado se os núcleons mais energéticos decaírem nestes bárions mais pesados. Assim, será necessário estender nossa teoria para que se consiga abarcar a presença dos híperons.

## 2.4.2 Generalização para o Octeto Bariônico

Como vimos, à medida que a densidade aumenta, a energia de Fermi dos núcleons pode

Bárion	Massa(MeV)	Y	J	I	$I_3$	S	Q
N	939	+1	1/2	1/2	+1/2	0	+1
					-1/2	0	0
$\Lambda$	1116	0	1/2	0	0	-1	0
$\Sigma$	1193	0	1/2	1	+1	-1	+1
					0	-1	0
					-1	-1	-1
					+3/2	-1	+2
$\Delta$	1232	+1	3/2	3/2	+3/2	-1	+2
					+1/2	-1	+1
					-1/2	-1	0
					+3/2	-1	-1
$\Xi$	1318	-1	1/2	1/2	+1/2	-1	0
					-1/2	-1	-1
$\Omega$	1672	-2	3/2	0	0	-1	-1

**Tab. 2.2:** *Bárions de mais baixa massa. Y=hipercarga; J=spin; I=isospin;  $I_3$ =terceira componente de isospin; S= estranheza; Q= carga elétrica. Notar que  $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$  (relação de Gell-Mann-Nishijima).*

exceder a massa de bárions mais massivos, os híperons. A conversão para estas partículas reduz a energia e pressão do sistema sendo, portanto, um estado preferencial.

A teoria relativística de campo médio aqui desenvolvida é facilmente generalizada para incluir outras espécies bariônicas. As que iremos considerar são, por serem de menor massa, as partículas do primeiro octeto bariônico,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  e  $\Xi$ , e as ressonâncias  $\Delta$  e  $\Omega$ ; suas propriedades são mostradas na tabela (2.2). Como em nossa teoria a neutralidade de carga e a simetria de isospin são consideradas, é importante que distingamos nas partículas as diferentes cargas elétricas e de isospin, relacionando cada uma a um índice  $B$ .

Um lagrangiano que abarque estes bárions pode ser da forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B [i\gamma_\mu \partial^\mu - (M_B - g_{\sigma B} \sigma) - g_{\omega B} \gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu] \psi_B \\
 & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
 & - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu.
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

Nota-se nesta expressão a presença de constantes de acoplamento  $g_{\sigma,\omega,\rho B}$ ; quando B se referir aos híperons teremos um problema, pois, ao contrário dos núcleons, estes bárions não aparecem na matéria nuclear próxima à densidade de saturação e não podemos mais adequar estas constantes a alguma propriedade da matéria nuclear como fizemos com  $g_\sigma$  e  $g_\omega$ . No capítulo seguinte, apresentamos algumas considerações sobre como contornar este problema.

As equações de Euler-Lagrange aplicadas ao lagrangiano acima combinadas com os re-

sultados da aproximação de campo médio nos dão, para a equação de Dirac:

$$\left[ \gamma_\mu (k_B^\mu - g_{\omega B} \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu) - (M_B - g_{\sigma B} \sigma) \right] \psi_B(k) = 0, \quad (2.104)$$

com autovalores  $e_B(k) = g_{\omega B} \omega_0 + g_{\rho B} \rho_{03} I_{3B} + \sqrt{k_B^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}$ . Para os campos mesônicos encontramos:

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_{\omega B}}{m_\omega^2} \rho_B, \quad (2.105)$$

$$\varrho_{03} = \sum_B \frac{g_{\rho B}}{m_\rho^2} I_{3B} \rho_B, \quad (2.106)$$

$$m_\sigma^2 \sigma = \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} g_{\sigma B} \int_0^{k_{F,B}} \frac{M_B - g_{\sigma B} \sigma}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}} k^2 dk. \quad (2.107)$$

Seguindo o processo que descrevemos nas duas seções anteriores, obtemos para a densidade de energia e pressão:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= +\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \varrho_{03}^2 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,B}} k^2 dk \sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}; \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \varrho_{03}^2 \\ &+ \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,B}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Vimos na subseção anterior que precisamos de vínculos extras entre os diversos  $k_B$  para poder resolver as equações acima. Estes vínculos são a conservação de carga bariônica, carga elétrica e estranheza, sendo que esta última carga não é necessariamente conservada na formação de estrelas de nêutrons. Nestes objetos estelares, o equilíbrio químico entre suas partículas constituintes ( $N, \Lambda, \Sigma, \Xi, e^-, \mu^-$ ) proverá equações extras para determinar exatamente o momentum de cada bárion.

Antes de passarmos ao capítulo sobre a teoria de estrelas de nêutrons, analisaremos alguns modelos que aparecem na literatura com o intuito de corrigir as deficiências reveladas pelo modelo de Walecka na obtenção da massa efetiva e incompressibilidade.

## 2.5 Modelos alternativos

Apresentamos na seção 2.3 o modelo tradicional da teoria relativística de campos médios desenvolvida por Walecka, o qual descreve satisfatoriamente muitas propriedades globais da matéria nuclear, bem como propriedades do núcleo finito [4]. Porém, seu módulo de compressão é muito alto,  $K = 550 \text{ MeV}$ , e sua massa efetiva,  $M^*/M \sim 0.54$ , pequena quando comparados aos resultados experimentais. Um modelo com boas estimativas teóricas para

estas duas grandezas é fundamental quando queremos extrapolar a equação de estado para densidades maiores que  $\rho_o$  como é o caso das estrelas de nêutrons.

Muitas tentativas foram feitas para contornar esta deficiência, como por exemplo a inclusão dos efeitos de vácuo de um e dois *loops* [36] e a introdução de termos de auto-interação do méson escalar [5], conhecido como modelo Não-Linear (NL). Em 1990, Zimanyi e Moszkowski (ZM) propuseram um modelo cuja única diferença para o de Walecka é a substituição do acoplamento de Yukawa entre o méson escalar e o núcleon por um acoplamento do tipo derivativo, obtendo bons resultados na comparação com resultados experimentais. O propósito desta seção é apresentar estes principais modelos alternativos ao de Walecka e mostrar as vantagens e problemas de cada um.

### 2.5.1 Modelo Não-Linear de Boguta-Bodmer (NL)

Boguta e Bodmer [5], em 1977, apresentaram um trabalho em que introduziam no lagrangiano de Walecka um termo  $U(\sigma)$  de auto-interação entre os campos  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu(\partial^\mu + ig_\omega\omega^\mu) - (M - g_\sigma\sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - U(\sigma), \end{aligned} \quad (2.110)$$

onde,

$$U(\sigma) = \frac{1}{3}bM(g_\sigma\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4. \quad (2.111)$$

A motivação para esta modificação foram as incertezas nos termos de auto-interação provenientes das correções de renormalização. Assim, introduziu-se termos cúbicos e quárticos de acoplamento do méson  $\sigma$  no lagrangiano, de modo que suas intensidades (parâmetros  $b$  e  $c$ ) fossem ajustáveis a propriedades conhecidas da matéria nuclear. Tal qual o modelo de Walecka, este modelo Não-Linear (NL) é renormalizável.

As equações de Euler-Lagrange, já considerando a aproximação de campo médio, serão as mesmas de Walecka, à exceção da equação para o campo  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} g_\sigma\sigma = & \left(\frac{g_\sigma}{m_\sigma}\right)^2 \left[\frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \frac{M - g_\sigma\sigma}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma)^2}}\right. \\ & \left. - bM(g_\sigma\sigma)^2 - c(g_\sigma\sigma)^3\right]. \end{aligned} \quad (2.112)$$

As expressões para a densidade de energia e pressão também serão semelhantes as de Walecka, mas com as modificações provenientes do termo  $\pm\langle\mathcal{L}\rangle, \pm U(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{3}bM(g_\sigma\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 + \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \\ & + \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma)^2} k^2 dk, \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} p = & -\frac{1}{3}bM(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \\ & + \frac{1}{3} \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M - g_\sigma\sigma)^2}}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

K (MeV)	$(g_\sigma/m_\sigma)^2$ ( $fm^2$ )	$(g_\omega/m_\omega)^2$ ( $fm^2$ )	$(g_\rho/m_\rho)^2$ ( $fm^2$ )	$b \times 100$	$c \times 100$	$M^*/M$	S (MeV)	V (MeV)
300	11.26	7.33	4.55	0.0476	0.418	0.70	-281.70	217.08
	9.78	5.85	4.80	0.0573	1.123	0.75	-234.75	173.17
	8.31	4.36	5.02	0.0363	3.354	0.80	-187.80	128.91
250	11.32	7.33	4.55	0.0707	0.367	0.70	-281.70	217.08
	9.86	5.85	4.80	0.1026	1.003	0.75	-234.75	173.17
	8.42	4.36	5.02	0.1431	2.999	0.80	-187.80	128.91
200	11.39	7.33	4.55	0.0927	0.3183	0.70	-281.70	217.08
	9.94	5.85	4.80	0.1451	0.889	0.75	-234.75	173.17
	8.53	4.36	5.02	0.2410	2.672	0.80	-187.80	128.91

**Tab. 2.3:** Constantes de acoplamento do modelo não-linear para diferentes valores possíveis de massa efetiva e compressibilidade, com  $\rho_0 = 0.15 fm^{-3}$ ,  $B/A = -16 MeV$  e  $a_{sim} = 32.5 MeV$

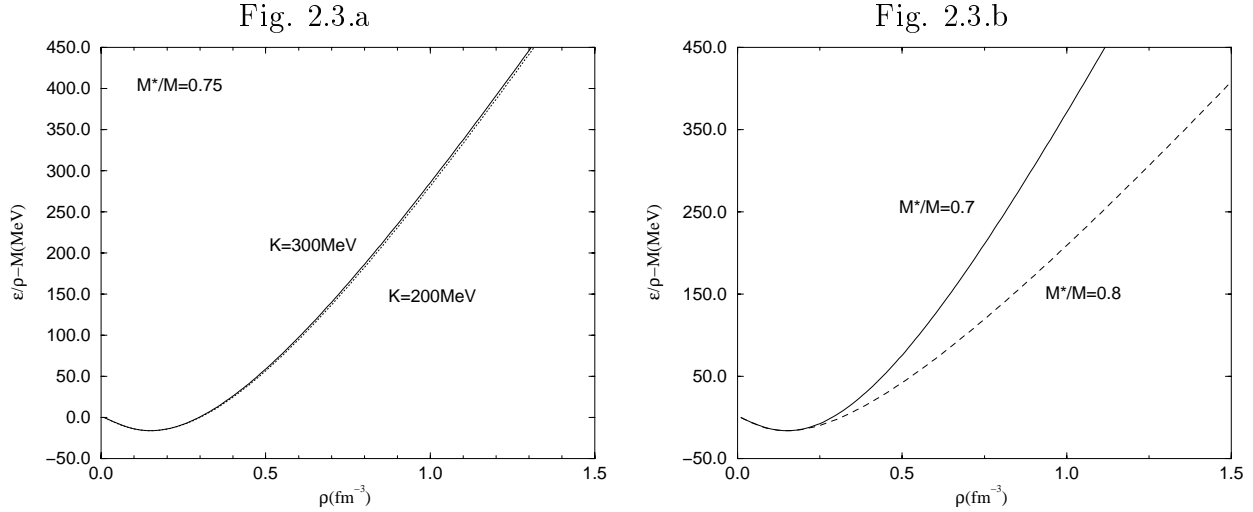
Ganhar dois parâmetros livres em nossa teoria é muito bom, já que queremos corrigir as limitações do modelo de Walecka em duas propriedades:  $K$  e  $M^*$ . Podemos encontrar os dois parâmetros também presentes no modelo W,  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$ , e mais os novos  $b$  e  $c$  algebricamente como mostrado em [23]; como temos mais dois parâmetros livres, podemos escolher qual incompressibilidade e massa efetiva queremos que o modelo Não-Linear descreva. Na tabela (2.3) mostramos algumas constantes possíveis para este modelo. Adotaremos como constantes padrão para este modelo aquelas que reproduzem uma incompressibilidade de 250 MeV e uma massa efetiva do núcleon de  $0.75M$ , pois estes valores estão no meio do intervalo em que se espera encontrar estas grandezas. Quando fizermos alguma comparação com outros modelos estaremos usando estas constantes, a menos que se explicito o contrário.

Podemos ver nas figuras 2.3.a e 2.3.b a influência da incompressibilidade e da massa efetiva na extrapolação da equação de estado para altas energias.

Este modelo é o mais utilizado na descrição de estrelas de nêutrons [9, 37] pois consegue bons resultados para massa efetiva e incompressibilidade. Porém, alguns autores criticam a adição dos novos parâmetros  $b$  e  $c$  argumentando que, apesar de ser de fato uma teoria efetiva, deveríamos tentar corrigir as deficiências do modelo original de Walecka modificando o acoplamento entre os mésons e os núcleons; quanto mais parâmetros físicos temos, menos fundamental é a teoria e menor a confiabilidade na extrapolação de seus resultados para densidades mais altas.

Um outro problema do modelo é que não há vinculação entre o valor de  $K$  e o de  $M^*$ ; podemos ter uma incompressibilidade correspondendo a uma massa efetiva qualquer. Isto, além de não ter muito sentido físico, acarreta anormalidades. Por exemplo, quando fazemos  $K < 200 MeV$  e  $M^* < 0.65$  o valor de  $c$  é sempre negativo e a teoria começa a apresentar comportamento não-físico, como cúspides na equação de estado ou três massas efetivas diferentes para a mesma densidade bariônica [38].

Por tudo isso, apresentamos na próxima seção os modelos propostos por Zimanyi e Moszkowski os quais não introduzem parâmetros físicos adicionais.



**Fig. 2.3:** Equação de estado para o modelo Não-Linear para diferentes valores de incompressibilidade.

## 2.5.2 Modelos com Acoplamento Derivativo (ZM)

Em 1990, Zimanyi e Moszkowski (ZM) [6] propuseram a troca do acoplamento mínimo de Yukawa entre o méson escalar e os núcleons por um acoplamento derivativo. A curva de saturação continua sendo reproduzida pelo modelo ZM, mas agora os resultados para a massa efetiva e a incompressibilidade estão dentro da faixa experimental. Isto sem o custo de parâmetros físicos extras a serem determinados como no modelo Não-Linear.

Porém, como se sabe, acoplamentos derivativos exigem que um número infinito de contra-termos sejam introduzidos no lagrangiano para que este seja renormalizável; como isto só é possível ordem a ordem, dizemos que o modelo é não-renormalizável. De fato, isto não é um problema grave para uma teoria efetiva como as que estamos estudando; nossos modelos foram construídos sobre hipóteses que só valem numa faixa bem determinada de energias e nela funcionam bem. Este modelo e suas variantes ([6, 13]) tem sido utilizado na descrição de estrelas de nêutrons [39], excitações  $\Delta$  na matéria nuclear [40], núcleo finito [41], propriedades termodinâmicas da matéria nuclear [42], entre outras aplicações.

Em seu artigo original, os autores do modelo ZM apresentaram ainda mais duas variações que poderiam ser consideradas no espírito do acoplamento derivativo. Estes três modelos ficaram conhecidos na literatura [13] como *ZM*, *ZM2* e *ZM3*. O segundo deles não apresenta diferenças fundamentais em relação ao *ZM3* e, ao contrário dos modelos *ZM* e *ZM3*, não pode ser visto como um modelo de Walecka com reescalonamento das constantes de acoplamento; não iremos abordar o modelo *ZM2* no presente trabalho.

O lagrangiano destes dois modelos é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZM} &= -\bar{\psi}M\psi + m^{*-1}[\bar{\psi}i\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - g_{\omega}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\omega^{\mu}] \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma - m_{\sigma}^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\omega}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\mathcal{L}_{ZM3} = -\bar{\psi}M\psi + m^{*-1}\bar{\psi}i\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - g_{\omega}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\omega^{\mu}$$

$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu, \quad (2.116)$$

$$(2.117)$$

onde,

$$m^* \equiv \left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{M}\right)^{-1}. \quad (2.118)$$

Assim, se expandirmos  $m^*$  nas expressões acima, veremos que o que se fez em essência foi trocar o acoplamento mínimo de Yukawa,  $g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi$ , por um acoplamento derivativo,  $(g_\sigma \sigma / M) \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi$ .

Podemos reescalonar os campos dos núcleons da seguinte forma <sup>4</sup>:

$$\psi \rightarrow \sqrt{m^*} \psi. \quad (2.119)$$

Os lagrangianos resultantes podem ser colocados sob a forma geral <sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu (\partial^\mu + ig_\omega^* \omega^\mu) - (M - g_\sigma^* \sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu, \end{aligned} \quad (2.120)$$

onde temos a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned} \text{Walecka: } & g_\sigma^* \rightarrow g_\sigma, \quad g_\omega^* \rightarrow g_\omega; \\ \text{ZM: } & g_\sigma^* \rightarrow m^* g_\sigma, \quad g_\omega^* \rightarrow g_\omega; \\ \text{ZM3: } & g_\sigma^* \rightarrow m^* g_\sigma, \quad g_\omega^* \rightarrow m^* g_\omega. \end{aligned}$$

As equações de movimento que seguem daí são:

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - (M - g_\sigma^* \sigma) - g_\omega^* \gamma_\mu \omega^\mu] \psi = 0; \quad (2.121)$$

$$\partial_\nu \omega^{\nu\mu} + m_\omega^2 \omega^\mu = g_\omega^* \bar{\psi} \gamma^\mu \psi; \quad (2.122)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma = -\frac{\partial(g_\sigma^* \sigma)}{\partial \sigma} \bar{\psi} \psi - \frac{\partial g_\omega^*}{\partial \sigma} \bar{\psi} \omega_\mu \gamma^\mu \psi, \quad (2.123)$$

as quais, após a aproximação de campo médio ficam:

$$g_\omega \omega_0 = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho, \quad (2.124)$$

$$g_\sigma \sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ -\frac{1}{g_\sigma} \frac{\partial(g_\sigma^* \sigma)}{\partial \sigma} \right] \rho_s, \quad (2.125)$$

---

<sup>4</sup> Na verdade, este reescalonamento introduz um fator espúrio  $\mathcal{F} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \partial^\mu \ln(m^*(\sigma))$  que em nada contribui na dinâmica do sistema [43].

<sup>5</sup> Notar que  $m^* M = M - g_\sigma^* \sigma$

para o modelo ZM e

$$g_\omega \omega_0 = m^* \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho, \quad (2.126)$$

$$g_\sigma \sigma = \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left[ -\frac{1}{g_\sigma} \frac{\partial g_\sigma^*}{\partial \sigma} \rho_s - m^* \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \frac{1}{g_\sigma g_\omega} \frac{\partial g_\omega^*}{\partial \sigma} \rho^2 \right]. \quad (2.127)$$

para o modelo ZM3. Nota-se a peculiaridade do modelo ZM3: o acoplamento entre os mésons escalares e vetoriais que não aparece nos outros modelos (W,NL,ZM). Os potenciais escalar e vetorial são dados por

$$S = -g_\sigma^* \sigma, \quad (2.128)$$

$$V = g_\omega^* \omega_0. \quad (2.129)$$

A densidade de energia e a pressão têm a mesmas expressões dadas por (2.58) e (2.59), mas substituindo  $g_\sigma$  por  $g_\sigma^*$ .

Os valores de  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$  que reproduzem  $\rho_0 = 0.15 fm^{-3}$  e  $B/A = -16.0 MeV$  estão na tabela (2.4), bem como a massa efetiva, a incompressibilidade, S e V para os dois modelos. Apresentamos também a constante de acoplamento  $(g_\rho/m_\rho)^2$  útil quando se introduz o méson  $\rho$  na teoria.

Das figuras 2.4.a e 2.4.b notamos que os modelos ZM e ZM3 de fato apresentam uma equação de estado mais suave (menor incompressibilidade) que no modelo original de Walecka. Também vemos como a curva da massa efetiva nos modelos ZM e ZM3 é menos dura; o acoplamento escalar só atinge o valor da massa do núcleon assintoticamente, quando  $g_\sigma \sigma \rightarrow \infty$ . Nas figuras 2.5.a e 2.5.b mostramos como as constantes de acoplamento efetivas  $(g_\sigma^*/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega^*/m_\omega)^2$  evoluem com a densidade bariônica.

Uma comparação interessante que podemos fazer entre os modelos vistos neste capítulo é seu coeficiente relativístico R, definido como

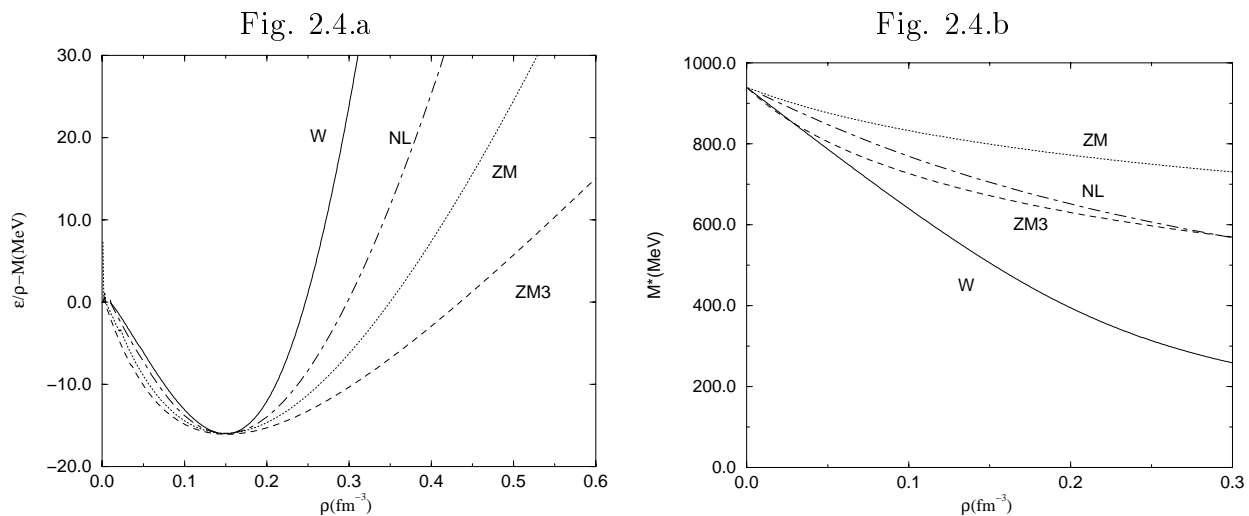
$$R \equiv \frac{\rho_s}{\rho}. \quad (2.130)$$

Para um modelo *pouco relativístico*  $\rho_s$  tende a  $\rho$ , já que  $k \ll M$ . Assim, quanto mais próximo da unidade está R, menor é seu conteúdo relativístico. Para os modelos referidos neste capítulo temos,  $R_W = 0.931$ ,  $R_{NL} = 0.963$ ,  $R_{ZM} = 0.970$ ,  $R_{ZM3} = 0.959$ . Vemos que o modelo ZM3 é o que mais se aproxima de Walecka em termos de conteúdo relativístico.

Tendo considerado estes modelos alternativos, passamos no próximo capítulo a utilizar a teoria relativística de campos médios na *modelagem* de estrelas de nêutrons. Aplicaremos

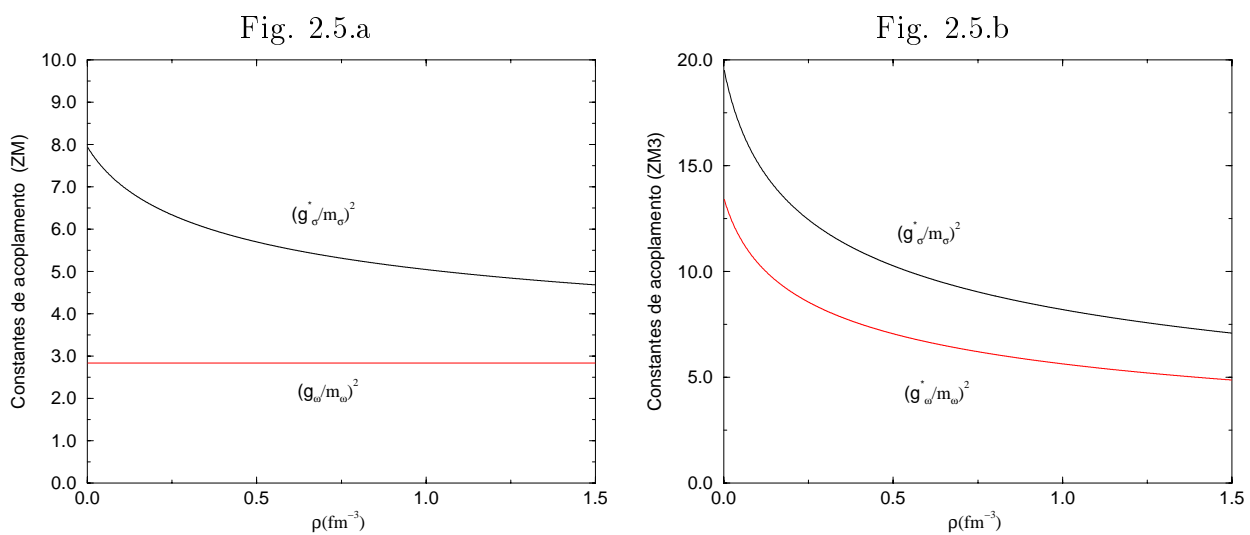
Modelo	$(g_\sigma/m_\sigma)^2$ ( $fm^2$ )	$(g_\omega/m_\omega)^2$ ( $fm^2$ )	$(g_\rho/m_\rho)^2$ ( $fm^2$ )	$M^*/M$	$K$ (MeV)	S (MeV)	V (MeV)
ZM	7.94	2.84	5.23	0.85	226.06	-140.46	83.98
ZM3	19.57	13.45	9.06	0.72	154.56	-267.37	203.72

**Tab. 2.4:** Valores das constantes de acoplamento, da massa efetiva, da incompressibilidade, potencial escalar e vetorial, nos modelos ZM e ZM3



**Fig. 2.4:** Comparação da equação de estado (a) e da massa efetiva (b) para os modelos  $W$ ,  $NL$ ,  $ZM$  e  $ZM3$ .

o modelo Não-Linear primeiramente, por ser o modelo mais utilizado na literatura. No capítulo 4, faremos uso dos modelos  $ZM$  e  $ZM3$  nestas estrelas o que, no conhecimento do autor, ainda não foi feito.



**Fig. 2.5:** Dependência das constantes de acoplamento  $g_\sigma^*/m_\sigma$  e  $g_\omega^*/m_\omega$  dos modelos ZM (a) e ZM3 (b) com a densidade bariônica.

## Capítulo 3

# Teoria de Estrelas de Nêutrons

### 3.1 Introdução

A descoberta do nêutron por Chadwick em 1932 [44], suscitou a imaginação dos físicos; Landau [19] assim que soube da notícia em Copenhague, rapidamente elaborou o conceito de uma esfera de nêutrons. Baade e Zwicky [45], um ano depois, conceberam que a energia necessária para provocar o fenômeno das supernovas poderia ser a energia gravitacional de um objeto altamente compacto como uma *estrela de nêutrons*. Apesar deste rápido desenvolvimento inicial, não se sabia como detectar tais objetos, pois eles seriam muito pequenos e sem um mecanismo apropriado para irradiar energia. Como consequência, houve uma estagnação do tema até que, em 1939, Tolman [10], Oppenheimer e Volkoff [11] desenvolveram um formalismo inicial para a análise de tais objetos e calcularam que teriam uma massa de  $0.77M_{\odot}$  compactada num raio de  $10km$ . Woltjer [46], baseando-se na conservação do fluxo magnético, estimou que os campos magnéticos em estrelas de nêutrons deveriam ser da ordem de  $10^{12}$  gauss. Pacini [47], em 1967, realizou a idéia de que energia poderia ser emitida por uma estrela de nêutrons altamente magnetizada. Todos estes trabalhos não passavam de conjecturas teóricas, sem nenhuma evidência experimental que pudesse sustentá-las.

Em 1968, em Cambridge, Hewish e seus colaboradores estavam desenvolvendo um rádio-telescópio de resposta rápida, de modo a poder separar pequenas oscilações do ruído no sinal. Usando este equipamento, uma estudante de pós-graduação da equipe de Hewish, Jocelyn Bell de 24 anos, percebeu um sinal persistente e extremamente periódico, com um pulso a cada 1.337 segundos; era descoberto o primeiro pulsar [48], o qual se supunha ser uma estrela condensada, ou seja, uma anã branca ou uma estrela de nêutrons. Hewish recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1974 pela descoberta.

É preciso que não se confunda o uso dos termos pulsar e estrela de nêutrons; o primeiro se refere a qualquer objeto astrofísico que emita radiação pulsadamente e o segundo um objeto que pode ser detectado, dentre outras formas, através de seu cone de radiação. O pulsar binário de Hulse-Taylor [49] é um exemplo de uma provável estrela de nêutrons detectada apenas através de seus efeitos gravitacionais no pulsar que a acompanha; seu alto grau de compactação nos permite identificá-la como uma estrela de nêutrons. É claro que temos muito boas razões [50] para associar os pulsares à idéia de estrela de nêutrons, como pode ser visto do próprio artigo citado de Pacini.

Este capítulo é dedicado a desenvolvimentos que se seguiram na modelagem das estrelas de nêutrons como, por exemplo, a existência de híperons e sua influência na massa máxima de uma sequência destes objetos. Na seção 3.2, revisamos alguns resultados experimentais

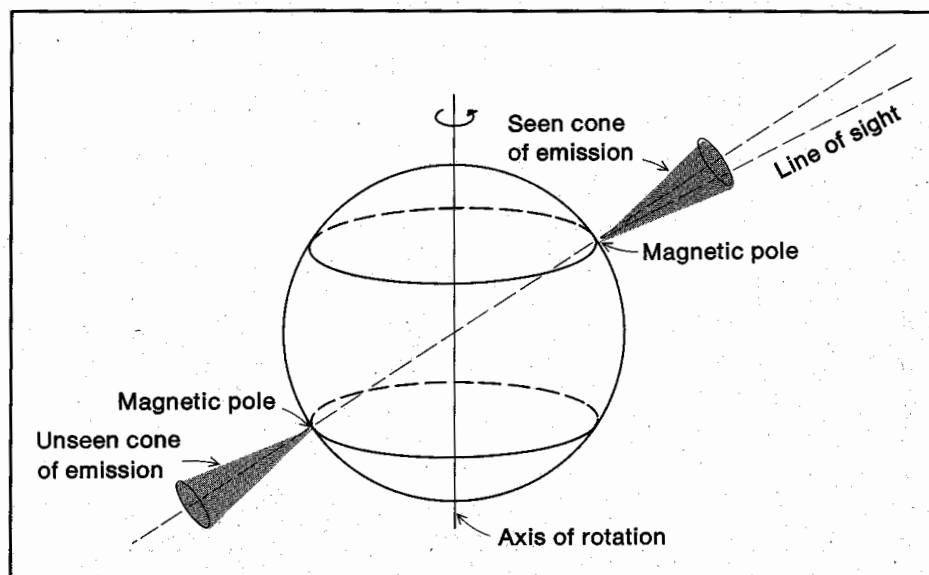


Fig. 3.1: Pulsar e seu cone de radiação.

dos pulsares. Em seguida, na seção 3.3, exploramos algumas características destas estrelas como neutralidade de carga, equilíbrio químico e populações bariônicas. Por fim, combinamos o modelo Não-Linear desenvolvido no capítulo anterior a estas características na seção 3.4 de modo a obter valores para massa, raio, *redshift*, entre outros, para as estrelas de nêutrons (seção 3.5).

## 3.2 Evidências Experimentais: Pulsares

Acredita-se que os pulsares sejam estrelas de nêutrons altamente magnetizadas em rotação; como o eixo magnético da estrela em geral não coincide com o rotacional, o feixe de ondas eletromagnéticas emitidas funciona como uma espécie de *farol astrofísico* (fig. 3.1). Este feixe tem uma abertura de  $\sim 10^\circ$  e a cada passagem sua pela linha que liga a estrela à Terra detectamos um pulso. As frequências que aparecem nestes pulsos podem estar na faixa da luz visível, raios-X ou até raios- $\gamma$ , mas a maior parte dos pulsares emite na faixa das rádio-frequências.

Pouco depois da descoberta do pulsar PSR 1919+21<sup>1</sup> por Hewish e Bell, foram encontrados os pulsares das nebulosas do Caranguejo e Vela. O curto intervalo entre os pulsos emitidos por estes objetos, 33 ms e 89 ms respectivamente, foi fundamental na identificação destes objetos como estrelas de nêutrons, pois fosse uma anã branca com  $\sim 10^3 km$  de raio, a matéria em sua superfície rotaria a uma velocidade muito próxima a da luz! Atualmente existem catalogados mais de 700 pulsares, sendo muitos deles detectados nos rádio-telescópios de Arecibo, Jodrell Bank, Molonglo e Greenbank nos anos 70 [51].

<sup>1</sup> PSR - *pulsating source of radio*, 1921+21- coordenadas celestes.

Outro destes objetos com nome próprio é o pulsar de Hulse-Taylor (PSR 1913+16); foi o primeiro pulsar detectado em um sistema binário, sendo que sua companheira, como citamos, também foi identificada como uma estrela de nêutrons, mas seu cone de radiação não nos atinge. Este sistema tem sido estudado com objetivos de verificação apurada dos resultados previstos pela Teoria da Relatividade Geral, pois, entre outros efeitos, a precessão de sua órbita é de  $4.2^\circ$  por ano, enquanto Mercúrio precessiona  $43''$  por século. Sistemas binários de estrelas de nêutrons são a maior esperança para os cientistas que querem confirmar a existência de ondas gravitacionais.

Uma segunda geração de pulsares aparece com a descoberta do PSR 1937+21, com período de 1.56 ms. Propôs-se que fossem pulsares velhos, com campo magnético fraco, que sofressem uma aceleração angular (*spin-up*) decorrente do acréscimo de matéria de uma estrela companheira. A hipótese verificou-se quando se encontrou o pulsar PSR 1953+29 de 6.1 ms orbitando ao redor de uma anã branca. Estes pulsares de milisegundos são bastante populosos em *aglomerados globulares*<sup>2</sup>, como pode ser inferido da descoberta de 10 destes objetos em *47Tucanae*, em 1991. Os primeiros planetas encontrados fora do sistema solar foram detectados rotando ao redor de um pulsar de milisegundos [52]; eram dois objetos com a massa da Terra e um com a massa da Lua.

Como vimos, os períodos dos pulsares vão de alguns segundos a milisegundos, sendo que o valor médio é de 0.7s. Os pulsares perdem energia ao emitir radiação, diminuindo sua frequência de rotação. Desta forma, quando especificamos o período de um pulsar temos que fornecer também a hora em que ele foi medido; o pulsar de Hulse-Taylor foi medido apuradamente com 14 casas após a vírgula:

$$1.557\ 806\ 448\ 872\ 75 \pm 3 \times 10^{-14}ms, \quad (3.1)$$

em 29 de novembro de 1982, 1903 UT (*universal time*).

Parece haver duas populações de pulsares, os com período de  $\sim 1$  s e os ditos pulsares de milisegundos. Os primeiros são formados do colapso no caroço de ferro da estrela progenitora; a mudança de escala de uma supergigante vermelha para uma estrela de nêutrons combinada com conservação de momentum angular e fluxo magnético, faz com que o novo objeto formado gire com velocidade altíssima e tenha campos magnéticos da ordem de  $10^{12}$  gauss. Com o passar do tempo, estes pulsares perdem sua energia em forma de radiação, podendo atingir um ponto crítico, caracterizado por uma combinação de campo fraco e pequeno período, conhecido como *linha da morte* em que param de emitir. O pulsar do Caranguejo alcançará esta linha em poucos milhões de anos.

Os pulsares da segunda população passaram por esta fase e alcançaram a linha da morte, mas de alguma forma encontraram uma companheira menos densa, em geral uma anã branca, e através de um adequado acréscimo de matéria de sua parceira conseguem uma aceleração angular. Estes pulsares, com campos magnéticos mais fracos ( $10^8$  gauss), são também conhecidos como *pulsares reciclados*.

Pode-se perguntar por que não se imagina os pulsares como estrelas vibrando e não girando. Como detectamos sua radiação aqui na Terra, é claro que estes objetos estão perdendo energia; se estas estrelas estivessem vibrando, esta perda resultaria numa diminuição da amplitude, mas não na frequência de vibração. Apesar de que seus períodos pareçam

<sup>2</sup>  $10^5$ - $10^6$  estrelas agrupadas em uma densidade 1000 vezes maior que a densidade típica em nossa galáxia.

muito estáveis, na verdade os pulsares desaceleram lentamente, podendo chegar a variar de 1 para 3 segundos em  $10^8$  anos. Um fenômeno contrastante que acontece nestes objetos são os *glitches*, pequenas acelerações na frequência angular, mas que não alteram significativamente o processo de freamento do pulsar. Tem-se interpretado os *glitches* como uma espécie de terremoto estelar (*starquakes*) decorrentes de alguma transição de fase ocorrida na matéria que constitui os pulsares.

Podemos fazer uma estimativa da densidade de energia de um pulsar de milisegundos; para manter a estrela coesa, a força gravitacional no equador da estrela deverá superar os efeitos centrífugos decorrentes da rotação, ou seja,

$$\xi^2 \frac{GmM}{R^2} > m \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \quad (3.2)$$

$\xi$  é um fator de correção oriundo da Relatividade Geral, estimado em 0.625. Utilizando a desigualdade acima, a densidade de energia média do pulsar será,:

$$\bar{\epsilon} = M / \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \right) > \frac{3\pi}{G(\xi T)^2} = 3.6 \times 10^{14} g/cm^3. \quad (3.3)$$

Esta densidade de energia é muito próxima da densidade da matéria nuclear,  $2.5 \times 10^{14} g/cm^3$ , e sugere que estes objetos astrofísicos sejam compostos de núcleons. Além disso, como veremos na próxima seção, a carga elétrica líquida em uma estrela deste tipo deverá ser nula para mantê-la coesa; assim, chegamos a conclusão de que os pulsares devem ser constituídos em sua maior parte por nêutrons, ou melhor ainda, *pulsares devem ser estrelas de nêutrons*.

Na seção 1.7, vimos que  $3M_{\odot}$  é um bom limite superior para as massas de estrelas de nêutrons. Considerações a respeito da natureza da matéria que as constitui, como faremos adiante neste capítulo, leva-nos a colocar este limite entre  $1.6 - 2.0 M_{\odot}$ . De qualquer maneira, o mecanismo de criação das estrelas de nêutrons permite apenas que uma pequena faixa de massas possa existir.

Antes do caroço degenerado existente numa supergigante colapsar e provocar o fenômeno de supernova, sua massa era de  $1.4 - 1.5 M_{\odot}$ , compactada num raio de 1000 km. Pouco menos de  $0.1M_{\odot}$  ainda será acrescido a este caroço na explosão de supernova. Como este é um mecanismo padrão, a faixa de valores possíveis para o caroço de nêutrons remanescente é bem pequena. Assim, mesmo que a integração das equações de Oppenheimer-Tolman-Volkoff, através de alguma equação de estado por nós fornecida, permita valores de  $2 - 2.5 M_{\odot}$ , o mecanismo que a natureza utiliza na criação das estrelas de nêutrons não permitirá a existência de uma estrela com essa massa máxima. Um modelo teórico deverá se satisfazer em produzir uma massa máxima que seja, claro, maior que a maior massa já medida.

Na figura 3.2 vemos alguns resultados para massas de pulsares; nota-se uma preferência por massas entre  $1.4 - 1.5M_{\odot}$ . Dos 730 pulsares conhecidos, apenas 20 possuem medidas razoáveis de massa; o pulsar de Hulse-Taylor possui  $1.4411 \pm 0.00007 M_{\odot}$ , mas esta precisão é incomum. A medida do pulsar Vela X-1,  $1.77^{+0.27}_{-0.21} M_{\odot}$ , tem levado a uma readequação de teorias para aceitar massas desse valor.

Tendo revisado os principais resultados para pulsares, evidência experimental para as estrelas de nêutrons, voltamos a considerações teóricas que nos levarão ao desenvolvimento de uma equação de estado mais realística a qual nos fornecerá melhores valores para massa, raio, *redshift*, entre outras propriedades estelares.

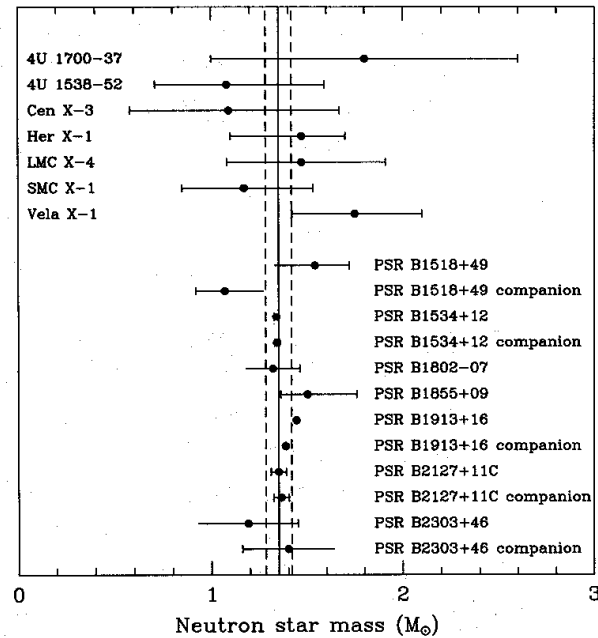


Fig. 3.2: Resultados das massas conhecidas de pulsares. [53]

### 3.3 Características Gerais

A teoria relativística de campos nucleares médios exposta no capítulo anterior é uma candidata apropriada para descrever a matéria presente nas estrelas de nêutrons, pois a aproximação utilizada em sua elaboração (campo médio) é tanto mais válida quanto maior é a densidade de partículas. Como vimos, no entanto, esta teoria não determinará unicamente as populações bariônicas da estrela, necessitando de vínculos externos entre os diversos momenta das partículas. Esta seção tem como objetivo fornecer estas equações extras através da análise da neutralidade de carga e equilíbrio químico em uma estrela de nêutrons.

#### 3.3.1 Neutralidade Elétrica

Como diz Glendenning em [9], a *raison d'être* das estrelas de nêutrons é serem neutras. Porém, precisamos provar isso. Uma partícula eletricamente carregada situada na superfície de uma estrela, também carregada, sofrerá a atração gravitacional e a ação da força eletromagnética; supondo-se que o sinal da carga líquida da estrela seja o mesmo da partícula, para que esta não seja expulsa da estrela a componente gravitacional deverá superar a repulsão elétrica, ou seja, a seguinte condição deverá ser satisfeita:

$$\frac{(Z_{liq}.e)e}{R^2} \leq \frac{GMm}{R^2} < \frac{G(Am)m}{R^2}, \quad (3.4)$$

onde  $Z_{liq}$  é a carga líquida da estrela,  $M$  e  $R$  são a massa e o raio da estrela e  $m$  e  $e$  a massa e a carga elementar da partícula. Usamos o fato de que a massa da estrela é sempre menor

que a soma das massas de suas partículas no infinito ( $M < Am$ ). Assim,

$$\frac{Z_{liq}}{A} < G \left( \frac{m}{e} \right)^2 \sim 10^{-36} \quad (3.5)$$

para o caso do próton e  $(m_e/m)^2$  vezes este valor para o caso do elétron. Uma fração entre  $Z_{liq}$  e  $A$  superior a este valor expulsa nossa partícula teste da estrela. Desta forma, vemos que a carga líquida por núcleon é praticamente nula e podemos considerar que estas estrelas são eletricamente neutras.

### 3.3.2 Equilíbrio Químico

Antes de analisar o equilíbrio químico entre as partículas constituintes das estrelas de nêutrons, é bom ter claro quais as cargas conservadas nestas estrelas. Para tanto, precisamos voltar um pouco na evolução destas estrelas, instantes depois da explosão em supernova (estrelas protoneutrônicas). Neste estágio, os neutrinos levam 10s para escapar do caroço degenerado levando consigo grande parte da energia de ligação, diminuindo a temperatura de dezenas de MeV para apenas alguns MeV. Nesta fase, os núcleons possuem um momentum tão elevado que sua energia de Fermi supera o valor da massa de alguns híperons, permitindo que estas partículas sejam formadas. A fuga de neutrinos e fótons combinada com a formação destes bárions massivos é que conduzirá à não conservação da estranheza, pois processos como

$$N + N \rightarrow N + \Lambda + K, \quad (3.6)$$

não poderão ser revertidos, já que os cáons terão decaído em neutrinos ou fótons:

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow 2\gamma, \\ K^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\ \mu^- + K^+ &\rightarrow \mu^- + \mu^+ + \nu_\mu \rightarrow 2\gamma + \nu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

O híperon  $\Lambda$ , por exemplo, fica proibido pelo princípio de Pauli (*Pauli blocked*) de se transformar novamente em núcleon e uma estranheza líquida aparece na estrela. De fato, apenas as cargas elétrica e bariônica são conservadas na escala de tempo da estrela.

Estes processos continuarão até que a estrela atinja seu estado fundamental, quando as partículas estarão distribuídas pelos diversos mares de Fermi de modo a minimizar a energia; reações posteriores não são permitidas e se diz que o sistema alcançou o equilíbrio químico.

No Apêndice B, deduzimos as relações necessárias para se encontrar o equilíbrio químico de um sistema, tendo duas cargas conservadas. Como é dito lá, não é necessário saber quais as reações exatas que levarão ao equilíbrio, mas especificaremos algumas para entender melhor o processo. De acordo com a expressão (B.6), a relação entre os potenciais químicos associados ao equilíbrio beta simples ( $n \rightleftharpoons p^+ + e^- + \bar{\nu}$ ) será

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \quad (3.8)$$

já que  $\mu_\nu$  é nulo, pois os neutrinos abandonam a estrela. À medida que a densidade de nêutrons cresce, também aumentam as populações de prótons e elétrons. A equação de equilíbrio associada à reação  $e^- \rightleftharpoons \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  é

$$\mu_\mu = \mu_e, \quad (3.9)$$

de modo que quando  $\mu_e$  exceder a massa do múon, esta partícula poderá existir no sistema.

De acordo com (3.6) e (3.7), temos:

$$\mu_\Lambda = \mu_n; \quad (3.10)$$

$$\mu_{K^0} = 0; \quad (3.11)$$

$$\mu_{K^-} = \mu_e; \quad (3.12)$$

$$\mu_{K^+} = -\mu_e. \quad (3.13)$$

Podemos logo verificar que a regra geral (B.13),

$$\mu_i = q_{b,i}\mu_n - q_{e,i}\mu_e, \quad (3.14)$$

é, de fato, obedecida. Portanto, para os próximos híperons da tabela 2.2,  $\Sigma$  e  $\Xi$ , temos:

$$\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = \mu_n; \quad (3.15)$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_e; \quad (3.16)$$

$$\mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_e. \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

Introduzimos na próxima seção o lagrangiano total de nossa teoria, pois já estamos aptos a resolver completamente todas as equações do modelo.

### 3.4 Populações Bariônicas na Estrela

Na subseção 2.4.2 do capítulo anterior vimos como nosso formalismo era facilmente estendido para abarcar todas as partículas do octeto bariônico fundamental. Considerando que a maior parte dos trabalhos utilizando esta teoria seguem o artigo original de Glendenning [9], no qual se utiliza o modelo Não-Linear, neste capítulo também usaremos o referido modelo por razões de comparação dos outros modelos mencionados neste trabalho com os resultados existentes na literatura. Um lagrangiano adequado para descrever todas as partículas que aparecem nas estrelas de nêutrons, decorrentes do equilíbrio beta generalizado, pode ser da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B [i\gamma_\mu \partial^\mu - (M_B - g_{\sigma B}\sigma) - g_{\omega B}\gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2}g_{\rho B}\gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu] \psi_B \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{4}\boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu - \frac{1}{3}bM_N(g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_\sigma \sigma)^4 \\ & + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como sabemos, este lagrangiano descreve um sistema com oito bárions ( $p, n, \Lambda, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-, \Xi^+$ ) interagindo entre si através da troca de três mésons ( $\sigma, \omega, \rho$ ). O último termo representa a inclusão dos léptons, elétrons ( $e^-$ ) e múons ( $\mu^-$ ), os quais terão papel importante na neutralidade de carga.

De acordo com o procedimento exaustivamente seguido no capítulo 2, aplicamos as equações de Euler-Lagrange em (3.19) para obter, depois de fazer a aproximação de campo médio, para a equação de Dirac,

$$\left[ \gamma_\mu (k^\mu - g_{\omega B} \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu) - (M_B - g_{\sigma B}) \right] \psi_B(k) = 0, \quad (3.20)$$

e para os campos mesônicos,

$$\omega_0 = \sum_B \frac{g_{\omega B}}{m_\omega^2} \rho_B, \quad (3.21)$$

$$\rho_{03} = \sum_B \frac{g_{\rho B}}{m_\rho^2} I_{3B} \rho_B, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 \sigma &= -bM g_\sigma (g_\sigma \sigma)^2 - c g_\sigma (g_\sigma \sigma)^3 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} g_{\sigma B} \int_0^{k_{F,B}} \frac{M_B - g_{\sigma B} \sigma}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B})^2}} k^2 dk. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Definindo

$$\chi_{(\sigma, \omega, \rho), B} \equiv \frac{g_{(\sigma, \omega, \rho), B}}{g_{(\sigma, \omega, \rho)}} \quad (3.24)$$

como a razão entre as constantes de acoplamento méson-bárion e as constantes de acoplamento méson-núcleon<sup>3</sup>, podemos reescrever as equações dos campos mesônicos como:

$$g_\omega \omega_0 = \left( \frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \sum_B \chi_{\omega, B} \rho_B, \quad (3.25)$$

$$g_\rho \rho_{03} = \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \sum_B \chi_{\rho, B} I_{3B} \rho_B, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} g_\sigma \sigma &= \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 [-bM (g_\sigma \sigma)^2 - c (g_\sigma \sigma)^3 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{2\pi^2} \chi_{\sigma B} \int_0^{k_{F,B}} \frac{M_B - g_{\sigma B} \sigma}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B})^2}} k^2 dk]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

As expressões para a conservação das cargas bariônica e elétrica são dadas, respectivamente, por:

$$\rho = \sum_B \frac{(2J_B + 1) k_{F,B}^3}{2 \cdot 3\pi^2} \quad (3.28)$$

<sup>3</sup> Estamos supondo que, para cada tipo de méson, os diferentes híperons se acoplam com a mesma intensidade.

e

$$\sum_B \frac{(2J_B + 1)}{2} q_{e,B} \frac{k_{F,B}^3}{3\pi^2} - \sum_\lambda \frac{k_{F,\lambda}^3}{3\pi^2} = 0, \quad (3.29)$$

onde  $q_{e,B}$  é a carga elétrica do bárion B. Os potenciais químicos das partícula são os autovalores da equação de Dirac (3.20):

$$\mu_B(k) = g_{\omega B} \omega_0 + g_{\rho B} \varrho_{03} I_{3B} + \sqrt{k_{F,B}^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}. \quad (3.30)$$

Vimos na seção anterior que o octeto bariônico fundamental em equilíbrio beta generalizado na presença de elétrons e múons respeita as seguintes equações de potenciais químicos:

$$\mu_p = \mu_{\Sigma^+} = \mu_n - \mu_e, \quad (3.31)$$

$$\mu_\Lambda = \mu_{\Xi^0} = \mu_{\Sigma^0} = \mu_n, \quad (3.32)$$

$$\mu_{\Sigma^-} = \mu_{\Xi^-} = \mu_n + \mu_e, \quad (3.33)$$

$$\mu_\mu = \mu_e. \quad (3.34)$$

Temos assim oito equações para os potenciais químicos expressos por (3.30).

Estas oito expressões mais as equações de conservação de carga elétrica e bariônica, e a equação de campo para o méson  $\sigma$ , perfazem onze equações a onze incógnitas:

$$g_\sigma \sigma, k_e, k_\mu, k_n, k_p, k_\Lambda, k_{\Sigma^-}, k_{\Sigma^0}, k_{\Sigma^+}, k_{\Xi^-}, k_{\Xi^0}. \quad (3.35)$$

É um sistema bastante acoplado e só pode ser resolvido numericamente com o auxílio do computador. O autor do presente trabalho desenvolveu um programa em linguagem Fortran 77, baseado no algoritmo de Newton-Raphson para a resolução de um sistema de equações transcendentes, que resolve o sistema acima com alto grau de precisão, tendo mesmo verificado os resultados mostrados em [9] <sup>4</sup>. No mesmo programa encontra-se uma rotina de resolução de sistema de equações diferenciais tipo Runge-Kutta, usada na integração das equações TOV.

Tendo-se encontrado as raízes (3.35), podemos calcular as densidades de energia e pressão do sistema a partir das expressões:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{3} b M (g_\sigma \sigma)^3 + \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \varrho_{03}^2 \\ &+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,B}} \sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2} k^2 dk \\ &+ \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,\lambda}} \sqrt{k^2 + m_\lambda^2} k^2 dk; \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{3} b M (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \varrho_{03}^2 \\ &+ \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,B}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}} \\ &+ \frac{1}{3} \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,\lambda}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_\lambda^2}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

<sup>4</sup> Quando utilizamos as constantes de acoplamento presentes no artigo.

Apresentamos os resultados encontrados com este programa na seção seguinte, ressaltando que, como Glendenning em [9] fitou suas constantes para  $B/A = -15.95 \text{ MeV}$  e  $\rho_0 = 0.145 \text{ fm}^{-3}$  e nós para  $B/A = -16.0 \text{ MeV}$  e  $\rho_0 = 0.15 \text{ fm}^{-3}$ , alguns dados podem diferir um pouco.

### 3.5 Propriedades de Estrelas de Nêutrons

Antes de apresentar os resultados das populações bariônicas de um sistema descrito pelo lagrangiano (3.19), precisamos encontrar as razões  $\chi_{(\sigma,\omega,\rho),H}$  para os híperons. Como estas partículas não se encontram em núcleos em seu estado fundamental, fica difícil saber em que proporção eles são menos acoplados aos mésons que os núcleons. Seguiremos a proporção  $\chi_{(\sigma,\omega,\rho),H} = \sqrt{2/3}$  proposta por Moszkowski [54] baseado no conteúdo de quarks em núcleons e híperons. Para entender o impacto deste parâmetro na teoria, também apresentaremos os resultados para o acoplamento universal  $\chi_{(\sigma,\omega,\rho),H} = 1$ , ou seja, híperons e núcleons acoplados aos mésons com a mesma intensidade. Assim, para uma melhor compreensão das implicações desta teoria, analisaremos 4 casos nesta seção;

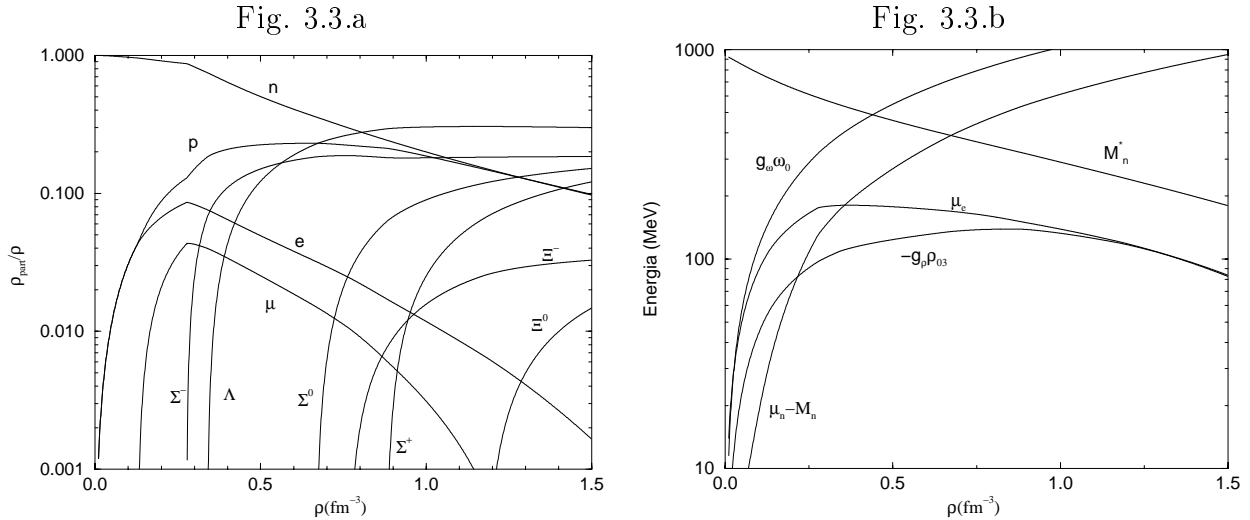
- caso I: sistema composto de híperons, núcleons e léptons com  $\chi_{(\sigma,\omega,\rho),H} = \sqrt{2/3}$ ;
- caso II: mesmo sistema do caso I, mas com  $\chi_{(\sigma,\omega,\rho),H} = 1$ ;
- caso III: sistema composto de nêutrons, prótons, elétrons e múons;
- caso IV: mesmo sistema do caso III, mas com  $g_\rho = 0$ .

#### *Caso I*

Na figura 3.3 apresentamos as populações dos diferentes bárions e léptons em função da densidade bariônica total,  $\rho$ ; também mostramos a evolução dos potenciais químicos e intensidade dos campos com  $\rho$ . Da expressão para o potencial químico (3.30), vemos que cada espécie bariônica será populada quando seu potencial químico atingir o *limiar de existência*, ou seja, quando a combinação do potencial químico do nêutron e do elétron for suficiente para fazer o momentum da partícula deixar de ser zero:

$$\mu_n - q_{e,B}\mu_e \geq g_{\omega B}\omega_0 + g_{\rho B}\rho_0 I_{3B} + (M_B - g_{\sigma B}\sigma). \quad (3.38)$$

Da expressão acima vemos que partículas serão favorecidas quando tiverem um lado esquerdo grande e um lado direito pequeno: espécies com carga negativa tem o lado esquerdo da desigualdade maior que os com carga positiva ou nula, tendo portanto um limiar de existência menor; estas são ditas partículas favorecidas pela carga. Por outro lado, devido à predominância do nêutron,  $g_{\rho B}\rho_0$  será negativo (ver eq. (3.26)) e espécies com sinal oposto ao do isospin do nêutron terão o lado direito de (3.38) menor que as com isospin de mesmo sinal do nêutron, diminuindo seu limiar de existência; estas espécies são ditas favorecidas pelo isospin. Estes conceitos de favorecimento por carga ou isospin são importantes quando consideramos a ausência da partícula  $\Delta$  destas populações, pois, além de possuir uma massa



**Fig. 3.3:** Populações bariônicas (a) e potenciais químicos e intensidades dos campos (b) para o caso I ( $H+N+\chi_H = \sqrt{2/3}$ )

elevada, quando esta espécie é muito favorecida pelo isospin (e.g.  $+3/2$  em  $\Delta^{++}$ , tabela (2.2)), é muito desfavorecida pela carga e vice-versa.

### Caso II

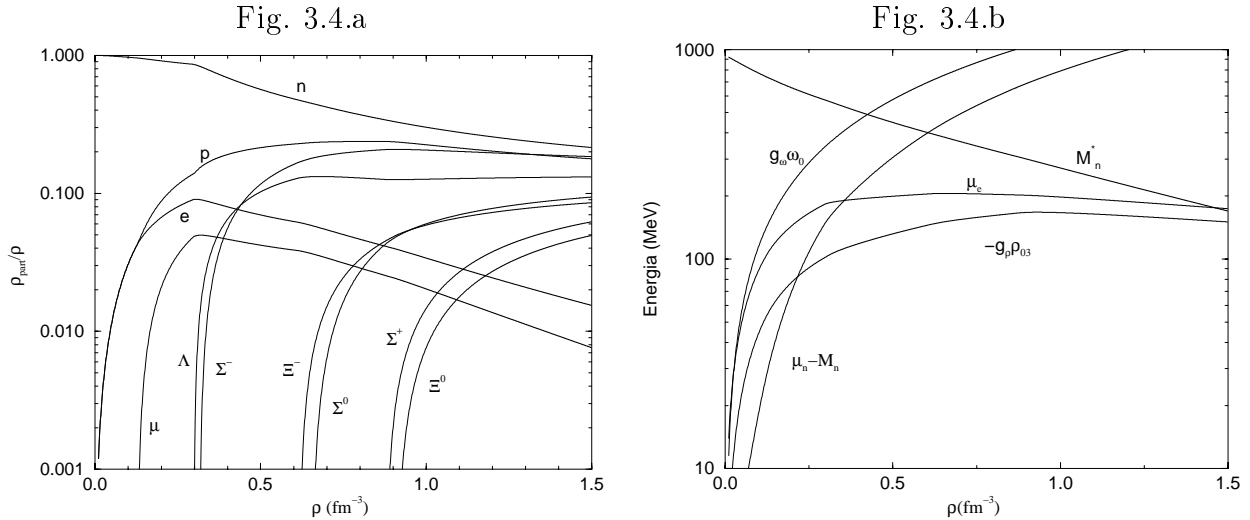
Das figuras 3.4, vemos que o efeito de aumentar o acoplamento méson-híperon de  $\sqrt{2/3}$  para 1 é o de aumentar a população das partículas favorecidas pelo isospin, já que, por exemplo,  $\Sigma^0$  e  $\Xi^-$  invertem-se na ordem de aparecimento. Notar que o potencial  $g_\omega\omega_0$  é diretamente proporcional à densidade bariônica total para o caso do acoplamento universal, daí o comportamento perfeitamente logarítmico na figura dos potenciais.

### Caso III

A presença de nêutrons, prótons, elétrons e múons, desconsiderando-se os graus de liberdade hiperônicos é o cenário mais adotado nos modelos de estrelas de nêutrons; na figura 3.5 mostramos as populações e potenciais para este caso. Vemos que com a ausência de outros bárions carregados, a neutralidade elétrica é mantida apenas por  $p^+$ ,  $e^-$  e  $\mu^-$ , fazendo com que a população de léptons seja sempre crescente, ao contrário do que acontecia nos casos I e II.

### Caso IV

Apresentamos na figura 3.6 os resultados da teoria para o caso IV quando desconsideramos os efeitos da energia de simetria, ou seja, quando retiramos o méson  $\rho$  do modelo ( $g_\rho = 0$ ). Comparando as figuras (3.5) e (3.6) vemos que os prótons, elétrons e múons



**Fig. 3.4:** Populações bariônicas (a), potenciais químicos e intensidades dos campos (b) para o caso II ( $H+N+\chi_H = 1$ ).

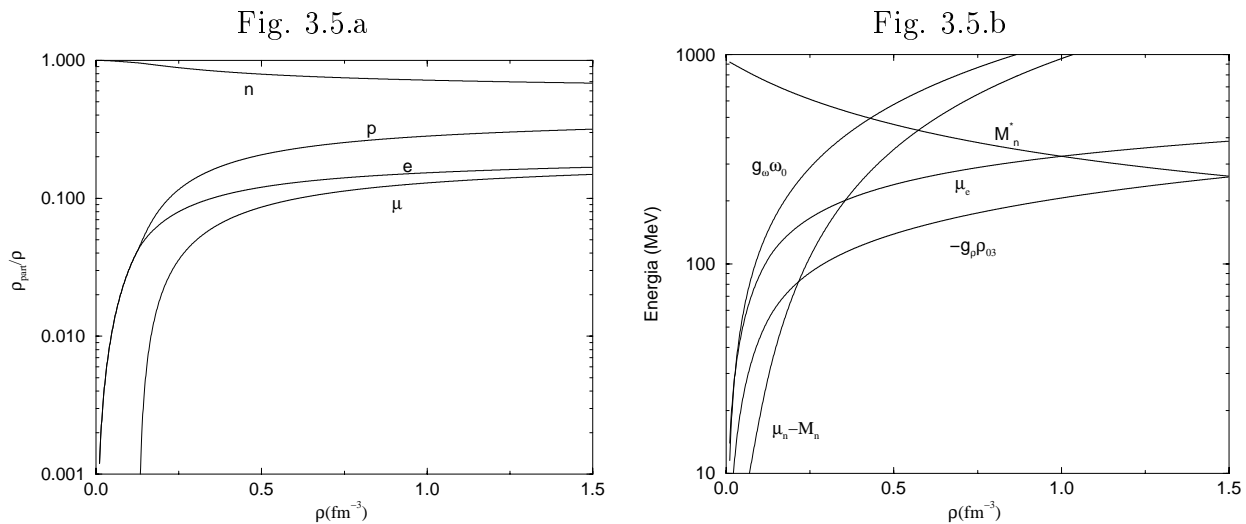
Região	Densidade ( $g/cm^3$ )	Tipo de matéria	Referência
I	$2 \times 10^3 < \rho < 1 \times 10^{11}$	cristalina; metais leves, gás de elétrons	Harrison e Wheeler [17]
II	$1 \times 10^{11} < \rho < 2 \times 10^{13}$	cristalina; metais pesados, gás de elétrons relativísticos	Negele e Vautherin [55]
III	$2 \times 10^{13} < \rho < 5 \times 10^{15}$	núcleons, híperons e léptons relativísticos	modelo apresentado neste trabalho [9]

**Tab. 3.1:** Equações de estado para cada faixa de densidades.

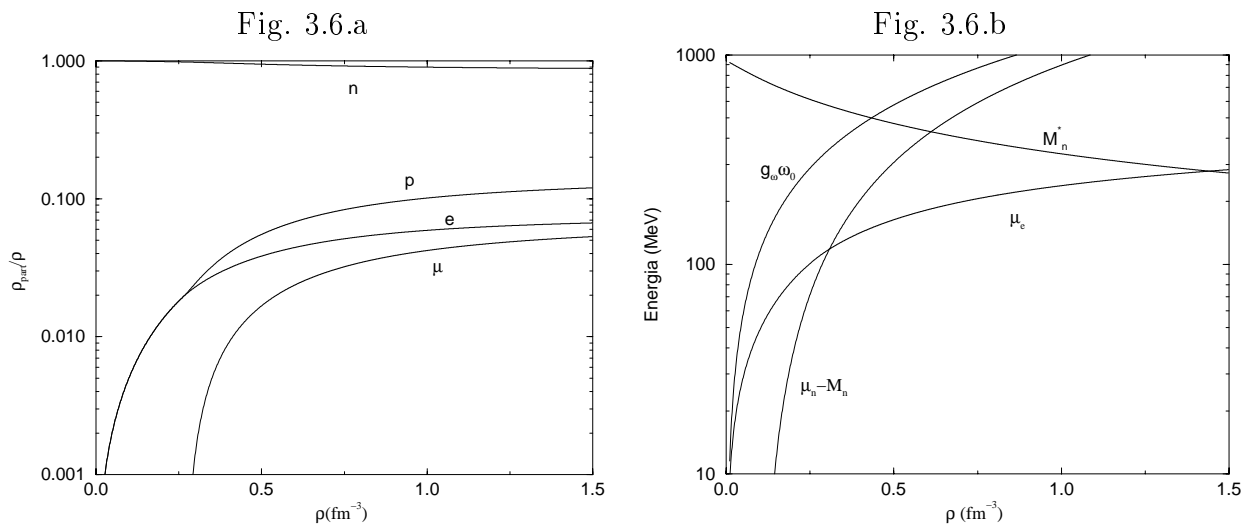
não passariam de 10% da população de nêutrons; estes gráficos mostram dramaticamente a importância da inclusão do méson isovetorial  $\rho$  na teoria.

Tendo encontrado todos os momenta das partículas, estamos aptos a encontrar a equação de estado a partir de (3.36) e de (3.37). Porém, esta equação de estado foi deduzida em um modelo que considera densidades nucleares e super-nucleares ( $10^{14} - 10^{15} g/cm^3$ ); como as densidades em estrelas de nêutrons varrem uma faixa que vai desde estas altas densidades na região central até quase anular-se na superfície, precisaremos de outras equações de estado para as regiões de estado sub-nucleares. Devido ao seu sucesso na descrição das regiões consideradas, escolhemos as equações mostradas na tabela 3.1. Introduzindo esta equação de estado total nas equações OTV (1.18) e (1.23), poderemos obter a massa e o raio das estrelas como função de sua densidade central  $\varepsilon_c$ ; da equação (1.64), também temos o valor do *redshift* para cada estrela da sequência. Além disso, como demonstrado em [15], podemos encontrar o número total de espécies B em uma estrela através da expressão

$$N_B = 4\pi \int_0^R \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} r^2 \rho_B(r) dr, \quad (3.39)$$



**Fig. 3.5:** Populações bariônicas (a), potenciais químicos e intensidades dos campos (b) para o caso III ( $n, p, e^-$  e  $\mu^-$ ,  $g_\rho \neq 0$ ).



**Fig. 3.6:** Populações bariônicas (a), potenciais químicos e intensidades dos campos (b) para o caso IV ( $n, p, e^-$  e  $\mu^-$ , com  $g_\rho = 0$ ).

$\rho_c(fm^{-3})$	R(km)	$M/M_\odot$	$z$	A	Y/A	$\varepsilon_c$
1.416 -1	1.39 +1	3.099 -1	3.457 -2	3.70 +56	0.	2.402 +14
1.771 -1	1.34 +1	5.133 -1	6.175 -2	6.17 +56	0.	3.025 +14
2.207 -1	1.35 +1	7.840 -1	9.845 -2	9.58 +56	0.	3.808 +14
2.737 -1	1.28 +1	1.103	1.579 -1	1.37 +57	0.	4.794 +14
3.042 -1	1.30 +1	1.228	1.773 -1	1.54 +57	4.339 -4	5.379 +14
3.378 -1	1.30 +1	1.339	1.984 -1	1.69 +57	3.084 -3	6.035 +14
3.747 -1	1.30 +1	1.433	2.172 -1	1.82 +57	8.176 -3	6.772 +14
4.153 -1	1.30 +1	1.516	2.344 -1	1.94 +57	1.650 -2	7.598 +14
4.598 -1	1.28 +1	1.589	2.559 -1	2.04 +57	2.863 -2	8.525 +14
5.086 -1	1.27 +1	1.655	2.744 -1	2.14 +57	4.454 -2	9.565 +14
5.618 -1	1.27 +1	1.714	2.888 -1	2.22 +57	6.379 -2	1.073 +15
6.198 -1	1.24 +1	1.767	3.131 -1	2.30 +57	8.610 -2	1.204 +15
6.827 -1	1.22 +1	1.809	3.329 -1	2.36 +57	1.102 -1	1.351 +15
7.509 -1	1.19 +1	1.840	3.558 -1	2.41 +57	1.343 -1	1.516 +15
8.247 -1	1.17 +1	1.865	3.736 -1	2.45 +57	1.593 -1	1.701 +15
9.045 -1	1.15 +1	1.883	3.905 -1	2.47 +57	1.845 -1	1.908 +15
9.908 -1	1.12 +1	1.884	4.088 -1	2.48 +57	2.077 -1	2.141 +15
1.084 +0	1.10 +1	1.888	4.228 -1	2.48 +57	2.316 -1	2.402 +15
1.184 +0	1.08 +1	1.882	4.340 -1	2.47 +57	2.558 -1	2.696 +15
1.292 +0	1.06 +1	1.867	4.424 -1	2.44 +57	2.805 -1	3.025 +15
1.408 +0	1.03 +1	1.851	4.587 -1	2.41 +57	3.041 -1	3.394 +15

**Tab. 3.2:** *Propriedades estelares para o caso I.  $\rho_c$  corresponde a densidade de partículas no centro da estrela,  $z$  é o redshift e  $Y/A$  representa a proporção híperon/núcleon na estrela.*

onde  $\rho_B(r)$  é a densidade de partícula do bárion B em função do raio da estrela. Fazemos isto para os casos I e II e mostramos os resultados explicitamente nas tabelas 3.2 e 3.3.

Vemos que as massas máximas das sequências de estrelas de nêutrons nos casos I, II e III estão na faixa de aceitabilidade ( $> 1.5M_\odot$ ) sugerida pelas atuais medidas de massas de pulsares.

No caso I, tomando a estrela de maior massa, uma estrela de massa intermediária e outra de massa pequena, podemos entender como as diferentes densidades se distribuem nas estrelas de nêutrons a partir da análise da figura 3.7. Nas estrelas de massa máxima e intermediária vemos que a densidade de energia varia muito pouco da região central até a superfície, enquanto que a de massa pequena varre uma grande faixa de valores de densidades; temos  $\varepsilon \sim 10^{14}g/cm^3$  no centro da estrela e  $\varepsilon_s \sim 10^3g/cm^3$  na superfície. Em 3.8 está mostrada a sequência de estrelas de nêutrons como função da densidade central para os casos I, II e III e também a relação massa-raio para estes casos. A presença de híperons diminui fortemente a massa máxima do modelo em comparação com a abordagem tradicional considerando apenas núcleons e léptons. Nos casos em que há híperons, o acoplamento universal prevê maiores massas estelares que o caso em que estes bárions se acoplam mais fracamente com os mésons ( $\chi_H^2 = 2/3$ ). Apresentamos nas figuras 3.9 e 3.10 a forma com que as diferentes partículas se distribuem ao longo do raio para a estrela de massa máxima

$\rho_c (fm^{-3})$	R(km)	$M/M_\odot$	z	A	Y/A	$\varepsilon_c$
1.416 -1	1.390 +1	3.099 -1	3.457 -2	3.707 +56	0.	2.402 +14
1.771 -1	1.340 +1	5.133 -1	6.175 -2	6.178 +56	0.	3.025 +14
1.978 -1	1.340 +1	6.410 -1	7.897 -2	7.768 +56	0.	3.394 +14
2.207 -1	1.350 +1	7.840 -1	9.845 -2	9.583 +56	0.	3.808 +14
2.459 -1	1.350 +1	9.393 -1	1.216 -1	1.158 +57	0.	4.272 +14
2.737 -1	1.280 +1	1.102 +0	1.577 -1	1.372 +57	0.	4.794 +14
3.041 -1	1.300 +1	1.264 +0	1.840 -1	1.592 +57	0.	5.379 +14
3.375 -1	1.300 +1	1.391 +0	2.087 -1	1.765 +57	0.	6.035 +14
3.741 -1	1.310 +1	1.505 +0	2.297 -1	1.924 +57	4.451 -3	6.772 +14
4.142 -1	1.300 +1	1.610 +0	2.552 -1	2.072 +57	1.184 -2	7.598 +14
4.579 -1	1.290 +1	1.705 +0	2.801 -1	2.214 +57	2.308 -2	8.525 +14
5.055 -1	1.280 +1	1.795 +0	3.058 -1	2.344 +57	3.777 -2	9.565 +14
5.570 -1	1.260 +1	1.870 +0	3.334 -1	2.462 +57	5.507 -2	1.073 +15
6.127 -1	1.250 +1	1.936 +0	3.567 -1	2.560 +57	7.426 -2	1.204 +15
6.727 -1	1.220 +1	1.988 +0	3.873 -1	2.646 +57	9.368 -2	1.351 +15
7.372 -1	1.200 +1	2.029 +0	4.123 -1	2.706 +57	1.131 -1	1.516 +15
8.065 -1	1.180 +1	2.057 +0	4.346 -1	2.748 +57	1.326 -1	1.701 +15
8.806 -1	1.150 +1	2.069 +0	4.596 -1	2.780 +57	1.516 -1	1.908 +15
9.600 -1	1.130 +1	2.080 +0	4.789 -1	2.787 +57	1.701 -1	2.141 +15
1.044 +0	1.110 +1	2.081 +0	4.956 -1	2.780 +57	1.880 -1	2.402 +15
1.135 +0	1.080 +1	2.066 +0	5.148 -1	2.770 +57	2.049 -1	2.696 +15
1.231 +0	1.060 +1	2.054 +0	5.276 -1	2.739 +57	2.219 -1	3.025 +15
1.334 +0	1.040 +1	2.035 +0	5.375 -1	2.701 +57	2.383 -1	3.394 +15

Tab. 3.3: Propriedades estelares para o caso II.

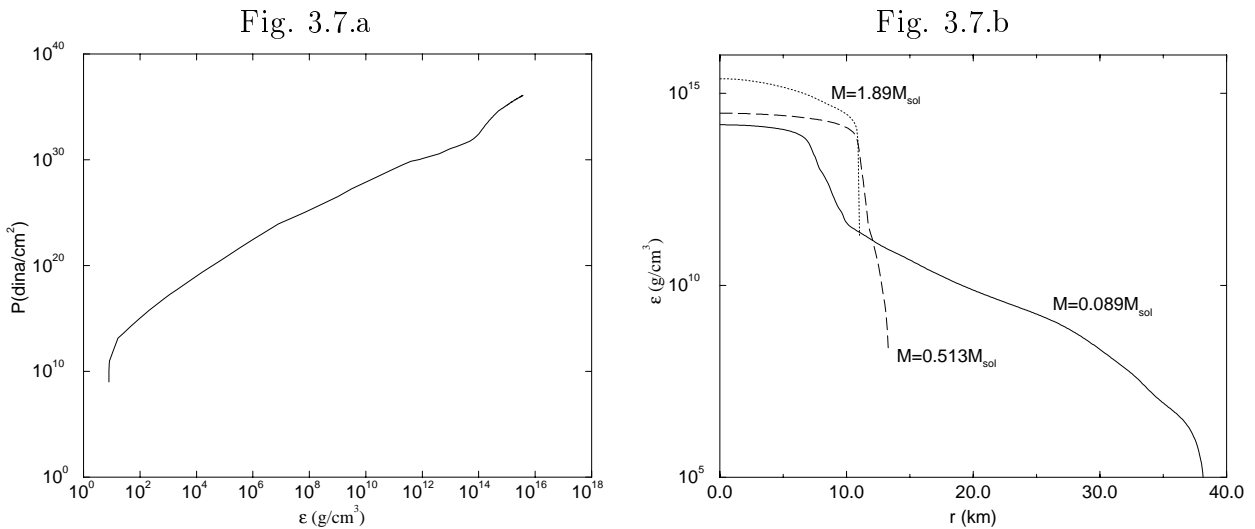
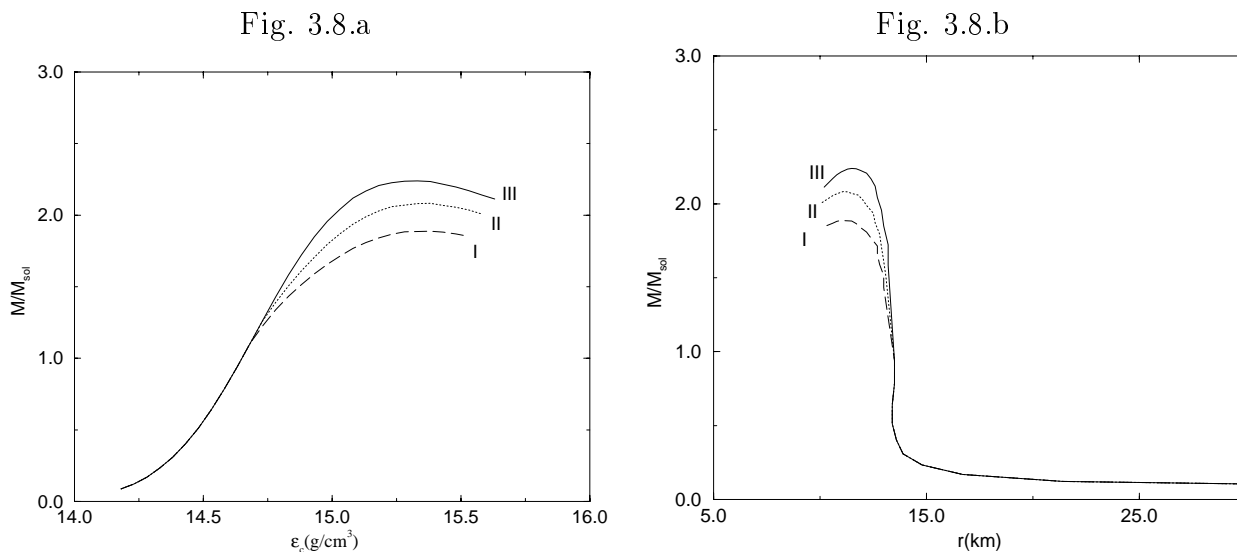


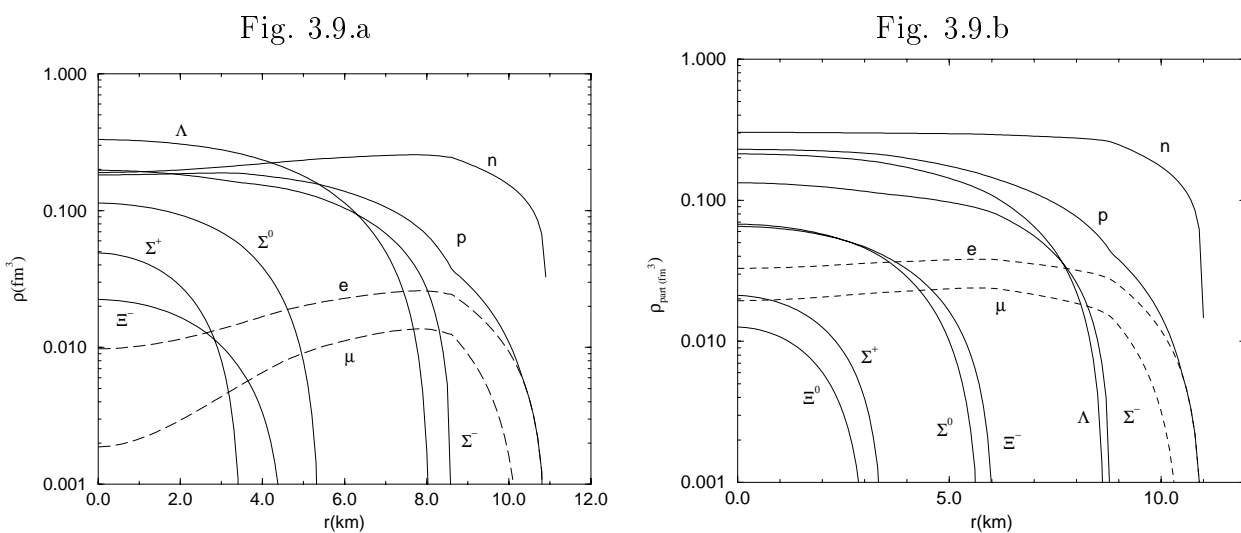
Fig. 3.7: Equação de estado (a) e distribuição radial da densidade de energia (b) para o caso I.



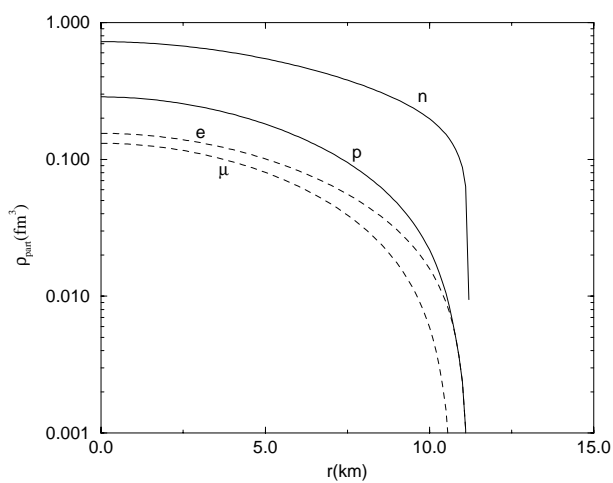
**Fig. 3.8:** *Relações massa da estrela-densidade central (a) e massa da estrela-raio (b) para os casos I, II e III.*

para os três casos. É interessante notar que, no caso I, o nêutron domina a maior parte da estrela, mas do centro até um raio de 4 km o  $\Lambda$  é mais populoso. Nos casos I e II, a partícula dominante é sempre o nêutron, justificando mais ainda nome de estrelas de nêutrons.

Vimos neste capítulo uma teoria bastante completa sobre a constituição de estrelas de nêutrons e encontramos resultados em bom acordo com as massas de pulsares já encontradas. No próximo capítulo introduzimos um modelo com acoplamentos méson-núcleon ajustáveis, o qual nos permitirá investigar a influência de propriedades da matéria nuclear nos valores de massa, raio, proporção de híperons, entre outras propriedades estelares.



**Fig. 3.9:** Distribuição radial das populações bariônicas e leptônicas para os casos I (a) e II (b).



**Fig. 3.10:** Distribuição radial de prótons, nêutrons e léptons para o caso III.

## Capítulo 4

# Modelo com Acoplamento Ajustável

### 4.1 Introdução

Quando se estuda modelos renormalizáveis tipo QHD, podemos ir além dos diagramas de nível de árvore e calcular as correções radioativas. Porém, a inclusão de contribuições de mais alta ordem, usando a expansão de *loop* único, só tem piorado a fenomenologia [56]. Isto pode ser contornado com a inclusão de diagramas mais complexos, considerando correções de vértices e correlações de curto alcance.

Alternativamente, uma melhora da fenomenologia pode ser conseguida através da moderna abordagem da renormalização em termos de teorias efetivas [57, 58]. Nestas teorias pode-se, e *deve-se*, adicionar mais e mais interações, mesmo *não-renormalizáveis*, de modo a melhor descrever o sistema naquela escala de energia usando graus de liberdades compostos (híbridos).

Estas teorias baseiam-se em duas observações básicas. Primeiro, a de que teorias relativísticas de campos quânticos *não* devem ser reservadas à descrição apenas de partículas elementares; estas teorias são apenas um meio de parametrizar a matriz de espalhamento  $S$ , coerente com a unitariedade, a analiticidade, a causalidade e simetrias (covariância de Lorentz, simetria quiral, entre outras) podendo ser estendidas a graus de liberdades compostos. Segundo, na maioria dos problemas da física os fenômenos relevantes à descrição do sistema são restritos a uma determinada escala de comprimento, não sendo necessário incluir explicitamente a dinâmica existente em escalas menores (e.g. física atômica e molecular não precisam da dinâmica nuclear). Desta forma, podemos elaborar teorias efetivas de campos válidas naquela escala de comprimento, retirando os graus de liberdade correspondentes às escalas menores. Os efeitos destas escalas excluídas entrarão na teoria implicitamente a partir das várias constantes de acoplamento adequando-as aos dados experimentais. Isto, essencialmente, é o que os modelos do tipo QHD fazem em sistemas com densidade finita.

Porém, como essas teorias podem abarcar um número infinito de termos de interação, são necessárias algumas regras para se obter resultados significativos. Deve-se identificar no modelo um parâmetro de expansão suficientemente pequeno na região de interesse. Também assume-se uma *naturalidade*, conceito significando que os acoplamentos desconhecidos da teoria, quando rearranjados em uma determinada forma adimensional [59], sejam da ordem da unidade. Deste modo, as contribuições ao lagrangiano podem ser truncadas numa determinada potência daquele parâmetro pequeno.

Walecka e Serot em [60] sugerem que os novos lagrangianos que aparecerem nesta nova filosofia, com o objetivo de descrever a dinâmica nuclear, deverão respeitar alguns pontos principais: campos de núcleons devem estar presentes, pois são os graus de liberdade de fato observados nesta escala de energia; as simetrias da QCD devem ser respeitadas; não deve haver redundância formal na descrição dos campos, ou seja, não se pode através de uma simples transformação de ponto eliminar termos do lagrangiano; píons podem ser incluídos aplicando-se o formalismo da teoria de perturbação quiral. O ponto mais interessante desta discussão é quando estes autores apresentam os possíveis parâmetros de expansão na teoria:  $S/M$  ou  $V/M$ , onde  $S$  e  $V$  são os potenciais escalar e vetorial, respectivamente. Eles sugerem um termo genérico do lagrangiano efetivo do tipo:

$$\mathcal{L} \sim g \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \left( \frac{\bar{\psi} \Gamma \psi}{f_\pi^2 M} \right)^l \left( \frac{S}{f_\pi} \right)^m \left( \frac{V}{f_\pi} \right)^n \left( \frac{\partial \text{ ou } m_\pi}{M} \right)^p f_\pi^2 M^2, \quad (4.1)$$

onde  $\psi$  é o campo do núcleon,  $\Gamma$  é uma matriz de Dirac qualquer,  $\partial$  se refere a eventuais derivadas e  $m_\pi$  e  $f_\pi$  se referem à massa do pión e à sua constante de decaimento, parâmetros com sentido vinculado à teoria de perturbação quiral que não abordamos neste trabalho. De qualquer maneira, estudos considerando esta liberdade de acréscimos de termos, dos quais a renormalizabilidade não é exigida, começaram a aparecer em modelos do tipo QHD.

Como vimos no capítulo 2, muitas técnicas foram usadas para tentar corrigir as deficiências do modelo original de Walecka; o modelo Não-Linear insere novos termos no lagrangiano enquanto que os modelos ZM e ZM3 trocam a forma do acoplamento entre os mésons e os núcleons. Com o aparecimento de modelos do tipo ZM, muitos autores começaram a explorar mais a liberdade que os modelos efetivos nos dão e surgiram trabalhos que utilizam outros tipos de acoplamento de modo a reproduzir, com o mínimo de parâmetros físicos, as propriedades globais do núcleo.

Neste capítulo, o autor deste trabalho apresenta um modelo que abarca a maioria destes modelos existentes na literatura, vinculando aos acoplamentos méson-núcleon parâmetros matemáticos livres. Na seção 4.2 construímos essa generalização a partir de alguns modelos que aparecem na literatura. Na seção seguinte exploramos o modelo recém elaborado para obter resultados como a massa efetiva do núcleon e a incompressibilidade da matéria nuclear; também estudamos o papel dos potenciais escalar e vetorial nas propriedades nucleares. Por último, aplicamos o modelo à teoria de estrelas de nêutrons, desenvolvida no capítulo 3, para compreender em que medida o acoplamento méson-núcleon afeta a massa máxima de estrelas de nêutrons, a distribuição radial dos bárions e a proporção híperon-núcleon, entre outras propriedades desses objetos estelares.

## 4.2 Modelos Fenomenológicos e um Modelo com Acoplamento Ajustável

Koepf, Sharma e Ring [61] estudaram o termo  $\mathcal{L}_{\sigma N} = M \bar{m}^* \bar{\psi} \psi$  usando os acoplamentos fenomenológicos mostrados na tabela 4.1. O primeiro e o último correspondem ao modelo de Walecka e ao ZM, respectivamente. Glendenning e Moszkowski [39] analisaram um

	$\bar{m}^*(\sigma)$	$M^*/M$	$K(MeV)$
1	$1 - \frac{g_\sigma\sigma}{M}$	0.55	545
2	$1 - \tanh(\frac{g_\sigma}{M}\sigma)$	0.71	410
3	$\exp(-\frac{g_\sigma\sigma}{M})$	0.80	265
4	$(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{M})^{-1}$	0.85	233

**Tab. 4.1:** Valores de massa efetiva do núcleon e incompressibilidade da matéria nuclear para diferentes tipos de acoplamentos entre o méson escalar e o núcleon.

acoplamento do tipo:

$$\bar{m}^* = (1 - \frac{g_\sigma\sigma}{2M})(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{2M})^{-1}, \quad (4.2)$$

e obtiveram  $M^*/M = 0.796$  e  $K = 265 MeV$ .

Nota-se em todos estes acoplamentos a preocupação de manter a forma para a expressão da massa efetiva de Walecka,  $M^*/M \sim 1 - g_\sigma\sigma/M$ , em primeira ordem para  $g_\sigma\sigma/M$ . Esta aproximação é bastante razoável, já que essencialmente  $g_\sigma\sigma$  representa o desvio sofrido pela massa do núcleon devido à presença dos mésons escalares. Como os resultados experimentais sugerem  $M^*/M \sim 0.78$ , temos  $g_\sigma\sigma/M \sim 0.3$ . Os diversos modelos apenas corrigem a expressão de Walecka com termos de ordem mais alta em  $g_\sigma\sigma/M$ .

Baseando-se nas características comuns dos vários modelos acima, podemos propor um modelo que, com parâmetros matemáticos adequados, recupera os resultados da maioria dos lagrangianos apresentados. Nossa proposta de lagrangiano tem a mesma forma de (2.120),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [i\gamma_\mu(\partial^\mu + ig_\omega^*\omega^\mu) - (M - g_\sigma^*\sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu, \end{aligned} \quad (4.3)$$

mas onde agora temos

$$g_\sigma^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{\lambda M}\right)^\lambda} g_\sigma, \quad (4.4)$$

e

$$g_\omega^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{\beta M}\right)^\beta} g_\omega, \quad (4.5)$$

onde  $\lambda$  e  $\beta$  podem representar qualquer número real não-negativo. Essencialmente o que fizemos foi reescalonar os acoplamentos escalares e vetoriais de Walecka. Por exemplo, fizemos a seguinte troca:

$$g_\sigma\sigma\bar{\psi}\psi \rightarrow \frac{g_\sigma\sigma}{\left(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{\lambda M}\right)^\lambda}\bar{\psi}\psi. \quad (4.6)$$

Este novo acoplamento pode ser expandido em potências do parâmetro (pequeno)  $g_\sigma\sigma/M$ :

$$\frac{g_\sigma\sigma}{\left(1 + \frac{g_\sigma\sigma}{\lambda M}\right)^\lambda} \bar{\psi}\psi = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \bar{\psi}\psi c_n(\lambda) \left(\frac{g_\sigma\sigma}{M}\right)^{n+1}, \quad (4.7)$$

onde

$$c_n(\lambda) = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda + n)}{\Gamma(\lambda + 1)\lambda^{n-1}}. \quad (4.8)$$

Note-se que esta expansão está na forma sugerida por Walecka e Serot em (4.1). A série será absolutamente convergente somente quando  $\lambda > g_\sigma\sigma/M$ , ou seja, cada vez que aumentamos nossa escala de densidades, precisaremos readequar o parâmetro  $\lambda$  se quisermos utilizar a série acima ao invés da expressão explícita para  $g_\sigma^*/g_\sigma$  (eq. (4.4)). Desta forma,  $\lambda$  entra bem no espírito das teorias efetivas e pode ser um parâmetro de escala bastante apropriado. Um estudo mais aprofundado deste acoplamento sob a luz da moderna teoria efetiva de campos foge ao escopo deste estudo.

Deve-se enfatizar que nas teorias efetivas deve-se considerar *todos* os termos coerentes com as simetrias do problema subjacente (no caso, a QCD). Em (4.7) só incluímos termos de auto-acoplamento escalar, sem considerar o auto-acoplamento vetorial  $((\omega_\mu\omega^\mu)^2, (\omega_\mu\omega^\mu)^4, \dots)$  ou termos mistos  $(\sigma\omega_\mu\omega^\mu, \sigma^2\omega_\mu\omega^\mu, \dots)$ . Estas inclusões são deixadas para um trabalho subsequente, mas sabe-se que excelentes fenomenologias são encontradas mesmo quando se acrescentam apenas termos de auto-acoplamentos escalares [62].

É fácil ver a correspondência do lagrangiano (4.3) com os lagrangianos dos principais modelos na tabela abaixo:

Modelo	$\lambda$	$\beta$
Walecka	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
ZM	1	$\rightarrow 0$
ZM3	1	1

Assim, se quisermos os resultados de cada um desses modelos, basta colocar os parâmetros adequados. Porém o principal interesse em estudar esta nossa proposta é verificar as propriedades nucleares para valores intermediários de  $\lambda$  e  $\beta$ .

Aplicando as equações de Euler-Lagrange para este modelo, obtemos:

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - g_\omega^*\gamma_\mu\omega^\mu - (M - g_\sigma^*\sigma))\psi = 0; \quad (4.9)$$

$$\partial_\mu\omega^{\mu\nu} + m_\omega^2\omega^\nu = g_\omega^*\bar{\psi}\gamma^\nu\psi; \quad (4.10)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\sigma + m_\sigma^2\sigma = -F(\sigma)\bar{\psi}\psi - G(\sigma)\bar{\psi}\gamma_\mu\omega^\mu\psi, \quad (4.11)$$

onde

$$F(\sigma) \equiv \frac{\partial M^*}{\partial \sigma},$$

$$G(\sigma) \equiv \frac{\partial g_\omega^*}{\partial \sigma}. \quad (4.12)$$

Fazendo a aproximação de campo médio nestas equações e rearranjando apropriadamente as constantes:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega^* \gamma_0 \omega^0 - (M - g_\sigma^* \sigma))\psi = 0; \quad (4.13)$$

$$g_\omega \omega_0 = m_\beta^* \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) \rho; \quad (4.14)$$

$$g_\sigma \sigma = - \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \left[ \left( \frac{F(\sigma)}{g_\sigma} \right) \rho_S + \left( \frac{G(\sigma)}{g_\sigma g_\omega} \right) (g_\omega \omega_0) \rho \right]. \quad (4.15)$$

Das definições de  $F(\sigma)$  e  $G(\sigma)$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{F(\sigma)}{g_\sigma} &= -m_\lambda^* + \frac{g_\sigma \sigma}{M} (m_\lambda^*)^{(\lambda+1)/\lambda}, \\ \frac{G(\sigma)}{g_\sigma g_\omega} &= -\frac{(m_\beta^*)^{(\beta+1)/\beta}}{M}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

com

$$m_n^* \equiv \frac{1}{\left(1 + \frac{g_\sigma \sigma}{nM}\right)^n}. \quad (4.17)$$

Assim, bem como nos modelos de Walecka, ZM e ZM3, aqui também não precisamos especificar as massas dos mésons, pois todas as equações estão expressas em função das razões  $g_\sigma/m_\sigma$  e  $g_\omega/m_\omega$ . Nota-se a principal característica de ZM3 na última equação para  $\sigma$ ; um acoplamento entre os mésons escalares e vetoriais o qual será comum em todos os modelos do caso  $E - V$ , como veremos adiante. Dos autovalores da equação de Dirac, temos que a energia de Fermi será:

$$\mu = g_\omega^* \omega_0 + \sqrt{k^2 + M^{*2}}. \quad (4.18)$$

As expressões para os potenciais escalar (S) e vetorial (V) são

$$S = -m_\lambda^* g_\sigma \sigma \quad (4.19)$$

$$V = m_\beta^* g_\omega \omega_0. \quad (4.20)$$

Vemos assim a vantagem deste nosso modelo: ele apresenta *acoplamentos méson-núcleon ajustáveis*. Por exemplo, ao variar  $\lambda$  entre 0 e 1, mantendo  $\beta$  nulo, estaremos varrendo muitos valores de  $S$ ,  $V$ ,  $M^*$  e  $K$  que existem entre o modelo de Walecka e o ZM. Similarmente, podemos variar  $\lambda$  e  $\beta$  entre 0 e 1 para encontrar valores daquelas propriedades nucleares que existem entre Walecka e ZM3.

A faixa de valores interessantes para esses parâmetros não é tão grande como pode-se pensar a princípio. Devido à forma de nosso acoplamento geral (equações (4.4) e (4.5)), há uma rápida convergência para uma forma exponencial de acoplamento. Para ver isso, basta fazermos  $\lambda$  e/ou  $\beta$  tender ao infinito <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} g_\sigma^* &\rightarrow e^{-\frac{g_\sigma \sigma}{M}} g_\sigma, \\ g_\omega^* &\rightarrow e^{-\frac{g_\sigma \sigma}{M}} g_\omega. \end{aligned} \quad (4.21)$$

<sup>1</sup> Apesar de muito parecido, este acoplamento não é o mesmo do modelo 3 que aparece na tabela (4.1).

Como veremos na próxima seção, já para  $\lambda$  e/ou  $\beta > 1$  os resultados não diferem muito desse acoplamento exponencial.

Apesar de haver outras possibilidades de combinação entre os parâmetros  $\lambda$  e  $\beta$ , neste capítulo exploraremos apenas dois casos principais:

- Escalar (caso E): variamos  $\lambda$ , mantendo  $\beta$  nulo. Este caso pode abrigar os modelos W e ZM.
- Escalar-Vetorial (caso E-V): variamos  $\lambda$  e  $\beta$ , mas com o vínculo  $\beta = \lambda$ . W e ZM3 se encaixam nesta categoria.

O fato do modelo W pertencer às duas categorias não é estranho, já que para esse modelo os dois parâmetros matemáticos são nulos. Quando tomarmos o limite  $\lambda \rightarrow \infty$  para o caso E, teremos um modelo com um acoplamento do tipo exponencial (eq .4.21); nos referiremos nas figuras a este modelo assintótico como EXP/E. Similarmente, para  $\lambda, \beta \rightarrow \infty$  teremos um modelo EXP/E-V.

Na próxima seção exploramos as propriedades nucleares deste novo modelo analisando como elas dependem dos parâmetros matemáticos introduzidos. Também analisaremos o comportamento de  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$  e  $(g_\omega/m_\omega)^2$  para os diferentes valores de  $\lambda$ .

### 4.3 Propriedades nucleares do Modelo com Acoplamento Ajustável

Precisamos primeiramente determinar as constantes de acoplamento  $g_\sigma/m_\sigma$  e  $g_\omega/m_\omega$  deste modelo. Seguimos o procedimento padrão exposto no capítulo 2, em que se resolve um sistema de três equações (equilíbrio químico, massa efetiva e pressão nula) a três incógnitas (as constantes de acoplamento e a massa efetiva). Para cada caso, E e E-V, encontramos numericamente valores para  $g_\sigma/m_\sigma$ ,  $g_\omega/m_\omega$  e  $g_\sigma\sigma$ , como função do  $\lambda$  escolhido (lembrar que para o caso E-V,  $\beta = \lambda$ ).

Resta-nos ainda encontrar valores para a incompressibilidade; podemos, de fato, deduzir uma expressão analítica para esta propriedade nuclear a partir de sua definição:

$$K = \left[ k^2 \frac{d^2(\varepsilon/\rho)}{dk^2} \right]_{\rho=\rho_0}. \quad (4.22)$$

Expandindo a equação acima, temos

$$K = \left[ k^2 \left( \frac{p}{\rho} \frac{d^2\rho}{dk^2} + \left( \frac{d\rho}{dk} \right)^2 \left( \frac{-2p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d\mu}{d\rho} \right) \right) \right]_{\rho=\rho_0}. \quad (4.23)$$

Como na densidade de saturação nuclear a pressão é nula, ficamos com

$$K = 3k_0 \left. \frac{d\mu}{dk} \right|_{k=k_0}. \quad (4.24)$$

O potencial químico  $\mu$  é função de  $k$  e de  $\sigma$  e portanto sua derivada em relação a  $k$  será:

$$\frac{d\mu}{dk} = \frac{\partial\mu}{\partial\sigma} \frac{d\sigma}{dk} + \frac{\partial\mu}{\partial k}. \quad (4.25)$$

Portanto, para encontrar a incompressibilidade precisamos calcular os três termos da equação acima. Da expressão 4.18 para o potencial químico, temos que:

$$\frac{\partial\mu}{\partial k} = m_{\beta}^{*2} \frac{g_{\omega}^2}{m_{\omega}^2} \frac{2k^2}{\pi^2} + \frac{k}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \quad (4.26)$$

e

$$\frac{\partial\mu}{\partial\sigma} = 2m_{\beta}^{*} \frac{g_{\omega}^2}{m_{\omega}^2} \frac{\partial m_{\beta}^{*}}{\partial\sigma} \frac{2k^3}{3\pi^2} + \frac{M^{*}}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \frac{\partial M^{*}}{\partial\sigma}. \quad (4.27)$$

Para encontrar  $d\sigma/dk$ , passamos todos os termos da equação do campo  $\sigma$  (eq. 4.15) para um mesmo membro. Assim, teremos uma função  $f = f(\sigma, k)$  tal que,

$$f(\sigma, k) \equiv m_{\sigma}^2 \sigma + F(\sigma) \rho_s + G(\sigma) m_{\beta}^{*} \frac{g_{\omega}^2}{m_{\omega}^2} \rho^2 = 0; \quad (4.28)$$

assim,

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{-(\partial f / \partial k)_{\sigma}}{(\partial f / \partial \sigma)_k}. \quad (4.29)$$

Calculando estas novas derivadas, obtemos:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial k} \right)_{\sigma} = F(\sigma) \frac{\partial \rho_s}{\partial k} + 2G(\sigma) m_{\beta}^{*} \frac{g_{\omega}}{m_{\omega}^2} \rho \frac{d\rho}{dk}. \quad (4.30)$$

e

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_k = m_{\sigma}^2 + \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \rho_s + F(\sigma) \frac{\partial \rho_s}{\partial \sigma} + m_{\beta}^{*} \frac{g_{\omega}}{m_{\omega}^2} \frac{\partial G(\sigma)}{\partial \sigma} \rho^2 + \frac{G(\sigma)}{m_{\omega}^2} \frac{\partial g_{\omega}^{*}}{\partial \sigma} \rho^2. \quad (4.31)$$

Precisamos agora calcular as derivadas de  $F(\sigma)$  e  $G(\sigma)$  em relação a  $\sigma$ . De (4.12) temos que

$$\frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} = g_{\sigma}^2 \left[ \frac{2}{M} (m_{\lambda}^{*})^{(\lambda+1)/\lambda} - \frac{\lambda+1}{\lambda} \frac{g_{\sigma} \sigma}{M^2} (m_{\lambda}^{*})^{(\lambda+2)/\lambda} \right] \quad (4.32)$$

e

$$\frac{\partial G(\sigma)}{\partial \sigma} = g_{\omega} g_{\sigma}^2 \left[ \frac{\beta+1}{\beta} \frac{1}{M^2} (m_{\beta}^{*})^{(\beta+2)/\beta} \right]. \quad (4.33)$$

Notar que, se quisermos uma incompressibilidade também dependente apenas das razões  $g_{\sigma}/m_{\sigma}$  e  $g_{\omega}/m_{\omega}$ , teremos que expressar os resultados em função de

$$F(\sigma), \quad G(\sigma), \quad \frac{1}{g_{\sigma}^2} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \quad \text{e} \quad \frac{1}{g_{\omega} g_{\sigma}^2} \frac{\partial G(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad (4.34)$$

analogamente ao que fizemos em (4.15). Introduzindo os resultados (4.26),(4.27),(4.30) e (4.31) na expressão (4.25), teremos uma incompressibilidade expressa por:

$$K = K1 + K2 + \frac{K3A \times K3B}{K3C}, \quad (4.35)$$

onde

$$K1 = m_\beta^{*2} \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) \frac{6k_0^3}{\pi^2}, \quad (4.36)$$

$$K2 = \frac{3k_0^2}{\sqrt{k_0^2 + M^{*2}}} \quad (4.37)$$

e

$$K3A = -3K_0 \left[ 2 \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) m_\beta^* \left( \frac{G(\sigma)}{g_\sigma g_\omega} \right) \frac{2k_0^3}{3\pi^2} + \frac{M^*}{\sqrt{k_0^2 + M^{*2}}} \left( \frac{F(\sigma)}{g_\sigma} \right) \right], \quad (4.38)$$

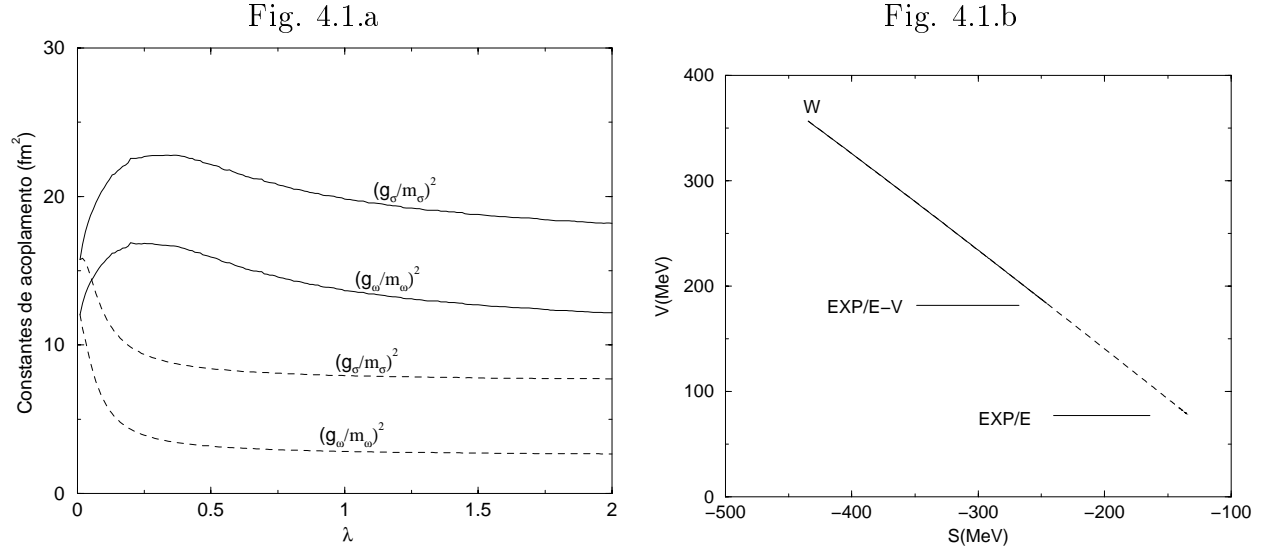
$$K3B = \left[ \left( \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right) \left( \frac{F(\sigma)}{g_\sigma} \right) \frac{2k_0^2 M^*}{\sqrt{k_0^2 + M^{*2}}} \right] \\ \times \left[ 1 + \left[ 2m_\beta^* \left( \frac{G(\sigma)}{g_\sigma g_\omega} \right) \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) \frac{4k_0^5}{3\pi^4} \right] / \left[ \frac{F(\sigma)}{g_\sigma} \frac{2k_0^2 M^*}{\sqrt{k_0^2 + M^{*2}}} \right] \right], \quad (4.39)$$

$$K3C = 1 + \left( \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right) \left( \frac{1}{g_\sigma^2} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_0} \frac{M^* k^2}{\sqrt{k_0^2 + M^{*2}}} dk \right) \\ + \left( \frac{F(\sigma)}{g_\sigma} \right)^2 \left( \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right) \left( \frac{2}{\pi^2} \int_0^{k_0} \frac{k_0^4}{(k_0^2 + M^{*2})^{3/2}} dk \right) \\ + \left( \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) \left( \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \right) \frac{4k_0^6}{9\pi^4} \left[ m_\beta^* \left( \frac{1}{g_\omega g_\sigma^2} \frac{\partial G(\sigma)}{\partial \sigma} \right) + \left( \frac{G(\sigma)}{g_\sigma g_\omega} \right)^2 \right]. \quad (4.40)$$

Nas tabelas 4.2 e 4.3, mostradas no final do capítulo, aparecem as constantes de acoplamento e propriedades nucleares em função de  $\lambda$  para os casos E e E-V, respectivamente. Mostramos na figura 4.1.a a dependência das constantes de acoplamento com o parâmetro  $\lambda$ ; é interessante notar a rápida convergência para as formas exponenciais. No caso E-V, as curvas apresentam um máximo e pares de constantes ( $g_\sigma/m_\sigma, g_\omega/m_\omega$ ) bastante similares aparecem para diferentes valores de  $\lambda$  (e.g.  $\lambda = 0.10$  e  $0.7$ ). No entanto, os resultados para as propriedades nucleares são muito distintos, indicando a importância da forma de acoplamento (valor de  $\lambda$ ) nestes modelos.

Em 4.1.b apresentamos o plano S-V para os vários  $\lambda$ 's. Não é difícil compreender a reta que aparece neste último gráfico. A equação para o potencial químico na densidade de saturação é dada por

$$\mu_0 = V + \sqrt{k_0^2 + (M + S)^2}, \quad (4.41)$$



**Fig. 4.1:** (a) Dependência das constantes de acoplamento com o parâmetro  $\lambda$ . (b) Plano dos potenciais escalar  $S$  e vetorial  $V$  (b). (Linha sólida corresponde ao caso  $E$ - $V$  e a tracejada ao caso  $E$ ).

onde  $\mu_0 = \varepsilon_0/\rho_0 = M + B/A$ . Usando  $k_0/M$  e  $S/M$  como parâmetros de expansão, a expressão acima pode ser aproximada por

$$\frac{B}{A} \sim (V + S) + \frac{k_0^2}{2M}(1 - S/M). \quad (4.42)$$

É uma boa maneira de se ver como a energia de ligação  $B/A$  aparece de um cancelamento entre as energias correspondentes às forças atrativas ( $S$ ) e repulsivas ( $V$ ), somadas ao termo de energia cinética de um núcleon com massa efetiva  $M + S \sim M/(1 - S/M)$  no nível de Fermi. A expressão acima pode ainda ser reescrita na forma

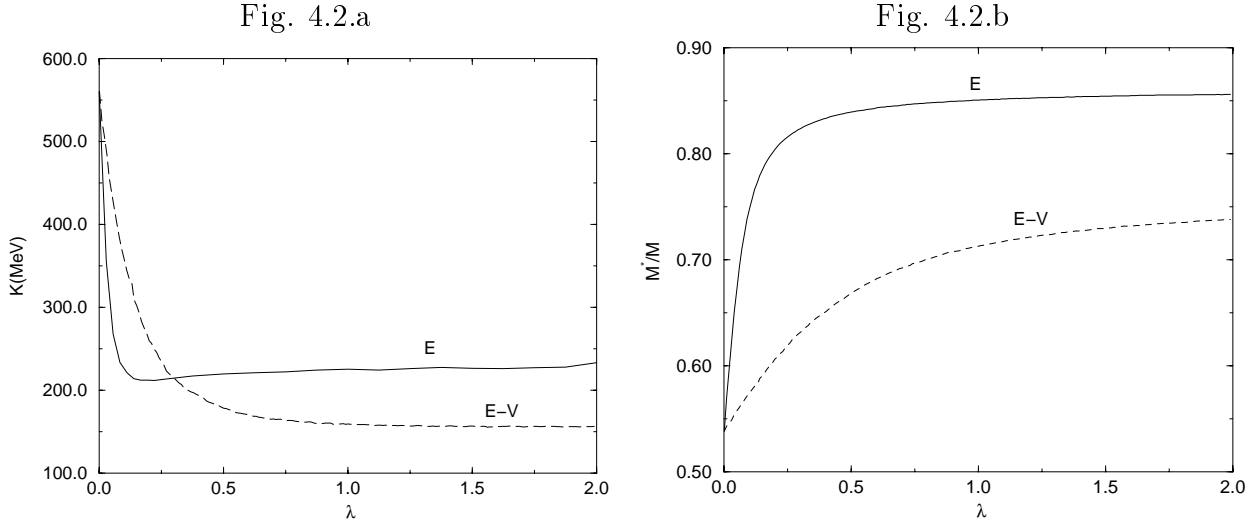
$$V \sim \left( \frac{B}{A} - \frac{k_0^2}{2M} \right) - \left( 1 - \frac{k_0^2}{2M^2} \right) S = -51.52 - 0.96 S \quad (4.43)$$

justificando a forma linear do gráfico. De fato, fazendo uma regressão linear em 4.1.b, obtemos

$$V \sim -47.41 - 0.94 S, \quad (4.44)$$

indicando a validade das aproximações feitas.  $EXP/E$  e  $EXP/E - V$  se referem, como já citamos, aos casos assintóticos em que  $\lambda$  e/ou  $\beta$  tendem ao infinito. Os modelos do caso  $E$  varrem valores que vão do modelo de Walecka ( $W$ ) até valores do modelo assintótico  $EXP/E$ . Similarmente, o caso  $E$ - $V$  varre do modelo  $W$  até  $EXP/E$ - $V$ .

A figura 4.2.a mostra a dependência da incompressibilidade com o parâmetro  $\lambda$  para os casos  $E$  e  $E$ - $V$ ; nota-se, no caso  $E$ , um mínimo desta grandeza nuclear para valores de  $\lambda$  próximos a 0.2. Em 4.2.b temos a massa efetiva do núcleon como função de  $\lambda$ , mostrando um melhor intervalo de valores para o caso  $E$  ( $0.75 < M^*/M < 0.8$ ).



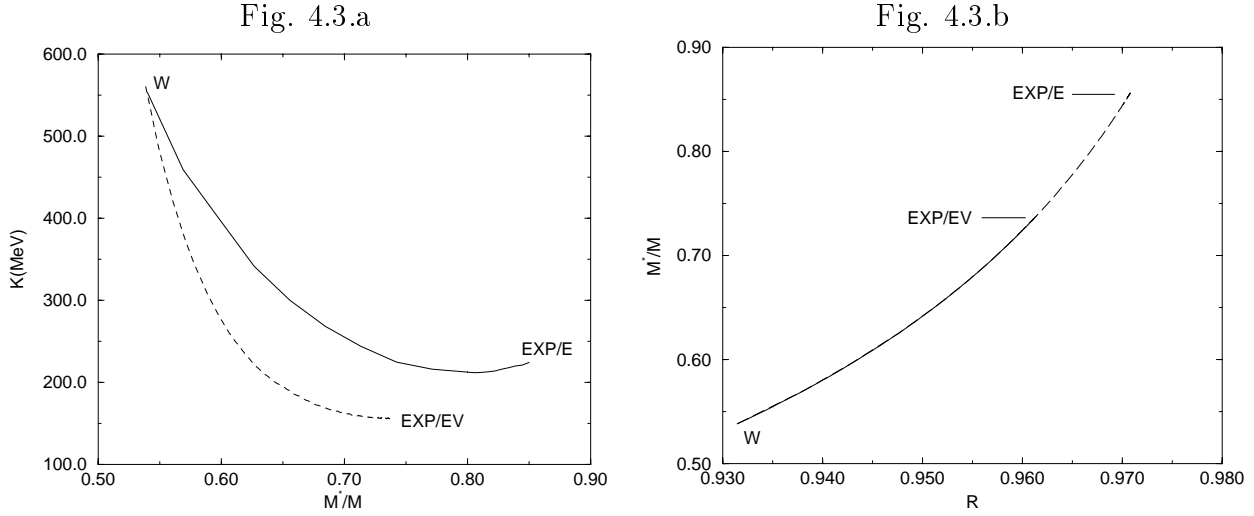
**Fig. 4.2:**  $K$  (a) e  $M^*/M$  (b) em função do parâmetro  $\lambda$ .

Na fig. 4.3.a apresentamos a relação  $K \times M^*$ . Observa-se que, diferentemente do que se tem encontrado na maioria dos modelos do tipo QHD, temos para o caso E uma pequena parte da curva em que para uma massa efetiva maior, temos também uma incompressibilidade maior. Os melhores pares de valores  $(K, M^*/M)$  estão entre  $0.1 < \lambda < 0.2$  no caso E e entre  $0.2 < \lambda < 0.3$  no caso E-V. (De fato, recentemente alguns autores têm considerado  $M^*/M \sim 0.6$  um melhor valor [63]). Em 4.3.b vemos que modelos com bom coeficiente relativístico (W e ZM3) possuem menor potencial escalar S. Isto pode ser entendido a partir da definição de R (eq. (2.130)). Quando o modelo é pouco relativístico, R tende a 1, pois temos  $k/M^* \ll 1$ . É claro que esta desigualdade é tanto mais válida quanto maior for a massa efetiva e é por isso que modelos com valores pequenos para  $M^*/M$  têm menor coeficiente relativístico R.

## 4.4 Estrelas de Nêutrons e o Modelo com Acoplamento Ajustável

Da teoria desenvolvida no capítulo anterior podemos facilmente generalizar o espírito do nosso modelo com acoplamento ajustável de modo a descrever a matéria de estrelas de nêutrons. O lagrangiano será da forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
 & - \frac{1}{4} \mathbf{e}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{e}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\mu \\
 & + \sum_B \bar{\psi}_B [i \gamma_\mu \partial^\mu - (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma) - g_{\omega B}^* \gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B}^* \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}^\mu] \psi_B \\
 & + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda [i \gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda] \psi_\lambda.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$



**Fig. 4.3:** (a)  $K \times M^*$  para os casos  $E$  e  $E-V$ . (b)  $M^*/M$  como função do coeficiente relativístico  $R$ .

onde,  $g_{(\sigma,\omega,\varrho)B}^* = m_{(\lambda,\beta,\gamma)B}^* g_{(\sigma,\omega,\varrho)B}$ . Aplicando as equações de Euler-Lagrange, fazendo a aproximação de campo médio e rearranjando adequadamente as equações encontradas de forma a serem apenas funções das razões  $(g_\sigma/m_\sigma)^2$ ,  $(g_\omega/m_\omega)^2$  e  $(g_\rho/m_\rho)^2$ , obtemos:

$$g_\omega \omega_0 = \left( \frac{g_\omega}{m_\omega} \right)^2 \sum_B m_{\beta B}^* \chi_{\omega B} \rho_B, \quad (4.46)$$

$$g_\rho \varrho_{03} = \left( \frac{g_\rho}{m_\rho} \right)^2 \sum_B m_{\gamma B}^* \chi_{\rho B} I_{3B} \rho_B, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} g_\sigma \sigma &= - \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \sum_B \left( \frac{F_B(\sigma)}{g_\sigma} \right) \rho_{s,B} - g_\omega \omega_0 \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \sum_B \left( \frac{G_B(\sigma)}{g_\sigma g_\omega} \right) \rho_B \\ &\quad - g_\rho \varrho_{03} \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \sum_B \left( \frac{H_B(\sigma)}{g_\sigma g_\rho} \right) I_{3B} \rho_B, \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde  $F_B(\sigma)$  e  $G_B(\sigma)$  são dadas pelas equações (4.16) para cada espécie bariônica.  $H_B(\sigma)$  é similar a  $G_B(\sigma)$ :

$$\frac{H_B(\sigma)}{g_\sigma g_\rho} = - \frac{(m_\gamma^*)^{(\gamma+1)/\gamma}}{M_B}. \quad (4.49)$$

A equação de Dirac é a mesma de (3.20), mas substituindo  $g_{(\sigma,\omega,\rho)B}$  por  $g_{(\sigma,\omega,\rho)B}^*$ . Os autovalores desta equação são

$$\mu_B(k) = g_{\omega B}^* \omega_0 + g_{\rho B}^* \varrho_{03} I_{3B} + \sqrt{k_{F,B}^2 + (M_B - g_{\sigma B}^* \sigma)^2}. \quad (4.50)$$

Seguindo o procedimento apresentado no capítulo 3, resolvemos o sistema de 11 equações (equilíbrio químico, conservação de cargas, equação para o campo  $\sigma$ ) para encontrar os

momenta de cada espécie bariônica e leptônica que precisamos para encontrar a equação de estado. As expressões para a densidade de energia e pressão são dadas por:

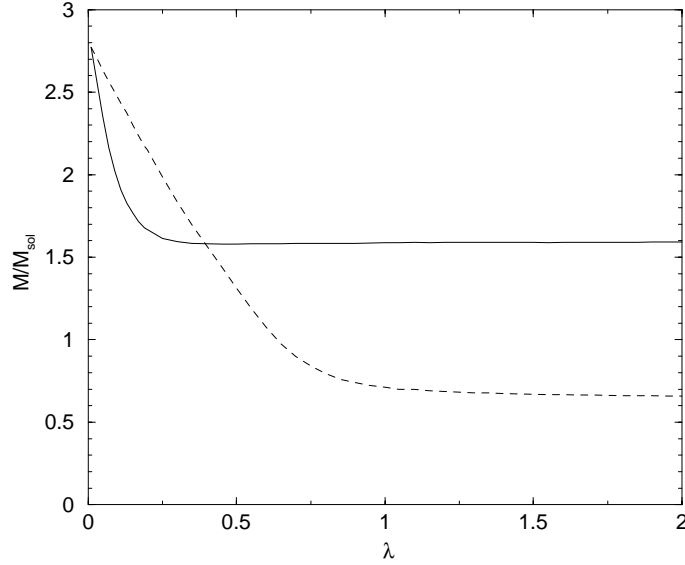
$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\varrho_{03}^2 \\
 &+ \sum_B \frac{2J_B + 1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,B}} \sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B}^*\sigma)^2} k^2 dk \\
 &+ \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,\lambda}} \sqrt{k^2 + m_\lambda^2} k^2 dk; \tag{4.51}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p &= -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\varrho_{03}^2 \\
 &+ \frac{1}{3} \sum_B \frac{2J_B + 1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,B}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B}^*\sigma)^2}} \\
 &+ \frac{1}{3} \sum_\lambda \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F,\lambda}} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_\lambda^2}}. \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

Introduzindo esta equação de estado nas equações TOV obtemos a massa da estrela, seu raio, composição bariônica, entre outros, como função da densidade central. Assim, teremos uma sequência de estrelas de nêutrons para cada valor do parâmetro  $\lambda$ . Podemos desta forma relacionar a estrela de massa máxima de cada uma destas sequências aquele parâmetro.

Nas tabelas 4.4 e 4.5, também mostradas no final do capítulo, aparecem as principais propriedades da estrela de massa máxima da sequência. Na figura 4.4 apresentamos a massa máxima da sequência de estrelas de nêutrons com híperons ( $\chi_H = 1$ ), núcleons e léptons como função do parâmetro  $\lambda$ . A rápida convergência para o limites exponenciais verificada nas propriedades nucleares também aparece aqui. Para  $\lambda > 0.25$ , no caso E, e para  $\lambda > 0.9$ , no caso E-V, os resultados são muito próximos aos de  $EXP - E$  ( $1.59 M_\odot$ ) e  $EXP/E - V$  ( $0.66 M_\odot$ ). O ponto de cruzamento das curvas corresponde a  $\lambda \sim 0.40$  nos dois casos. É interessante notar que no caso E este valor de  $\lambda$  correspondia a  $K \sim 218 MeV$  e  $M^*/M \sim 0.83$  e no caso E-V a  $K \sim 194 MeV$  e  $M^*/M \sim 0.65$ . Outra característica marcante na figura 4.4 são os baixos valores das massas estelares no caso E-V para  $\lambda > 0.40$ . Neste intervalo se inclui o modelo ZM3 com a baixíssima massa de  $0.71 M_\odot$ !

Na figura 4.5.a mostramos a dependência da massa máxima de uma sequência de estrelas de nêutrons com a incompressibilidade da matéria nuclear,  $K$ . Como era esperado, tanto no caso E quanto no E-V, a maioria dos modelos apresenta um comportamento em que temos uma maior massa máxima para estrelas formadas por matéria menos compressível (maior  $K$ ). Apenas em  $0.25 < \lambda < 0.30$  inverte-se esta proporção, intervalo no qual aparece o mínimo da incompressibilidade no caso E. A relação entre a massa máxima da sequência e a massa efetiva do núcleon, apresentada na figura 4.5.b, também era previsível: para uma massa efetiva grande temos um maior campo escalar, o qual, por não precisar obedecer ao princípio da exclusão, pode ser mais facilmente comprimido, favorecendo a instabilidade da estrela. Ainda observando estes gráficos, vemos que as curvas em 4.5.a são bastante similares, enquanto em 4.5.b não. Se tivéssemos valores experimentais mais precisos de  $K$  e  $M^*/M$ , a previsão de massa máxima de uma sequência dependeria pouco do modelo no caso da incompressibilidade, e muito no caso da massa efetiva. Isto sugere que a in-



**Fig. 4.4:** *Massa máxima de uma seqüência de estrelas de nêutrons (acoplamento universal) como função do parâmetro  $\lambda$ , para os casos  $E$  e  $E-V$ .*

compressibilidade será mais importante na determinação da massa máxima das estrelas de nêutrons.

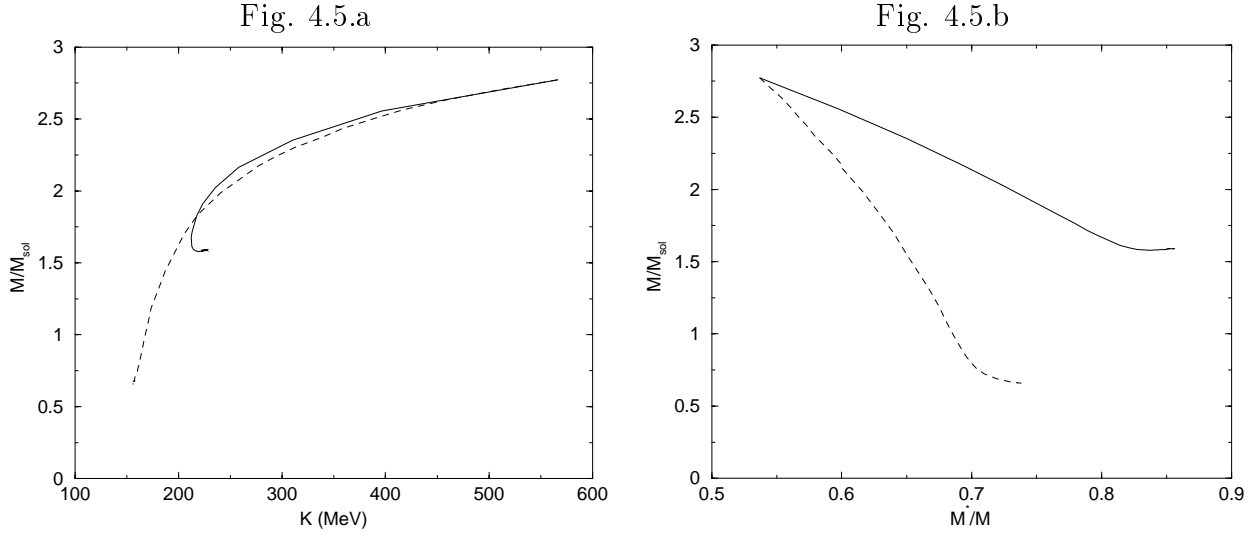
Nota-se na figura 4.6 que para alguns valores de  $\lambda$  o módulo do potencial escalar ultrapassa a massa do núcleon livre ( $\sim 939 \text{ MeV}$ ) e a massa efetiva do núcleon fica negativa, analogamente ao que ocorre com a massa efetiva do elétron num sólido. Fisicamente isto é aceitável, pois a massa efetiva é uma grandeza dinâmica e apenas expressa como as partículas reagem às interações de que participam. Podemos entender como este efeito aparece analisando a expressão para a massa efetiva em nosso modelo:

$$M^* = M - \frac{g_\sigma \sigma}{(1 + g_\sigma \sigma / (\lambda M))^\lambda}. \quad (4.53)$$

Aumentando a densidade bariônica, o campo escalar se eleva; no limite  $g_\sigma \sigma \rightarrow \infty$  vemos que apenas para  $\lambda \geq 1$  não existe a possibilidade da massa efetiva ficar negativa. É claro que alguns vínculos da teoria podem evitar que  $g_\sigma \sigma$  vá ao infinito, como ocorre no modelo de Walecka quando se leva em conta apenas a presença de núcleons. No entanto, quando se incluem mais e mais espécies bariônicas estes vínculos se modificam, abrindo a possibilidade de que o campo escalar possa ultrapassar as massas livres. Para ver isto, consideremos a expressão para a massa efetiva no modelo de Walecka, já utilizando a expressão para o campo escalar:

$$M_B^* = M_B - \sum_{B'} \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \frac{\chi_{B'}}{\pi^2} M_{B'}^* \int_0^{k_{F,B'}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + (M_{B'} - g_{\sigma B'} \sigma)^2}}$$

$$M_B^* = \left( M_B - \sum_{B' \neq B} \left( \frac{g_\sigma}{m_\sigma} \right)^2 \frac{\chi_{B'}}{\pi^2} M_{B'}^* \int_0^{k_{F,B'}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + (M_{B'} - g_{\sigma B'} \sigma)^2}} \right) /$$



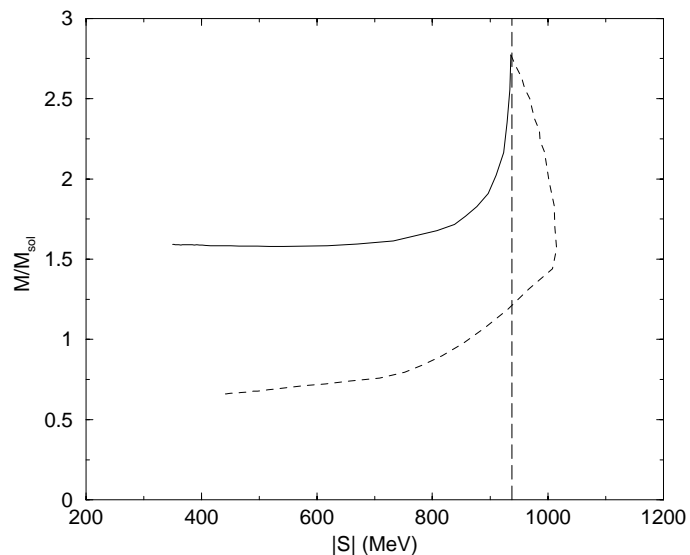
**Fig. 4.5:** Massa máxima de uma sequência de estrelas de nêutrons (acoplamento universal) como função da incompressibilidade (a) e da massa efetiva do núcleon (b). (Linha sólida corresponde ao caso E e linha tracejada corresponde ao caso E-V.)

$$\left( 1 + \left( \frac{g_{\sigma}}{m_{\sigma}} \right)^2 \frac{\chi_B}{\pi^2} \int_0^{k_{F,B}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + (M_B - g_{\sigma B} \sigma)^2}} \right). \quad (4.54)$$

A não ser no caso em que só temos *uma* espécie bariônica (ou seja, só núcleons), a expressão acima pode conduzir a uma massa efetiva negativa. O modelo de Walecka com inclusão dos híperons, por exemplo, tem a massa efetiva do núcleon anulada em  $\rho = 0.68 fm^{-3}$ .

Os modelos do caso E fornecem bons resultados para a máxima massa de uma sequência de estrelas de nêutrons; o modelo ZM está neste caso e por isso apresentaremos mais resultados da aplicação deste modelo a estas estrelas. Já o modelo ZM3 está incluído no intervalo do caso E-V que produz resultados muito ruins. A massa máxima prevista por ZM3 é de  $0.71 M_{\odot}$  e por isso não tem sentido entrarmos em detalhes sobre a constituição de estrelas de nêutrons utilizando este modelo.

Na figura 4.7.a mostramos as populações bariônicas em um sistema de híperons ( $\chi_H = 1$ ), núcleons e léptons, de acordo com o modelo ZM; vemos que  $\Lambda$  e  $\Sigma^-$  nascem juntos e que  $\Xi^0$  não aparece até a densidade de  $1.5 fm^{-3}$ . Em 4.7.b estão os potenciais químicos e intensidade de campos e vemos como o potencial S ( $= M^* - M$ ) é mais fraco no modelo ZM. Estes resultados são utilizados na obtenção da equação de estado que nos fornecerá a dependência da massa da estrela com sua densidade central, apresentada na fig. 4.8.a. A massa máxima de  $1.59 M_{\odot}$  está dentro dos limites aceitos, mas devemos lembrar que estamos usando acoplamento universal. Como vimos no capítulo 3, outros acoplamentos têm levado a uma menor massa máxima. Por outro lado, a inclusão da rotação poderá elevar a massa em até 20%. Em 4.8.b está a forma com que as diferentes espécies se distribuem ao longo do raio. É curioso notar que, ao contrário do visto no modelo Não-Linear, não há cruzamento entre as espécies bariônicas: sempre  $\Lambda$  será o híperon mais populoso e  $\Sigma^+$  o menos; sempre a espécie mais populosa será o nêutron.



**Fig. 4.6:** *Massa máxima de uma sequência de estrelas de nêutrons (acoplamento universal) como função do módulo do potencial escalar  $S$  no centro da estrela. (Linha sólida corresponde ao caso  $E$ , linha tracejada corresponde ao caso  $E-V$  e a linha vertical se refere ao ponto em que  $|S|$  é igual à massa do nêutron ( $\sim 939$  MeV).)*

Apresentamos assim, pela primeira vez no conhecimento do autor, uma descrição completa de estrelas de nêutrons utilizando o modelo ZM. Baseados numa generalização deste tipo de modelo, introduzimos o modelo com acoplamento ajustável com o qual estudamos a dependência de propriedades estelares com as propriedades nucleares.

$\lambda$	$(g_\sigma/m_\sigma)^2$ (fm <sup>2</sup> )	$(g_\omega/m_\omega)^2$ (fm <sup>2</sup> )	$(g_\rho/m_\rho)^2$ (fm <sup>2</sup> )	$K$ (MeV)	$M^*/M$	$S$ (MeV)	$V$ (MeV)	$R$
0	15.75	12.04	3.51	566.30	0.537	-434.35	356.48	0.931
0.01	15.84	11.11	3.76	457.37	0.570	-403.42	328.76	0.938
0.02	15.61	10.32	3.95	396.55	0.598	-377.64	305.42	0.943
0.03	15.16	9.53	4.13	346.45	0.625	-352.14	282.15	0.948
0.04	14.63	8.81	4.28	310.18	0.650	-328.78	260.70	0.951
0.05	14.01	8.11	4.41	278.76	0.674	-306.49	240.10	0.954
0.06	13.45	7.52	4.52	258.12	0.694	-287.56	222.54	0.957
0.07	12.96	7.03	4.61	246.18	0.710	-272.01	208.05	0.959
0.08	12.50	6.59	4.68	235.45	0.725	-257.98	194.94	0.960
0.09	12.08	6.21	4.75	227.61	0.738	-245.94	183.67	0.961
0.10	11.73	5.89	4.80	223.33	0.749	-235.99	174.33	0.962
0.11	11.41	5.61	4.84	219.95	0.758	-227.30	166.17	0.963
0.12	11.14	5.38	4.88	217.77	0.766	-219.82	159.13	0.964
0.13	10.87	5.15	4.91	214.28	0.773	-212.80	152.52	0.965
0.14	10.70	5.00	4.93	216.65	0.779	-207.91	147.91	0.965
0.15	10.45	4.80	4.96	214.70	0.785	-201.84	142.17	0.966
0.16	10.30	4.68	4.98	213.22	0.789	-197.82	138.38	0.966
0.17	10.12	4.54	5.00	211.32	0.794	-193.45	134.25	0.966
0.18	9.99	4.43	5.01	212.31	0.798	-190.12	131.10	0.967
0.19	9.87	4.33	5.03	212.37	0.801	-186.89	128.04	0.967
0.20	9.74	4.23	5.04	214.91	0.804	-183.88	125.20	0.967
0.30	9.00	3.64	5.12	215.67	0.824	-165.60	107.87	0.969
0.40	8.61	3.35	5.16	217.67	0.834	-156.30	99.05	0.969
0.50	8.38	3.17	5.18	219.52	0.839	-150.84	93.86	0.970
0.60	8.23	3.06	5.20	221.31	0.843	-147.31	90.50	0.970
0.70	8.14	2.98	5.21	222.88	0.846	-144.98	88.28	0.970
0.80	8.05	2.92	5.22	223.62	0.848	-142.92	86.33	0.970
0.90	7.99	2.87	5.22	223.98	0.849	-141.55	85.02	0.970
1.00	7.93	2.83	5.23	224.86	0.851	-140.29	83.83	0.970
1.25	7.85	2.77	5.23	226.24	0.853	-138.30	81.93	0.971
1.50	7.78	2.72	5.24	226.54	0.854	-136.79	80.49	0.971
1.75	7.74	2.69	5.24	227.47	0.855	-135.90	79.64	0.971
$\infty$	7.72	2.67	5.25	228.60	0.856	-135.29	79.06	0.971

Tab. 4.2: Constantes de acoplamento e propriedades nucleares para o caso  $E$ .

$\lambda$	$(g_\sigma/m_\sigma)^2$ (fm <sup>2</sup> )	$(g_\omega/m_\omega)^2$ (fm <sup>2</sup> )	$(g_\rho/m_\rho)^2$ (fm <sup>2</sup> )	$K$ (MeV)	$M^*/M$	$S$ (MeV)	$V$ (MeV)	$R$
0.00	15.75	12.04	3.51	566.30	0.537	-434.35	356.48	0.931
0.02	17.63	13.45	4.07	510.19	0.545	-427.00	349.92	0.933
0.04	18.73	14.26	4.48	458.89	0.554	-419.18	342.92	0.935
0.06	19.58	14.86	4.83	417.12	0.561	-411.93	336.41	0.936
0.08	20.32	15.39	5.14	387.55	0.567	-406.16	331.23	0.938
0.10	20.89	15.79	5.44	358.52	0.574	-399.75	325.45	0.939
0.12	21.44	16.17	5.70	339.16	0.579	-394.89	321.06	0.940
0.14	21.73	16.34	5.97	311.94	0.587	-387.48	314.35	0.941
0.16	22.03	16.52	6.20	293.19	0.594	-381.60	309.02	0.942
0.18	22.26	16.65	6.43	276.88	0.600	-375.90	303.84	0.943
0.20	22.57	16.84	6.62	267.82	0.604	-371.97	300.26	0.944
0.21	22.55	16.80	6.73	257.81	0.608	-368.18	296.81	0.945
0.22	22.60	16.81	6.82	251.24	0.611	-365.35	294.23	0.945
0.23	22.61	16.80	6.92	244.49	0.614	-362.37	291.51	0.946
0.24	22.69	16.84	7.00	240.73	0.616	-360.33	289.64	0.946
0.25	22.71	16.83	7.09	235.46	0.619	-357.70	287.24	0.947
0.26	22.74	16.82	7.17	230.94	0.622	-355.27	285.02	0.947
0.27	22.75	16.81	7.25	226.59	0.624	-352.85	282.80	0.947
0.28	22.75	16.78	7.32	222.39	0.627	-350.42	280.58	0.948
0.29	22.75	16.76	7.40	218.64	0.629	-348.12	278.47	0.948
0.30	22.76	16.74	7.47	215.49	0.632	-346.00	276.53	0.949
0.40	22.62	16.44	8.03	193.78	0.651	-327.57	259.58	0.951
0.50	22.10	15.87	8.41	179.11	0.668	-311.47	244.72	0.954
0.60	21.48	15.25	8.66	169.60	0.682	-298.33	232.54	0.955
0.70	20.98	14.76	8.83	164.92	0.693	-288.63	223.53	0.957
0.80	20.49	14.30	8.94	161.15	0.701	-280.47	215.93	0.958
0.90	20.14	13.96	9.03	159.81	0.708	-274.50	210.38	0.958
1.00	19.80	13.64	9.09	158.24	0.713	-269.23	205.45	0.959
1.25	19.19	13.08	9.19	156.95	0.723	-260.01	196.84	0.960
1.50	18.77	12.69	9.25	156.62	0.730	-253.81	191.04	0.961
1.75	18.43	12.38	9.28	156.17	0.735	-249.17	186.69	0.961
$\infty$	18.20	12.17	9.31	154.98	0.738	-246.01	183.73	0.961

Tab. 4.3: Constantes de acoplamento e propriedades nucleares para o caso E-V.

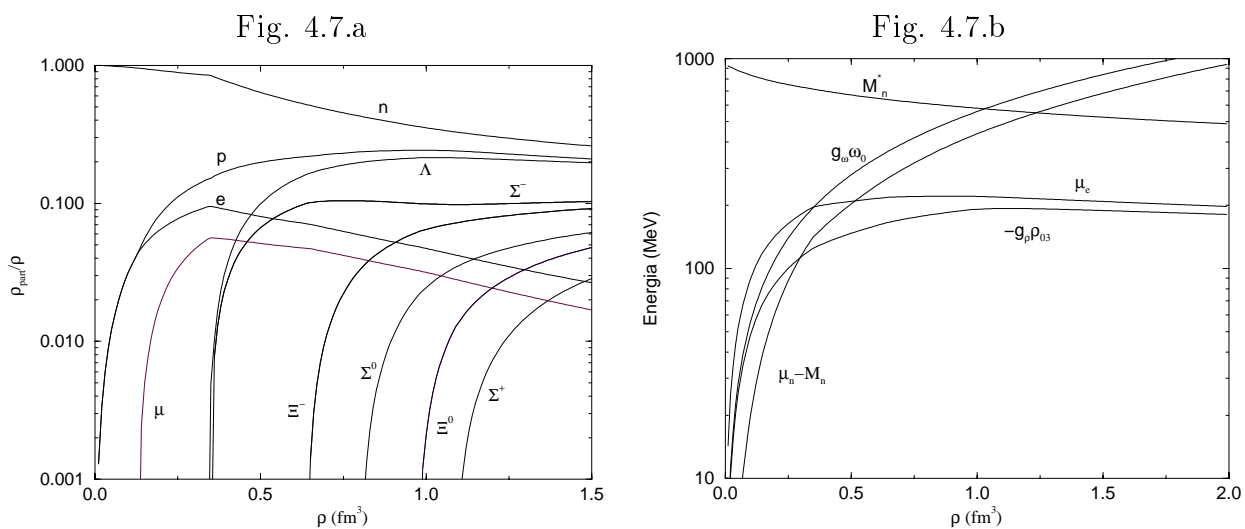


Fig. 4.7: Populações bariônicas e leptônicas no modelo ZM (a). Potenciais químicos e intensidade dos campos neste modelo (b).

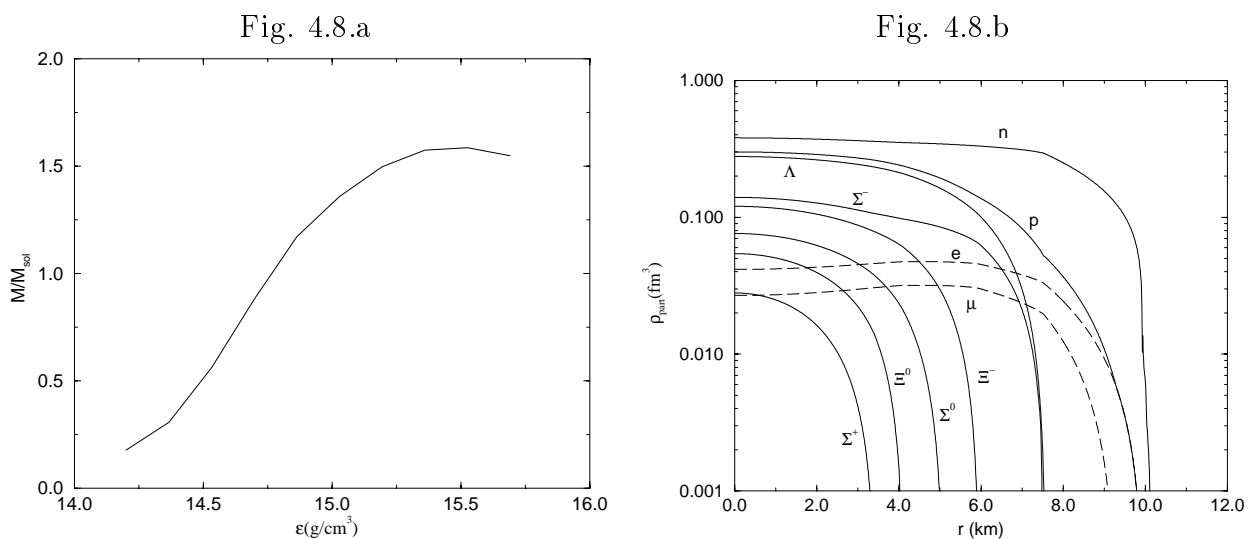


Fig. 4.8: Relação massa da estrela-densidade central neste modelo (a). Distribuição radial das espécies bariônicas e leptônicas no modelo ZM (b)

$\lambda$	$\log(\varepsilon_c)$ $g/cm^3$	$M_\star$ $(M_\odot)$	$R_\star$ $(km)$	S $(MeV)$	$z$	Y/A	$N_{BT}$ $(\times 10^{58})$	K $(MeV)$	$M^\star/M$	R
0	15.18	2.77	13.17	936.3	0.623	0.27	0.40	566.30	0.537	0.931
0.02	15.24	2.56	12.39	934.2	0.597	0.30	0.36	396.55	0.598	0.943
0.04	15.31	2.35	11.63	929.2	0.574	0.32	0.33	310.18	0.650	0.951
0.06	15.38	2.17	10.89	923.3	0.554	0.34	0.30	258.12	0.694	0.957
0.08	15.43	2.02	10.38	910.3	0.533	0.35	0.28	235.45	0.725	0.960
0.10	15.47	1.91	9.98	896.7	0.515	0.36	0.26	223.33	0.749	0.962
0.12	15.49	1.83	9.75	877.2	0.495	0.35	0.25	217.77	0.766	0.964
0.14	15.52	1.77	9.59	857.5	0.479	0.35	0.24	216.65	0.779	0.965
0.16	15.54	1.72	9.45	838.6	0.467	0.35	0.23	213.22	0.789	0.966
0.18	15.53	1.68	9.48	807.8	0.446	0.33	0.23	212.31	0.798	0.967
0.25	15.53	1.61	9.49	732.3	0.416	0.30	0.22	212.92	0.814	0.968
0.30	15.52	1.59	9.61	669.7	0.399	0.27	0.21	215.67	0.824	0.969
0.35	15.51	1.58	9.69	618.2	0.389	0.26	0.21	216.35	0.828	0.969
0.40	15.51	1.58	9.73	580.1	0.385	0.25	0.21	217.67	0.834	0.969
0.45	15.49	1.58	9.83	542.2	0.379	0.23	0.21	218.37	0.836	0.969
0.50	15.49	1.58	9.84	517.5	0.378	0.23	0.21	219.52	0.839	0.970
0.55	15.49	1.58	9.85	497.6	0.378	0.23	0.21	221.16	0.841	0.970
0.60	15.49	1.58	9.86	480.3	0.377	0.22	0.21	221.31	0.843	0.970
0.65	15.49	1.58	9.86	465.4	0.377	0.22	0.21	221.81	0.844	0.970
0.70	15.48	1.58	9.92	450.7	0.375	0.22	0.21	222.88	0.846	0.970
0.75	15.48	1.58	9.91	440.4	0.375	0.21	0.21	223.07	0.847	0.970
0.80	15.48	1.58	9.92	430.7	0.374	0.21	0.21	223.62	0.848	0.970
0.85	15.48	1.58	9.92	422.8	0.374	0.21	0.21	223.87	0.849	0.970
0.90	15.48	1.58	9.92	415.5	0.375	0.21	0.21	223.98	0.849	0.970
0.95	15.47	1.58	9.97	407.0	0.372	0.21	0.21	224.01	0.850	0.970
1.00	15.47	1.59	9.98	401.6	0.372	0.20	0.21	224.86	0.851	0.970
1.10	15.47	1.59	9.98	392.0	0.373	0.20	0.21	225.10	0.851	0.971
1.20	15.47	1.59	9.98	384.0	0.373	0.20	0.21	225.80	0.852	0.971
1.30	15.47	1.59	9.98	377.5	0.373	0.20	0.21	226.08	0.853	0.971
1.40	15.47	1.59	9.99	371.8	0.372	0.20	0.21	226.90	0.854	0.971
1.50	15.47	1.59	9.98	366.9	0.373	0.20	0.21	226.54	0.854	0.971
1.60	15.46	1.59	10.03	361.2	0.370	0.20	0.21	226.92	0.855	0.971
1.70	15.47	1.59	9.99	359.1	0.373	0.20	0.21	227.88	0.855	0.971
1.80	15.47	1.59	9.99	355.6	0.372	0.20	0.21	227.97	0.855	0.971
1.90	15.47	1.59	10.00	352.8	0.373	0.20	0.21	228.25	0.856	0.971
$\infty$	15.47	1.59	10.00	350.3	0.373	0.20	0.21	228.60	0.856	0.971

**Tab. 4.4:** *Propriedades estelares para o Caso E. Temos as seguintes correspondências:  $\varepsilon_c$  - densidade central;  $M_\star$  - massa máxima da seqüência;  $R_\star$  - raio da estrela de massa máxima; S - potencial escalar no centro da estrela; z - redshift; Y/A - proporção híperon(Y)/bárion,  $N_{BT}$  - número bariônico total; K - incompressibilidade;  $M^\star/M$  - massa efetiva e R - coeficiente relativístico.*

$\lambda$	$\log(\varepsilon_c)$ $g/cm^3$	$M_\star$ ( $M_\odot$ )	$R_\star$ (km)	S (MeV)	z	Y/A	$N_{BT}$ ( $\times 10^{58}$ )	K (MeV)	$M^\star/M$	R
0	15.18	2.77	13.17	936.3	0.623	0.27	0.40	566.30	0.537	0.931
0.02	15.20	2.70	12.93	944.3	0.615	0.28	0.39	510.19	0.545	0.933
0.04	15.22	2.63	12.64	954.2	0.610	0.29	0.38	458.89	0.554	0.935
0.06	15.24	2.56	12.39	960.1	0.602	0.30	0.37	417.12	0.561	0.936
0.08	15.27	2.50	12.12	969.0	0.598	0.31	0.36	387.55	0.567	0.938
0.10	15.28	2.43	11.89	973.1	0.588	0.32	0.34	358.52	0.574	0.939
0.12	15.30	2.37	11.68	977.0	0.579	0.33	0.33	339.16	0.579	0.940
0.14	15.33	2.30	11.38	985.1	0.574	0.34	0.32	311.94	0.587	0.941
0.16	15.35	2.24	11.16	986.4	0.563	0.34	0.31	293.19	0.594	0.942
0.18	15.38	2.17	10.88	993.7	0.559	0.35	0.30	276.88	0.600	0.943
0.20	15.38	2.15	10.82	994.7	0.555	0.36	0.30	267.82	0.604	0.944
0.25	15.44	1.99	10.18	1002.2	0.534	0.38	0.27	235.46	0.619	0.947
0.30	15.51	1.83	9.58	1011.3	0.516	0.39	0.25	215.49	0.632	0.949
0.35	15.56	1.70	9.09	1012.0	0.491	0.41	0.23	205.23	0.640	0.950
0.40	15.62	1.57	8.60	1014.9	0.470	0.42	0.21	193.78	0.651	0.951
0.45	15.66	1.44	8.20	1008.3	0.440	0.42	0.19	187.17	0.658	0.952
0.50	15.64	1.31	8.14	966.9	0.381	0.40	0.17	179.11	0.668	0.953
0.55	15.63	1.19	8.07	930.6	0.329	0.38	0.15	173.72	0.675	0.954
0.60	15.62	1.07	8.08	891.6	0.282	0.35	0.14	169.60	0.682	0.955
0.65	15.61	0.98	8.13	853.1	0.244	0.32	0.12	167.20	0.687	0.956
0.70	15.60	0.90	8.22	816.7	0.215	0.29	0.11	164.92	0.693	0.957
0.75	15.60	0.84	8.31	782.9	0.193	0.27	0.11	163.33	0.696	0.957
0.80	15.59	0.80	8.41	752.0	0.177	0.24	0.10	161.15	0.701	0.958
0.85	15.55	0.76	8.69	708.8	0.161	0.21	0.10	160.69	0.704	0.958
0.90	15.45	0.74	9.15	654.5	0.146	0.16	0.09	159.81	0.708	0.958
0.95	15.39	0.72	9.44	615.1	0.136	0.13	0.09	159.71	0.710	0.958
1.00	15.31	0.71	9.76	577.9	0.128	0.10	0.09	158.24	0.713	0.959
1.10	15.18	0.88	10.89	515.0	0.146	0.06	0.11	157.90	0.717	0.959
1.20	15.23	0.69	10.07	515.3	0.119	0.06	0.09	157.56	0.721	0.960
1.30	15.22	0.68	10.10	497.5	0.117	0.06	0.08	157.39	0.724	0.960
1.40	15.20	0.67	10.17	481.3	0.115	0.05	0.08	157.06	0.727	0.960
1.50	15.18	0.67	10.21	468.3	0.113	0.04	0.08	156.62	0.730	0.961
1.60	15.16	0.67	10.26	457.1	0.112	0.04	0.08	156.55	0.732	0.961
1.70	15.17	0.66	10.23	451.4	0.112	0.04	0.08	156.31	0.733	0.961
1.80	15.16	0.66	10.25	443.5	0.111	0.04	0.08	155.74	0.735	0.961
1.90	15.14	0.66	10.31	434.5	0.110	0.03	0.08	155.03	0.737	0.961
$\infty$	15.14	0.66	10.31	431.9	0.110	0.03	0.08	154.98	0.738	0.961

**Tab. 4.5:** *Propriedades estelares para o Caso E-V. Mesmas correspondências da tabela 4.4.*

# Conclusão e Perspectivas

Desenvolvemos neste trabalho um formalismo eficiente na descrição da matéria existente em estrelas de nêutrons considerando a presença de híperons, núcleons, léptons e mésons. Bons resultados para massa máxima de estrelas de nêutrons são obtidos com a utilização do modelo Não-Linear neste formalismo. O modelo ZM, pela primeira vez aplicado neste problema, conduz a uma massa máxima de  $1.59 M_{\odot}$ , no limite das observações já feitas em massas de pulsares. O modelo ZM3 não serve para descrever estas estrelas, pois conduz a uma massa máxima de apenas  $0.7M_{\odot}$ .

Apresentamos também no último capítulo uma proposta de modelo com acoplamento méson-núcleon ajustável por parâmetros matemáticos  $(\lambda, \beta)$ , o qual consegue reproduzir os resultados dos modelos de Walecka, ZM e ZM3. Através da característica de que temos um modelo tipo QHD para cada escolha dos parâmetros, pudemos explorar bastante as relações entre as propriedades nucleares que se mantêm de modelo para modelo. Notadamente, vimos que os modelos ZM e ZM3 se assemelham muito às formas exponenciais assintóticas  $EXP/E$  e  $EXP/E - V$ , respectivamente. A faixa de valores que melhor reproduz a fenomenologia foi  $0.1 < \lambda < 0.2$  para o caso E, e  $0.2 < \lambda < 0.3$  para o caso E-V.

Também estudamos a relação entre as propriedades estelares e nucleares. Vimos que a massa máxima de uma sequência de estrelas de nêutrons é mais sensível ao valor da massa efetiva do núcleon que ao da incompressibilidade. Desta forma, um valor mais preciso de  $K$  nos trará informações mais significativas sobre as massas de estrelas de nêutrons.

Como perspectiva de trabalho futuro, temos o estudo deste modelo com acoplamento ajustável sob a luz da moderna teoria efetiva de campos, de modo a tentar compreender o que já vislumbramos no começo do capítulo 4; o parâmetro  $\lambda$  está associado à faixa de densidades em que o modelo é aplicado. Também poderemos introduzir acoplamentos escalar-vetorial e auto-acoplamentos vetoriais no lagrangiano.

Para os modelos de estrelas de nêutrons queremos em breve introduzir os efeitos de rotação os quais elevam a massa máxima da sequência. Uma análise para temperatura finita será interessante no estudo de supernovas e estrelas protoneutrônicas. A introdução de graus de liberdade de quarks também é uma boa perspectiva de estudo, já que nestes modelos híbridos há possibilidade de identificação da transição hádron-plasma quark-glúon.

## Apêndice A

# Notação e Fatores de Conversão

Em todo trabalho seguimos a notação de Bjorken e Drell [33], explicitada em seu apêndice, ressaltando-se que, como também trabalhamos com espaços curvos, o símbolo  $g_{\mu\nu}$  para o tensor de Minkowski deve ser substituído por  $\eta_{\mu\nu}$ . A ação utilizada em nossos desenvolvimentos que envolvem a Teoria da Relatividade Geral <sup>1</sup> é dada por

$$I = \int (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) d^4x, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathcal{L}_g$  e  $\mathcal{L}_m$  são, respectivamente, os lagrangianos gravitacional e de campos de matéria. Este último depende da natureza da matéria estudada, mas o primeiro é geral e expresso por ( $G = c = 1$ ):

$$\mathcal{L}_g = \left( \frac{-1}{16\pi} \right) R \sqrt{-g}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  é a *curvatura escalar*;  $R_{\mu\nu}$  é o *tensor de Ricci* definido como  $R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\nu\rho}$ . Por sua vez,  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$  é denominado *tensor de Riemann* definido por:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} \equiv \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}. \quad (\text{A.3})$$

(os índices precedidos por vírgulas indicam derivada comum do termo em relação à variável espaço-temporal correspondente ao índice). O pseudo-tensor  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  é chamado de *conexão afim* e expresso em função de  $g_{\mu\nu}$  por:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa\nu,\mu} + g_{\kappa\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\kappa}). \quad (\text{A.4})$$

Finalmente,  $g = \det|g_{\mu\nu}|$  onde  $g_{\mu\nu}$  é o *tensor métrico* do espaço, definido por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}, \quad (\text{A.5})$$

o qual denota a diferença entre o espaço estudado e o espaço plano de Minkowski. Este tensor também aparece na expressão para o intervalo invariante,  $d\tau$ :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (\text{A.6})$$

---

<sup>1</sup> Tem-se uma boa introdução a esta teoria em [64].

A minimização da ação (A.1) nos leva às equações de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = -8\pi T^{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$  é o *tensor de Einstein* e  $T^{\mu\nu}$  o *tensor energia-momentum*, o qual depende de  $\mathcal{L}_m$ .

Em teoria de campos quânticos costuma-se utilizar o sistema natural de unidades (SN) onde define-se  $\hbar = c = 1$ . Como as unidades destas grandezas são<sup>2</sup>, respectivamente,  $M \cdot L^2/T$  e  $L/T$ , teremos  $T = L$  e  $M = 1/L$ . A densidade de energia, por exemplo, terá a mesma unidade da pressão;  $L^{-4}$ . Para se recuperar o valor em SI de uma grandeza expressa em SN deve-se multiplicar a grandeza por uma combinação de  $\hbar$  e  $c$ . Como exemplo, vejamos o caso da energia: em SN um valor de energia é dado por um número vezes  $1/L$ ; devemos multiplicar esse termo por um valor que seja igual a  $L$  vezes as unidades de energia em SI. Para encontrá-lo temos que resolver a equação abaixo:

$$[\hbar]^a [c]^b E_{SN} = E_{SI} \quad (\text{A.8})$$

$$\left(\frac{M \cdot L^2}{T}\right)^a \left(\frac{L}{T}\right)^b \frac{1}{L} = \frac{M \cdot L^2}{T^2}.$$

Facilmente se vê que  $a = b = 1$ . Assim, o fator de conversão será  $\hbar c = 3,1615 \times 10^{-26} J \cdot m$ . Em física nuclear a escala de comprimento mais adequada é o férmion ( $10^{-15}m$ ) e a energia é comumente expressa em  $MeV$ . Portanto, a forma do fator de conversão mais utilizada é:

$$\hbar c = 197.327 MeV \cdot fm. \quad (\text{A.9})$$

Para converter a densidade de energia e pressão, a combinação de  $\hbar$  e  $c$  é a mesma, mas usamos nas unidades  $\hbar c = 3,16153 \times 10^{+34} (J/m^3) fm^4$ , pois  $[\varepsilon] = [p] = L^{-4}$ .

O mesmo raciocínio deve ser seguido quando utilizamos resultados da Teoria da Relatividade Geral em que fizemos  $G = c = 1$ . Desta vez, teremos  $M = L$  (**não** se pode fazer  $\hbar = c = G = 1$ ). Para converter, por exemplo, um valor de densidade de energia ou pressão (neste sistema são dadas em  $1/L^2$ ) para SI temos que utilizar o fator

$$\frac{c^4}{G} = 1,21 \times 10^{44} \left(\frac{J}{m^3}\right) \cdot m^2 \quad (\text{A.10})$$

Para a massa o fator é

$$\frac{c^2}{G} = 1,35 \times 10^{27} kg \cdot \frac{1}{m}. \quad (\text{A.11})$$

---

<sup>2</sup> M corresponde à unidade de massa, L à de comprimento e T à de tempo

## Apêndice B

# Equações de Equilíbrio Químico

Quando a quantidade dos componentes de uma reação química não muda mais, diz-se que ela alcançou o equilíbrio químico. Toda reação química se desenvolve em dois sentidos, e.g.



um destes sentidos irá predominar sobre o outro até que se atinja o equilíbrio. É importante ressaltar que o estado de equilíbrio não depende do caminho percorrido pelo sistema, ou seja, independe das reações intermediárias entre o lado esquerdo e direito da equação química.

Toda reação química pode ser escrita como uma combinação linear simbólica de seus componentes (passando-se todos termos para o mesmo membro):

$$\sum_i \nu_i A_i = 0. \quad (\text{B.2})$$

Por exemplo, na reação  $n \rightleftharpoons p^+ + e^- + \bar{\nu}$  temos  $\nu_n = -\nu_p = -\nu_e = -\nu_{\bar{\nu}} = 1$ .

Suponhamos que a reação que queremos estudar se realize em temperatura e pressão constantes. O potencial termodinâmico mais adequado a este sistema será a energia livre de Gibbs, que é função de  $p, T$  e do número de partículas de cada elemento da reação,  $N_i$ :

$$G \equiv G(p, T, N_i), \quad (\text{B.3})$$

de onde,

$$dG = \sum_i \left( \frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T, p, N_{j \neq i}} dN_i \quad (\text{B.4})$$

para  $T$  e  $p$  constantes.

No ponto de equilíbrio químico a energia de Gibbs deverá ter um mínimo em relação, por exemplo, a um dos  $N_i$ :

$$\sum_j \left( \frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{T, p, N_{j \neq i}} \frac{dN_j}{dN_i} = 0 \quad (\text{B.5})$$

As relações entre as variações dos  $N_i$ 's são definidas pela reação química correspondente. Assim, se o elemento  $i$  sofrer uma variação de  $dN_i = \bar{\nu}_i$ , todos os demais elementos terão

que sofrer uma variação  $dN_j = (\bar{\nu}_j/\nu_i)\nu_j$  para manter a estequiometria. Temos, portanto,  $dN_j/dN_i = \nu_j/\nu_i$  e podemos escrever a *condição de equilíbrio químico*:

$$\sum_i \nu_i \mu_i = 0, \quad (\text{B.6})$$

já que o potencial químico de um elemento  $i$ ,  $\mu_i$ , é definido como:

$$\mu_i \equiv \left( \frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,p,N_{i \neq j}}. \quad (\text{B.7})$$

Desta forma, observa-se que os potenciais químicos obedecem à equação simbólica (B.2), substituindo-se os  $A_i$  por  $\mu_i$ .

Se a reação química tiver que respeitar algumas leis de conservação, teremos tantos potenciais químicos independentes quantas forem as leis, ou seja, se tivermos  $p$  elementos e  $q$  leis, poderemos expressar os potenciais químicos em função de apenas  $q$  deles. Para mostrar isso consideremos o caso mais usado neste trabalho em que existem duas leis de conservação, a conservação de carga elétrica e de número bariônico; podemos expressar estas leis para uma reação do tipo (B.2) como:

$$\sum_i^N \nu_i q_{ei} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i^N \nu_i q_{bi} = 0, \quad (\text{B.8})$$

onde  $q_{ei}$  e  $q_{bi}$  são, respectivamente, a carga elétrica e bariônica do elemento  $i$ . Como temos  $N$  variáveis e 2 equações poderemos apenas expressar 2 dos  $\nu_i$  em função dos outros  $N - 2$ , os quais por sua vez serão independentes:

$$\nu_1 q_{e1} + \nu_2 q_{e2} = - \sum_{i \neq 1,2}^N \nu_i q_{ei}, \quad (\text{B.9})$$

$$\nu_1 q_{b1} + \nu_2 q_{b2} = - \sum_{i \neq 1,2}^N \nu_i q_{bi}. \quad (\text{B.10})$$

Considerando, por exemplo, que o elemento 1 seja o nêutron e o 2 o elétron temos que  $q_{b1} = -q_{e2} = 1$  e  $q_{b2} = q_{e1} = 0$  e o sistema acima fica trivial:

$$\begin{aligned} \nu_n &= - \sum_i^N \nu_i q_{bi}, \\ \nu_e &= \sum_i^N \nu_i q_{ei}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo (B.11) em (B.6) encontramos:

$$\sum_{i \neq n,e}^N \nu_i \mu_i = \sum_{i \neq n,e}^N (\mu_n q_{bi}) \nu_i - \sum_{i \neq n,e}^N (\mu_e q_{ei}) \nu_i. \quad (\text{B.12})$$

Como os  $\nu_i$  são independentes, a igualdade só será verificada se seus coeficientes forem iguais, ou seja:

$$\mu_i = q_{bi} \mu_n - q_{ei} \mu_e. \quad (\text{B.13})$$

Esta linha de raciocínio pode ser estendida a um número qualquer de leis de conservação.

# Bibliografia

- [1] FETTER, A. L., WALECKA, J.D. Quantum theory of many-particle systems, New York: McGraw Hill, 1971.
- [2] DAY, B. D. Nuclear saturation from two nucleon potentials. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 47, n. 4, p. 226-229, July 1981.
- [3] WALECKA, J. D. A theory of high condensed matter. *Annals of Physics*, New York, v. 83, n. 2, p. 491-529, Apr. 1974.
- [4] SEROT, B. D., WALECKA, J. D. , Advances in Nuclear Physics, New York: Plenum Press, 1986.
- [5] BOGUTA, J., BODMER, A. R. Relativistic calculation on nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, Amsterdam, v. 292, n. 3, p. 413-428, Dec. 1977.
- [6] ZIMANYI, J., MOSZKOWSKI, S. A. Nuclear equation of state with derivative scalar coupling. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 42, n. 4, p. 1416-1421, Oct. 1990.
- [7] LINDBLOM, L. Determining the nuclear equation of state from neutron-star masses and radii. *Astrophys. J.*, Chicago, v.398, n. 2, part 1, p. 569-573, Oct. 1992.
- [8] CLEYMANS, J. et al. Quarks and gluons at high temperatures and densities. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 130, n. 4, p. 217-292, Jan. 1986.
- [9] GLENDENNING, N. K. Neutron stars are giant hypernuclei? *Astrophys. J.*, Chicago, v. 293, n. 2, p. 470-493, June 1985.
- [10] TOLMAN, R. C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev*, New York, v. 55, n. 4, p. 364-373, Feb. 1939.
- [11] OPPENHEIMER, J. R., VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Physic. Rev.*, New York, v.55, n. 4, p. 374-381, Feb. 1939
- [12] CHANDRASEKHAR, S., Maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophys. J.*, New York, v.74, p. 81-82, Jul. 1931.
- [13] DELFINO, A. COELHO, C. T. MALHEIRO, M. Relativistic nuclear matter with a alternative derivative coupling models. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 51, n. 4, p. 2188-2195, Apr. 1995; Nuclear matter properties for modified Zimanyi-Moszkowski models, *Phys. Lett. B*, Woodbury, v. 345, p. 361-366, Feb. 1995.

- [14] LANDAU, L., LIFSHITZ, E. The classical theory of fields, Reading: Addison-Wesley, 1951.
- [15] WEINBERG, S. Gravitation and cosmology, New York: John Wiley, 1972.
- [16] SCHWARZSCHILD, Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss., 424, 1916.
- [17] HARRISON, B. K., THORNE, K. S., WAKANO, M., WHEELER, J. A. Gravitation theory and gravitational collapse, Chicago: University of Chicago Press, 1965.
- [18] SHAPIRO, S. L., TEUKOLSKY, S. A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, New York: John Wiley, 1983.
- [19] LANDAU, L.D., Phys. Z. Sowjetunion **1** (1932) 285
- [20] CHANDRASEKHAR, S. Highly collapsed configurations of a stellar mass. Part II. *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, London, v. 95, p. 207-225, Jan. 1935.
- [21] RHOADES, C. E., RUFFINI, R. Maximum mass of a neutron star. *Physical Review Letters*, New York, v. 32, n. 6, p. 324-327, Feb. 1974.
- [22] BAYM, G., PETHICK, C., SUTHERLAND, P. The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 170, n. 2, part 1, p. 299-317, Dec. 1971.
- [23] GLENDENNING, N. K. Compact stars, New York: Springer-Verlag, 1997.
- [24] VON WEIZSACKER, C. F. Theory of nuclear mass. *Z. Physik*, Heidelberg, v. 96, n. 7/8, p. 431-458, Sept. 1935.
- [25] MYERS, W. D., SWIATECKI, W. J. Average nuclear properties, *Ann. Phys.*, New York, v. 55, n. 3, p. 395-505, dec. 1969.
- [26] MOLLER, P., MYERS, W. D., SWIATECKI, W. J., TREINER, J. Nuclear mass formula with a finite-range droplet model and a folded-Yukawa single-particle potential, *Atomic data and nuclear data tables*, New York, v. 39, n. 2, p. 225-233, July 1988.
- [27] BLAIZOT, J. P., Nuclear compressibilities, *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 64, n. 4, p. 171-248, Sept. 1980.
- [28] KRIVINE, H., TREINER, J., BOHIGAS, O. Derivation of a fluid-dynamical lagrangian and electric giant-resonances, *Nucl. Phys.*, Amsterdam, v. A336, n. 2, p. 155-184, Mar. 1980. (1980) 155.
- [29] GOMES, L. C., WALECKA, J. D., WEISKOPF, V. F. Properties of nuclear matter. *Ann. of Phys.*, New York, v. 3, n. 3, p. 241-274, Mar. 1958.
- [30] JOHNSON, M. H., TELLER, E. Classical field theory of nuclear forces. *Phys. Rev.*, New York, v. 98, n. 3, p. 783-787, May 1955.

- [31] DUERR, H. P. Relativistic effects in nuclear forces. *Phys. Rev.*, New York, v. 103, n. 2, p. 469-480, Jul. 1956.
- [32] WALECKA, J. D. Theoretical nuclear and subnuclear physics. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [33] BJORKEN, J.D., DRELL, S. D., Relativistic quantum fields, New York: McGraw Hill, 1965.
- [34] HUGENHOLTZ, N. M., VAN HOVE, L. A theorem of the single particle energy in a Fermi gas with interaction, *Physica*, Amsterdam, v. 24, p. 363-376, 1958. 363 (1958).
- [35] BANERJEE, B., GLENDENNING, N. K., GYULASSY, M. Pion condensation in a relativistic field theory consistent with bulk properties of nuclear matter. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 361, p. 326-354, Feb. 1981.
- [36] FURNSTAHL, R. J., SEROT, B. D. Covariant Feynman rules at finite temperature: time-path formulation. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 44, n. 5, p. 2141-2174, Nov. 1991.
- [37] GLENDENNING, N.K. Vacuum polarization effects on nuclear matter and neutrons stars. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 493, n. 3/4, p. 521-548, Mar. 1989.
- [38] WALDHAUSER, B. M., MARUHN, J. A., STOCKER, H., GREINER, W. Nuclear equation of state from the nonlinear relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 38, n. 2, p. 1003-1009, Aug. 1988.
- [39] GLENDENNING, N. K., WEBER, F., MOSZKOWSKI, S. A. Neutron stars in the derivative coupling model. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 45, n. 2, p.844-855, Feb. 1992.
- [40] BARRANCO, M. et al. Multi-lambda matter in a derivative coupling model. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 44, n. 1, p. 178-183, July 1991.
- [41] CHIAPPARINI, M., DELFINO A., MALHEIRO, M., GATTONE, A. Finite nuclei in a relativistic mean-field model with derivative couplings. *Zeit. Phys. A*, Heidelberg, v. 357, p. 47-52, Feb. 1997.
- [42] MALHEIRO, M., DELFINO A., COELHO, C. T. Phase transition in warm nuclear matter with alternative derivative coupling models. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 58, n. 1, p. 1-7, Jul. 1998.
- [43] DELFINO, A., CHIAPPARINI, M., MALHEIRO, M., BELVEDERE, L. V., GATTONE, A. O. Derivative-coupling models and the nuclear-matter equation of state. *Zeit. Phys. A*, Heidelberg, v.355, p. 145-150, Jul. 1996.
- [44] CHADWICK, J. Possible existence of a neutron. *Nature*, London, v. 129, p. 312, Feb. 1932.

- [45] BAADE, W., ZWICKY, F. Supernovae and cosmic rays. *Phys. Rev.*, New York, v. 45, n. 1, p. 138, Jan. 1934.
- [46] WOLTJER, L. X-rays and type I supernova remnants. *Astrophys. J.*, Chicago, v. 140, n. 3, p. 1309-1313, Oct. 1964.
- [47] PACINI, F. Rotating neutron stars, pulsars and supernova remnants. *Nature*, London, v. 219, p. 145-146, July 1968.
- [48] HEWISH, A., BELL, S. J., PIKINGTON, J. D. H., SCOTT, P. F., COLLINS, R. A. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, London, v. 217, p.709-713, Feb. 1968.
- [49] HULSE, R. A., TAYLOR, J. J., A high-sensitivity pulsar survey. *Astrophys. J. (Letters)*, Chicago, v. 191, n. 2, p. 59-61, July 1974.
- [50] PASACHOFF, J. M. Contemporary Astronomy, Philadelphia: W. B. Saunders, 1977.
- [51] LYNE, A. G., GRAHAM-SMITH, F. Pulsar astronomy, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [52] WOLSZCZAN, A., FRAIL, D. A. A planetary system around the millisecond pulsar PSR 1257+12, *Nature*, London, v. 355, n. 6356, p. 145-147, Jan. 1992.
- [53] THORSETT, S. E. et al. The masses of two binary neutron star system. *Astrophys. J. Letters*, Chicago, v. 405, n. 2, p. 29-32, Mar. 1993.
- [54] MOSZKOWSKI, S. A., Energy of neutron star matter. *Phys. Rev. D*, New York, v. 9, n. 6, p. 1613-1625, Mar. 1974.
- [55] NEGELE, J. W., VAUTHERIN, D. Neutron star matter at sub-nuclear densities. *Nuclear Phys. A*, Amsterdam, v. 207, n. 2, p. 298-320, Jun. 1973.
- [56] FURNSTAHL, R. J., PERRY, R. J., SEROT, B. D. Two loop corrections for nuclear matter in the Walecka model. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 40, n. 1, p. 321-353, July 1989.
- [57] WEINBERG, S. The quantum theory of fields, vol. I: Foundations, Cambridge: University of Cambridge Press, 1995.
- [58] WEINBERG, S. The quantum theory of fields, vol. II: Modern Applications, Cambridge: University of Cambridge Press, 1996.
- [59] MANOHAR, A., GEORGI, H. Chiral quarks and the non-relativistic quark model. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 234, n. 1, p. 189-212, Mar. 1984.
- [60] SEROT, B. D., WALECKA, J. D. Recent progress in quantum hadrodynamics, *Int. Journ. Mod. Phys. E*, v. 6, p. 515-631, 1997.

- 
- [61] KOEPF, W., SHARMA, M. M., RING, P. Scalar coupling in relativistic mean field theory and properties of nuclei and nuclear matter. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 533, n. 1, p. 95-112, Oct. 1992.
- [62] FURNSTAHL, R. J., SEROT, B. D., Effective Field Theory and Nuclear Mean-Field Models. nucl-th/9907073, 19 July 1999.
- [63] FURNSTAHL, R. J., SEROT, B. D., TANG, JH. B. Analysis of chiral mean-field models for nuclei. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 598, n. 4, p. 539-582, Mar. 1996.
- [64] DIRAC, P. A. M. General theory of relativity, New York: John Wiley, 1975.