

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# Efeitos de flutuações nas amplitudes de espalhamento em altas energias \*

**Eduardo André Flach Basso**

Dissertação de mestrado realizada sob orientação da Profa. Dra. Maria Beatriz Gay Ducati e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre  
2008

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Este trabalho é dedicado

a minha família, Lisiane e David.

# Agradecimentos

Primeiramente, devo agradecer ao apoio incondicional depositado em mim por parte de minha família, sem o qual este trabalho se tornaria imensamente mais custoso. Agradeço aos meus pais, David e Lise, que sempre apoiaram e incentivaram a educação de seus filhos. Sou muito grato também à minha esposa Lisiane e meu filho David. Ela, que deixou de fazer muitas de suas atividades para tomar conta de nosso filho no decorrer deste trabalho, além de suportar a ausência que por vezes foi imposta pelos mais diversos motivos. Aos dois — Lisiane e David, pelos momentos agradáveis de convívio que alegraram minha vida e ajudaram a enfrentar as dificuldades dos compromissos profissionais.

O convívio com todos os integrantes do Grupo de Fenomenologia de Partículas de Altas Energias foi uma experiência muito positiva. Agradeço a minha orientadora, profa. Maria Beatriz Gay Ducati, pela maneira como conduziu o desenvolvimento desta dissertação, bem como a todos os ensinamentos prestados, não só a respeito de física mas também de vivência no meio científico. Agradeço também ao Prof. Magno Machado que me ensinou a dar os primeiros passos na física de partículas, como co-orientador de iniciação científica.

Também os demais colegas de grupo, Werner, Marcos André, Luiz Fernando, João Thiago, Emmanuel, Gustavo e Mairon merecem agradecimentos muito especiais, por todas as interações proporcionadas, tanto em nível acadêmico como fora deste, no futebol, cafés, churrascos, festas, etc. Em especial, quero agradecer aos colegas João Thiago e Emmanuel, com os quais trabalhei diretamente no decorrer do curso de mestrado e aprendi muito, tanto no que diz respeito a física presente no trabalho como em rotinas numéricas para obtenção de resultados.

Agradeço aos professores e funcionários do IF-UFRGS pela excelente formação proporcionada. Quero agradecer também aos demais colegas do Instituto de Física da UFRGS, em especial os colegas da sala M205, bem como de todas as salas de alunos de PG, pelos momentos de descontração e discussão. Por fim, agradeço a todos os amigos e familiares que de alguma forma tenham ajudado em algum momento da minha formação.

# Resumo

Investigamos os efeitos desempenhados pelas flutuações no número de glúons sobre a evolução dos hádrons em altas energias, sob o referencial de dipolos de cor. Entendemos por flutuações o seu significado estatístico, ou seja, desvios em torno da média. A evolução na presença destes efeitos se torna estocástica, fazendo com que diferentes realizações de uma dada evolução resultem em diferentes realizações do alvo a ser estudado. Desta forma, são originadas diferentes amplitudes — as chamadas amplitudes evento–por–evento — para um mesmo valor da variável de evolução. As distribuições destas amplitudes apresentam uma relação de dispersão, relacionada ao coeficiente de difusão que define a existência das flutuações.

O regime de altas energias significa que o número de partículas no interior dos hádrons é suficientemente grande e, portanto, efeitos de saturação tornam-se necessários na descrição dos processos. A união dos efeitos de saturação e flutuações é que torna a evolução estocástica — originando as chamadas equações de evolução de laços de pomerons. As flutuações influem fortemente no comportamento diluído da evolução, e poderíamos esperar que na região de altas densidades partônicas (região de saturação), tais efeitos não sejam importantes. Entretanto, mesmo nesta região, as amplitudes de espalhamento devem apresentar uma cauda diluta, onde as flutuações desempenhariam importante papel. Assim, ao menos teoricamente, a evolução em altas energias deve considerar efeitos de flutuações no número de partículas.

O processo de interesse neste trabalho é o espalhamento  $\gamma^*p$ , que é descrito no referencial de dipolos de cor pelo espalhamento dipolo–próton. Para descrever tal processo, utilizamos o modelo AGBS para a seção de choque de dipolos, o qual interpola analiticamente as soluções assintóticas da equação de evolução de Balitsky e Kovchegov (BK) no espaço de momentum. Estendemos tal modelo incluindo os efeitos de flutuações e então o usamos para descrever a função de estrutura do próton, a qual foi ajustada globalmente aos dados do colisor Hadron Electron Ring Accelerator (HERA) para esta quantidade.

Como resultado, obtemos que, através do modelo AGBS, os efeitos de flutuações não estão presentes na evolução, pelo menos nas energias atingidas em HERA. Assim, pode-se concluir que uma descrição de campo médio, baseada somente nas soluções da equação BK, é suficiente para a descrição dos dados nestas energias. Entretanto, para energias maiores, como as que serão alcançadas no Large Hadron Collider (LHC), os efeitos de flutuações podem ser importantes na descrição dos processos.

# Abstract

We investigate the effects of the fluctuations in the gluon number in the high energy hadron evolution, using the color dipole frame. We understand by fluctuations its statistical meaning, *i.e.*, deviations around the mean value. In the presence of these effects, the evolution becomes stochastic, so that different realizations of the evolution result in different realizations of the target under investigation. In this way, for a given value of the evolution variable, different amplitudes are created — the so called event-by-event amplitudes. The distributions of these amplitudes present a dispersion, related to the dispersion coefficient which defines the existence of the fluctuations.

The high energy regime means that the number of particles inside the hadron is sufficiently large, so that the saturation effects become necessary in the description of the processes. Together, saturation and fluctuation effects make the evolution a stochastic process — giving rise to the so called pomeron loop evolution equations. The fluctuations have a strong influence on the behavior in the dilute regime of the evolution and we could expect that in the high density region (saturation region), these effects are not important. However, even in such region, the scattering amplitudes have a dilute tail, where the fluctuations play an important role. Therefore, at least theoretically, the high energy evolution equations have to consider the fluctuations effects.

In this work, the process of interest is the  $\gamma^*p$  scattering, which is described in the color dipole frame by the dipole-proton scattering. To describe this process, we use the AGBS model for the dipole cross section, which analytically interpolates between the asymptotic solutions of the Balitsky-Kovchegov (BK) evolution equation in momentum space. We extend this model by including the fluctuations effects and we use them to describe the  $F_2$  proton structure function, which was globally fitted to the Hadron Electron Ring Accelerator (HERA) data for this quantity.

As a result, we obtain that, through the AGBS model, the fluctuation effects are not present in the evolution in the energies reached at HERA. Then it can be concluded that a mean field description, based on the solutions of the BK equation only, is sufficient to describe the data at these energies. However, for large energies, like those will be attained at the Large Hadron Collider (LHC), the fluctuations effects can be important in the description of the processes.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>1. A Cromodinâmica Quântica e os Processos de Espalhamento</b> . . . . .	6
1.1 A Cromodinâmica Quântica . . . . .	6
1.2 Espalhamento Profundamente Inelástico . . . . .	9
1.2.1 Variáveis Cinemáticas . . . . .	11
1.2.2 Modelo de Pártons . . . . .	13
1.2.3 DIS no referencial de dipolos de cor . . . . .	15
1.3 Equações de evolução lineares . . . . .	17
1.3.1 DGLAP . . . . .	17
1.3.2 BFKL . . . . .	22
1.3.3 Dinâmica BFKL no formalismo de dipolos de cor . . . . .	24
1.4 Conclusões . . . . .	28
<b>2. A Evolução e a Saturação Partônica</b> . . . . .	29
2.1 As correções de unitariedade . . . . .	29
2.2 As equações de evolução não lineares . . . . .	30
2.2.1 A equação de Balitsky e Kovchegov . . . . .	30
2.2.2 A hierarquia de Balitsky . . . . .	33
2.3 Conclusões . . . . .	36
<b>3. Amplitudes de espalhamento em altas energias</b> . . . . .	37
3.1 A função de estrutura do próton no referencial de dipolos . . . . .	37
3.2 O escalamento geométrico e a física estatística . . . . .	39
3.3 O modelo AGBS para a amplitude $\tilde{T}(k, Y)$ . . . . .	46
3.4 Conclusões . . . . .	50
<b>4. Flutuações e suas conseqüências para a QCD em altas energias</b> . . . . .	52
4.1 Flutuações e evolução no formalismo de dipolos . . . . .	52
4.2 Equações de evolução na presença de flutuações e saturação . . . . .	56
4.3 Uma equação de Langevin para a evolução na presença de flutuações . . . . .	59
4.3.1 Conexão com a física estatística . . . . .	62
4.4 Flutuações no modelo AGBS . . . . .	65
4.4.1 Ajuste aos dados e resultados . . . . .	66

<b>Conteúdo</b>	<b>vii</b>
4.5 Conclusões . . . . .	70
<b>Conclusões</b> . . . . .	<b>72</b>
A. A função de estrutura do próton no espaço de momentum . . . . .	75
B. A distribuição de probabilidade para a escala de saturação estocástica .	82
<b>Referências</b> . . . . .	<b>91</b>

# Introdução

Atualmente é aceito na comunidade científica que a teoria de campo que descreve de forma satisfatória as interações fortes entre quarks e glúons é a chamada Cromodinâmica Quântica (QCD) [1, 4, 12]. Desde sua introdução na década de 1970 até os dias atuais esta teoria vem sendo usada para descrever satisfatoriamente uma grande variedade de processos, buscando principalmente a compreensão de como se dá a dinâmica dos sistemas hadrônicos em altas energias. Neste sentido a QCD não prediz a quantidade de pártons no interior dos hádrons, mas sim a evolução das densidades destes pártons, a partir de uma condição inicial. Em energias suficientemente altas a constante de acoplamento é pequena o bastante para que técnicas perturbativas sejam empregadas.

Na QCD perturbativa, a evolução das distribuições de pártons — quarks e glúons — que compõem os hádrons pode ser representada pelas equações propostas por Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) [18–20] e também segundo a proposta de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) [21–24]. Para energias não muito elevadas, estas equações têm obtido sucesso na descrição dos dados para os processos de interesse. Contudo, ambas as equações prevêm um forte crescimento das seções de choque totais — e portanto das distribuições de pártons, conforme a energia total aumenta. Este crescimento, se não controlado, pode levar à violação dos vínculos de unitariedade da matriz  $S$  de espalhamento da QCD perturbativa.

As equações DGLAP descrevem a evolução em termos da variável virtualidade  $Q^2$ , que está relacionada ao momentum trocado entre as partículas durante a interação. Durante a evolução, a emissão de novos pártons é descrita em termos de uma cascata partônica, com um forte ordenamento nos momenta transversos  $\mathbf{k}$  dos pártons emitidos no interior da cascata. Devido a este ordenamento, o formalismo DGLAP é válido na região cinemática  $\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \approx 1$ ,  $\alpha_s \ll 1$  e  $\alpha_s \ln(1/x) \ll 1$ , onde  $x$  é a variável de Bjorken, que representa a fração de momentum do párton original e  $Q_0$  é uma escala de momentum que permite o uso de QCD perturbativa. Assim, as equações DGLAP são válidas na região de valores de  $Q^2$  não muito baixos ( $Q^2 \gtrsim 1 \text{ GeV}^2$ , onde a QCD perturbativa é aplicável) e também numa região de  $x$  não muito pequena ( $x \gtrsim 0.001$ ). No limite de pequeno  $x$ , esta evolução considera os termos dominantes neste regime —  $1/x$ , na aproximação de duplo logaritmo dominante (DLLA), a qual soma termos da ordem de  $[\alpha_s \ln(1/x) \ln Q^2]^n$  com forte ordenamento na variáveis  $x$  e  $\mathbf{k}$  e faz com que as distribuições cresçam rapidamente quando  $x \rightarrow 0$ .

A análise da região cinemática de pequeno  $x$ , que corresponde a valores muito grandes da energia total  $s$  e valores moderados de  $Q^2$ , implica somar diagramas que contribuam com termos da ordem  $[\alpha_s \ln(1/x)]^n$ , com  $\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1$  e  $\alpha_s \ln(1/x) \approx 1$ . Nesta região, a aproximação de duplo logaritmo dominante deixa de ser válida e devemos então considerar termos dominantes em  $\ln(1/x)$ , com a dependência completa em  $Q^2$  mantida, de forma que



o forte ordenamento nos momenta transversos, característico da dinâmica DGLAP, deve ser atenuado, e uma integração sobre todo o espaço de fase dos momenta transversos deve ser incluída. Como resultado, a evolução das densidades partônicas ocorre em função da variável  $x$ , para valores pequenos de  $x$ . A evolução acontece agora para valores fixos de virtualidade  $Q^2$ , de forma que na medida em que a energia aumenta, a densidade de pártons aumenta e como a visualização do processo se dá com escala fixa ( $Q^2$  fixo), estes pártons começam a se sobrepor até o limite onde o chamado limite de disco negro é atingido. Como isto, vemos que tanto a evolução DGLAP quanto a BFKL levam ao crescimento das distribuições de pártons, no limite de altas energias ( $s \rightarrow \infty$  e  $x \rightarrow 0$ ), de forma que devem ser incluídos mecanismos que controlem tal crescimento. Estes mecanismos devem considerar que, na região de pequeno  $x$ , efeitos de múltiplos espalhamentos e recombinação partônica ocorram, levando a efeitos de saturação das distribuições.

A forma encontrada para incluir os efeitos de saturação partônica — e também de unitariedade — na evolução em altas energias foi incluir termos não lineares nas equações, em adição aos já encontrados nas evoluções lineares DGLAP e BFKL, que considerem justamente os efeitos citados acima e esperados nesta região. Diversas equações foram desenvolvidas ao longo das últimas décadas, dentre as quais cabe salientar o trabalho de Gribov, Levin e Ryskin de 1983, que deu origem a chamada equação de evolução GLR [26]. Esta equação prevê a recombinação de pártons, além da emissão já prevista em DGLAP e BFKL, para sistemas de alta densidade na QCD perturbativa, por meio da inclusão de diagramas multi-escada — conhecidos também como diagramas “fan”. Outra equação que visa a unitarização foi obtida em 1997 através do formalismo desenvolvido por Ayala, Gay Ducati e Levin, resultando na chamada equação de evolução AGL [27, 28], que ressona a troca de múltiplos diagramas de escadas gluônicas, na aproximação de duplo logaritmo dominante (DLA). Isto é feito com o uso da abordagem de Glauber para a QCD perturbativa, considerando a interação dos pártons mais rápidos da escada com o alvo. Em determinados limites cinemáticos, o formalismo AGL recai nas equações DGLAP e na equação GLR.

Um outro formalismo apropriado para investigar os efeitos de unitariedade das seções de choque em altas energias foi desenvolvido por Mueller [30] e, independentemente, por Nikolaev e Zakharov [14, 15], na década de 1990. Tal formalismo baseia-se no referencial de dipolos de cor, no qual o espalhamento profundamente inelástico (DIS) ocorre por meio do desdobramento do fóton virtual — que prova o alvo — em um par quark-antiquark  $q\bar{q}$ , sendo que este último é que interage com o alvo. Usando este formalismo, Kovchegov [31, 32] obteve uma equação não linear que generaliza a equação BFKL — em sua representação de dipolos de cor, pela inclusão de um termo que unitariza-a no limite de altas energias. Balitsky obteve em trabalhos anteriores a mesma equação [33–35], com o uso da Expansão do Produto de Operadores (OPE) na QCD, obtendo uma hierarquia para a evolução de operadores de linhas de Wilson. Neste sentido a equação de Kovchegov é obtida na aproximação de campo médio para o operador correspondente à densidade de dipolos. Atualmente a equação obtida nesta aproximação é conhecida como equação de Balitsky e Kovchegov, que considera a interação dipolo-alvo através da evolução do dipolo original, quando ocorre a formação de uma cascata de dipolos pelas sucessivas emissões de glúons — os quais podem ser interpretados como pares de quark-antiquark no limite de grande número de cores. Desta forma obtém-se uma equação não linear que unitariza e regulariza as divergências infravermelhas da equação BFKL na aproximação de logaritmo dominante (LLA)  $\ln(1/x)$ .

Enquanto estes desenvolvimentos eram feitos, Golec-Biernat e Wüsthoff [16] constataram que os efeitos de unitarização poderiam ser realmente vistos nos processos de DIS para o espalhamento elétron–próton no experimento Hadron Electron Ring Accelerator (HERA), do laboratório DESY, em Hamburgo. O modelo proposto por eles — modelo GBW, para a seção de choque de dipolos  $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}$ , apontou para uma nova forma de escalamento das seções de choque, chamada escalamento geométrico, que foi realmente observada nos experimentos de HERA. Esta forma empírica de escalamento prediz que em altas energias a seção de choque para o processo elétron–próton  $\sigma^{\gamma^*p}(Y, Q^2)$  — a qual está relacionada à  $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(Y, Q^2)$ , deve depender apenas da variável de escalamento  $\tau = Q^2/Q_s^2(Y)$ , e não de forma independente de  $Q^2$  e da variável rapidez  $Y = \ln(1/x)$ . A chamada escala de saturação  $Q_s$  define a região no espaço de fases onde os efeitos de saturação se tornam importantes.

Soluções numéricas para a equação de evolução BK já existem na literatura [54], mas soluções analíticas são difíceis de obter. Uma maneira de contornar este problema é fazer uma correspondência entre a evolução da QCD em altas energias com processos de reação–difusão, muito estudados em física estatística. Neste sentido é possível mostrar, perante uma aproximação difusiva para o núcleo BFKL e uma mudança de variáveis, que a equação BK está em classe de equivalência com a equação desenvolvida por Fisher [45] e, independentemente, por Kolmogorov, Petrovsky e Piscounov [46], para descrever problemas de genética e conhecida como equação FKPP. Esta equação possui a propriedade de admitir as chamadas soluções de ondas propagantes, que representam o escalamento geométrico para as amplitudes de espalhamento da equação BK [48, 49].

Entretanto, analisando a evolução de dipolos em uma representação Markoviana para o formalismo de dipolos, Iancu e Mueller [60] mostraram que tal evolução apresenta termos responsáveis por flutuações no número de partículas — glúons ou dipolos — no alvo, e que estas flutuações mudam consideravelmente o panorama do espaço de fases para a QCD perturbativa em altas energias. Desta forma, é possível mostrar que a hierarquia de Balitsky — e portanto a equação de evolução BK — não leva em conta os possíveis efeitos das flutuações no número de partículas no alvo. Precisamente, esta não leva em conta efeitos de múltiplos espalhamentos no projétil, os quais correspondem, numa análise dual (projétil e alvo) do processo de espalhamento, às flutuações no número de partículas no alvo. A evolução na presença de flutuações é descrita pelas chamadas equações de laços de pomerons [58, 59]— ou pomerons QCD na aproximação da troca de dois glúons, advindas da combinação dos termos recombinação partônica, responsáveis pela saturação com os termos de emissão de pártons, devidos às flutuações. Tais equações formam uma hierarquia infinita de equações acopladas — análogamente a hierarquia de Balitsky, a qual pode ser descrita como uma equação de Langevin estocástica [58], com um termo de ruído branco gaussiano responsável pelas flutuações. Esta equação é igual a equação BK adicionada de um termo de ruído, de forma que, usando a aproximação difusiva para o núcleo BFKL, pode-se usar a analogia com processos de reação–difusão novamente e escrever a equação de Langevin como uma versão estocástica da equação FKPP, designada como equação sFKPP. Desta forma, usando novamente a analogia com a física estatística, pode-se incluir efeitos de flutuações ao formalismo de evolução BK. O número de ocupação de partículas  $N$  é discreto no modelo de reação–difusão, de forma que a descrição de campo médio — equação FKPP, é obtida no limite  $N \rightarrow \infty$  para a equação sFKPP.

Dentre as principais mudanças para evolução na presença de flutuações, que se dá agora

de forma estocástica, está o fato que a cada realização do ruído resulta uma realização do alvo, levando assim a uma amplitude evento–por–evento para a evolução. A escala de saturação — que define a posição das frentes de onda, se torna randômica: para uma dada rapidez teremos diferentes frentes de onda correspondentes a diferentes realizações do alvo. Estas frentes apresentam uma distribuição que é aproximadamente gaussiana e uma relação de dispersão da forma  $\sigma^2 \propto DY$ , onde  $D$  é o coeficiente de difusão que caracteriza as flutuações. Outra consequência importante para a evolução é que a velocidade assintótica com que as frentes de onda propagantes — ou amplitudes escaladas — viajam é menor que o valor médio previsto pela evolução BK, dita de campo médio. Precisamente, a velocidade é igual ao valor de campo médio — advindo da evolução BK — com uma correção que escala logaritmicamente — com o acoplamento forte  $\alpha_s$ , no caso da QCD e com o número de ocupação  $N$  nos modelos estatísticos (reação–difusão). Isto se traduz no fato de que as frentes de onda são compactas, bem localizadas no espaço em relação às frentes de onda da predição de campo médio, devido a forma discreta das distribuições, de forma que a evolução é congelada num estado de velocidade pré–assintótica.

Como visto, o ruído é que gera uma distribuição de frentes de onda para uma mesma realização do alvo — uma mesma rapidez. Cada uma destas distribuições é descrita por uma evolução do tipo BK e portanto preserva o escalamento geométrico, ou seja, para diferentes rapidezzes as frentes individuais em cada distribuição terão sempre a mesma forma, embora estas são mais dispersas para rapidezzes maiores. A amplitude média, ou amplitude física, é obtida por meio da integração das amplitudes individuais — evento–por–evento, sobre a variável estocástica que define a posição das frentes, com a função peso que define a distribuição de probabilidade para a distribuição de tais frentes. Ou seja, ela é obtida tomando-se a média sobre a posição estocástica das frentes de onda. O fato curioso, e também conflitante com o comportamento de campo médio da evolução, é que a amplitude média não preserva o escalamento geométrico, mas se comporta de forma diferente, mostrando um escalamento proporcional ao coeficiente de difusão  $D$  e portanto chamado escalamento difusivo. Esta é uma das principais diferenças entre a evolução com flutuações e a evolução usual de campo médio.

O objetivo deste trabalho é investigar o quanto os efeitos de flutuações no número de partículas é importante para a descrição dos dados de DIS nas energias atingidas em HERA [51–53]. Para tanto, usaremos um modelo para a amplitude de espalhamento — e portanto para a seção de choque — dipolo–próton, o qual interpola analiticamente entre os comportamentos assintóticos das soluções da equação de evolução BK, obtidos por meio da analogia com processos de reação–difusão para o regime diluto e por meio de vínculos de unitariedade para o regime saturado. Tal modelo, proposto por Amaral, Gay Ducati, Betemps e Soyez e que chamaremos modelo AGBS [42], foi obtido na análise de acoplamento  $\alpha_s$  fixo e usado para descrever os dados da função de estrutura do próton  $F_2$  em HERA, com um excelente ajuste aos dados. Introduziremos os efeitos de flutuações ao modelo por meio das considerações feitas acima e então usaremos o novo modelo para ajustar os dados de HERA para a função de estrutura do próton. Com isto, poderemos inferir a importância dos efeitos de flutuações na descrição de processos nas energias atingidas em HERA, bem como testar a robustez do modelo AGBS.

O trabalho será organizado da seguinte maneira: no capítulo 1, apresentaremos os aspectos básicos da QCD perturbativa, bem como do espalhamento profundamente inelás-

tico necessários à compreensão dos capítulos seguintes. Em relação ao DIS, apresentamos também a interpretação deste por meio do modelo de pártons, além de sua descrição no referencial de dipolos de cor. em seguida apresentamos as dinâmicas de evolução lineares descritas pelas equações DGLAP e BFKL.

No capítulo 2 veremos como os efeitos de unitariedade se fazem necessários na descrição dos processos em energias muito altas. Em seguida apresentamos algumas equações de evolução não lineares desenvolvidas para este fim, onde enfatizamos a descrição das equações desenvolvidas com base no referencial de dipolos de cor, apresentando a equação de Balitsky e Kovchegov (BK) e também a hierarquia de Balitsky. Mostramos como a equação BK é obtida por meio de uma aproximação de campo médio para a hierarquia de Balitsky, o que será útil ao falarmos de flutuações.

No capítulo 3 apresentamos o modelo AGBS para a amplitude de espalhamento dipolo-próton. Começamos descrevendo a função de estrutura do próton  $F_2$  no espaço de momento, onde o modelo foi construído, que será útil no ajuste do modelo aos dados de HERA para  $F_2$ . Em seguida discutimos as soluções assintóticas da equação BK, fazendo a analogia com os processos de reação-difusão do tipo FKPP. Visualizamos como estas soluções apresentam o escalamento geométrico para o regime diluto da evolução. Por fim, mostramos como o modelo AGBS é construído com base nestas soluções e como os parâmetros são ajustados aos dados de DIS de HERA.

O capítulo 4 será dedicado às discussões com respeito às flutuações. Começamos vendo como a evolução de dipolos numa representação Markoviana fornece um referencial apropriado para a descrição de flutuações no número de partículas na QCD em altas energias. Então mostramos como pode-se obter equações de evolução que incluam tanto efeitos de recombinação necessários na região de saturação como efeitos de flutuações, importantes no regime diluto. Isto dá origem as chamadas equações de laços de pomerons, as quais formam uma hierarquia infinita que pode ser escrita como uma equação de Langevin, que veremos, pode novamente ser posta em analogia com processos de reação-difusão, muito estudados em física estatística. Finalmente, apresentaremos como o modelo AGBS se comporta com a inclusão de flutuações na evolução. Os resultados do ajuste aos dados de HERA para a função de estrutura  $F_2$  do próton são apresentados.

Ao final de cada capítulo faremos conclusões parciais que serão reagrupadas ao final, juntamente com as conclusões finais e perspectivas futuras. Como resultado principal do ajuste do modelo AGBS, na presença de flutuações, aos dados de HERA, vemos que estes efeitos não desempenham papel importante na evolução da QCD perturbativa nas energias atingidas em HERA, sob o ponto de vista do modelo AGBS. Neste sentido, uma descrição de campo médio é suficiente para a descrição dos dados. Contudo, cabe salientar que em energias maiores, tais efeitos devem desempenhar papel importante, de forma que pode ser importante procurar observáveis passíveis de descreverem tais efeitos nas energias dos colisores Relativistic Heavy Ion collider (RHIC) e Large Hadron Collider (LHC).

## Capítulo 1

# A Cromodinâmica Quântica e os Processos de Espalhamento

### 1.1 A Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria de calibre que descreve as interações fortes entre *quarks* e *glúons*, coletivamente chamados *pártons*. Segundo esta teoria, as partículas observáveis, como o próton e o nêutron, são constituídas de partículas elementares, chamadas quarks, que interagem entre si através de um campo de interação que é mediado por partículas chamadas glúons, de forma análoga ao que ocorre para a Eletrodinâmica Quântica (QED) em relação ao fóton. Sendo uma teoria de calibre, a QCD é descrita através da invariância de propriedades de simetria relacionadas ao grupo de simetria  $SU(3)$ , onde  $N_c = 3$  define a dimensão do grupo e introduz um novo número quântico à teoria, que por razões históricas chamou-se *cor*. Este novo grau de liberdade da teoria, é definido por três cores: vermelho, verde e azul. Desta forma, quarks e glúons possuem carga de cor responsável por sua interação mútua, excluindo assim as partículas que não possuem tal carga, como os léptons.

Em termos matemáticos, os quarks — por serem férmions — são representados por espinores  $q_a$ , onde  $a = 1 \dots N_c = 3$  é o índice de cor. Os glúons são campos vetoriais representados pelas matrizes  $t^A$  geradoras dos grupo de simetria  $SU(3)$ , de tal forma que surgem 8 matrizes geradoras, ou 8 glúons, identificadas pelo índice  $A = 1 \dots 8$ .

Entretanto, apesar de muitos esforços experimentais para a observação dos quarks, estes nunca foram observados livres, mas sim em estados hadrônicos de dois ou três quarks, ou seja, o que se observa são mésons ( $q_a \bar{q}_b$ ) e bárions ( $q_a q_b q_c$ ). Este fato evidencia que a força agindo sobre os quarks deve aumentar com a distância, ao contrário do que ocorre na QED por exemplo. Por outro lado, pode-se descrever razoavelmente bem as seções de choque para processos em altas energias, como no caso do espalhamento profundamente inelástico que descreveremos a seguir, utilizando um modelo no qual os quarks interagem simplesmente através de sua carga elétrica. Isto resulta em uma interação entre os quarks cuja a força é relativamente fraca para curtas distâncias, enquanto para grandes separações esta força é muito grande. Estes comportamentos são muito bem descritos pela QCD no que se chama, respectivamente, *liberdade assintótica* e *confinamento*.

A densidade Lagrangiana da QCD é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{clássico}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}. \quad (1.1)$$

A lagrangiana clássica, correspondente à dinâmica dos quarks e glúons, é dada por [1]

$$\mathcal{L}_{\text{clássico}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \sum_{\text{sabores}} \bar{q}_a (\not{\partial} \gamma^\mu D_\mu - m)_{ab} q_b, \quad (1.2)$$

onde  $m$  é a massa do férmion e

$$(D_\mu)_{ab} = \partial_\mu \delta_{ab} + \imath g_s (t^A A_\mu^A)_{ab} \quad (1.3)$$

é a derivada covariante, com  $g_s$  correspondendo à constante de acoplamento forte.

O tensor de campo, que descreve o campo dos glúons, é dado por

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad (1.4)$$

onde  $f^{ABC}$  são as chamadas constantes de estrutura da QCD, as quais são antisimétricas perante a troca de índices e completamente definidas pela relação de comutação

$$[t^A, t^B] = \imath f^{ABC} t^C. \quad (1.5)$$

Observando o tensor de campo (1.4), notamos que além da presença do índice  $A$ , relacionado ao grupo de simetria da teoria, a principal diferença entre a QCD e a QED é que nesta última não existe o termo  $g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C$ . Em teoria de perturbação, este termo, após a contração do tipo  $F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu}$  na Lagrangeana, gera os vértices de três e quatro glúons.

A QCD é uma teoria de calibre local, significando que é invariante frente a transformações da forma

$$q_a(x) \rightarrow q'_a(x) = U(x) q_b(x) = \left[ e^{\imath t^A \theta^A(x)} \right]_{ab} q_b(x), \quad (1.6)$$

onde  $\theta^A(x)$  é um conjunto de funções com dependência espaço-temporal que revela a natureza da invariância de calibre local. Da mesma forma, o campo vetorial deve ser modificado frente a transformações  $A_\mu \rightarrow A'_\mu$ , tal que

$$D'_\mu q'(x) = (\partial_\mu + \imath g_s t^A A'_\mu^A) U(x) D_\mu q(x), \quad (1.7)$$

de onde obtemos que

$$t^A A'_\mu^A = U(x) t^A A_\mu^A U^{-1}(x) + \frac{\imath}{g_s} [\partial_\mu U(x)] U^{-1}(x). \quad (1.8)$$

Isto implica que o tensor de campo  $F_{\mu\nu}^A$  obedece a seguinte transformação

$$t^A F_{\mu\nu}^A = U(x) t^A F_{\mu\nu}^A U^{-1}(x). \quad (1.9)$$

É importante notar que a invariância frente a transformações de calibre locais da teoria possibilita a utilização de calibres convenientes para os cálculos, uma vez que as amplitudes de espalhamento para quaisquer processos são independentes da escolha do calibre.

Para escalas de momentum suficientemente grandes a constante de acoplamento da teoria,  $g_s$ , é pequena o suficiente para que técnicas perturbativas possam ser usadas na análise da mesma. Entretanto, a obtenção de propagadores e vértices de interação por métodos

perturbativos esbarra no problema da arbitrariedade do campo de glúons  $A_\mu$ . A fim de evitar estes problemas devemos fixar o calibre da teoria, como expresso no segundo termo da Lagrangeana (1.1). Uma possibilidade é fixar o calibre de forma covariante, que pode ser feito usando o *calibre de Lorentz*  $\partial_\mu A_A^\mu = 0$

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A_A^\mu)^2, \quad (1.10)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de calibre. Neste calibre o propagador do campo de glúons tem a forma

$$iD^{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} \left[ g^{\mu\nu} + (\lambda - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \quad (1.11)$$

onde  $k^\mu$  corresponde ao quadrimomentum da partícula. Quando  $\lambda = 1$  temos o chamado *calibre de Feynman*.

Outra maneira de fixar o calibre é usando os calibres axiais, quando a Lagrangiana de fixação de calibre tem a forma

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\lambda}(n^\mu A_\mu^A)^2, \quad (1.12)$$

que por depender do vetor  $n^\mu$  é não covariante. O propagador neste calibre é dado por

$$iD_{AB,\mu\nu}(p) = \delta_{AB} \frac{i}{p^2} \left[ -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu}{n \cdot p} - \frac{(n^2 + \lambda p^2) p_\mu p_\nu}{(n \cdot p)^2} \right], \quad (1.13)$$

o qual é muito mais complicado que o propagador para calibres covariantes. Este calibre, porém, tem a vantagem de não introduzir na teoria os chamados campos fantasmas, que veremos adiante. Assumindo  $n^2 = 0$  e  $\lambda = 0$ , denotado como *calibre no cone de luz*, o propagador toma a forma simplificada

$$iD_{AB,\mu\nu}(p) = \delta_{AB} \frac{i}{p^2} d_{\mu\nu}(p, n), \quad (1.14)$$

onde

$$d_{\mu\nu}(p, n) = -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu}{n \cdot p}. \quad (1.15)$$

O calibre de cone de luz também é chamado calibre físico, pois para  $p^2 \rightarrow 0$  somente as duas polarizações físicas propagam-se:

$$n^\mu d_{\mu\nu}(p, n) = 0, \quad p^\mu d_{\mu\nu}(p, n) = 0, \quad (1.16)$$

quando podemos expandir  $d_{\mu\nu}$  como

$$d_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^2 \epsilon_\mu^{(i)*}(p, n) \epsilon_\nu^{(i)}(p, n), \quad (1.17)$$

onde  $p \cdot \epsilon^{(i)} = 0$  e  $n \cdot \epsilon^{(i)} = 0$ .

A QCD é uma teoria de calibre não-Abeliana, pois os geradores do grupo SU(3) no qual está baseada não comutam entre si, como podemos ver na relação de comutação (1.5).

Para teorias com esta propriedade surgem problemas matemáticos, os quais podem ser solucionados com a introdução na Lagrangeana de um termo correspondente aos campos fantasmas, ou campos de Fadeev-Popov, obtidos por meio do método de integrais de caminho [2, 3]. No caso dos calibres covariantes que introduzimos anteriormente, a Lagrangeana para tais campos tem a forma

$$\mathcal{L}_{\text{fantasma}} = \partial_\mu \eta^{A\dagger} (D_{AB}^\mu \eta^B), \quad (1.18)$$

com

$$(D_\mu)_{AB} = \partial_\mu \delta_{AB} + ig_s (t^C A_\mu^C)_{AB}. \quad (1.19)$$

O campo  $\eta^A$  é um campo escalar complexo que obedece a estatística fermiônica e não corresponde a uma partícula real, estando presente somente nas linhas internas dos diagramas. Este termo não está presente na QED pois suas constantes de estrutura são efetivamente nulas, de forma que os campos fantasmas não se acoplam com partículas reais. Fisicamente, a adição dos campos fantasmas à teoria corresponde a cancelar graus de liberdade não-físicos que estariam presentes nos calibres covariantes. A forma — e mesmo a presença — do termo  $\mathcal{L}_{\text{fantasma}}$  na Lagrangeana depende da condição de calibre. Como mencionamos, o uso do calibre axial, embora torne a forma do propagador muito complicada, evita a introdução dos campos fantasmas.

A partir da Lagrangeana (1.1) é possível obter as chamadas regras de Feynman, que simplificam os cálculos das amplitudes associadas a cada diagrama da teoria. Estas regras, no calibre covariante de Feynman, estão representadas na Fig.1.1, onde deve-se notar que: cada vértice deve conservar energia e momentum, levando aos fatores mostrados para cada diagrama; em cada diagrama, devem ser incluídos no cálculo das amplitudes termos de estado final e inicial, representados por

$$\text{Inicial} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Quark:} & u^a(p) \\ \text{Antiquark:} & \bar{v}^a(p) \\ \text{Glúon:} & \epsilon_\mu(p) a^\alpha \\ \text{Fóton:} & \epsilon_\mu(k) \end{array} \right. \quad (1.20)$$

$$\text{Final} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Quark:} & \bar{u}^a(p) \\ \text{Antiquark:} & v^a(p) \\ \text{Glúon:} & \epsilon_\mu^*(p) a^{\alpha*} \\ \text{Fóton:} & \epsilon_\mu^*(k) \end{array} \right. \quad (1.21)$$

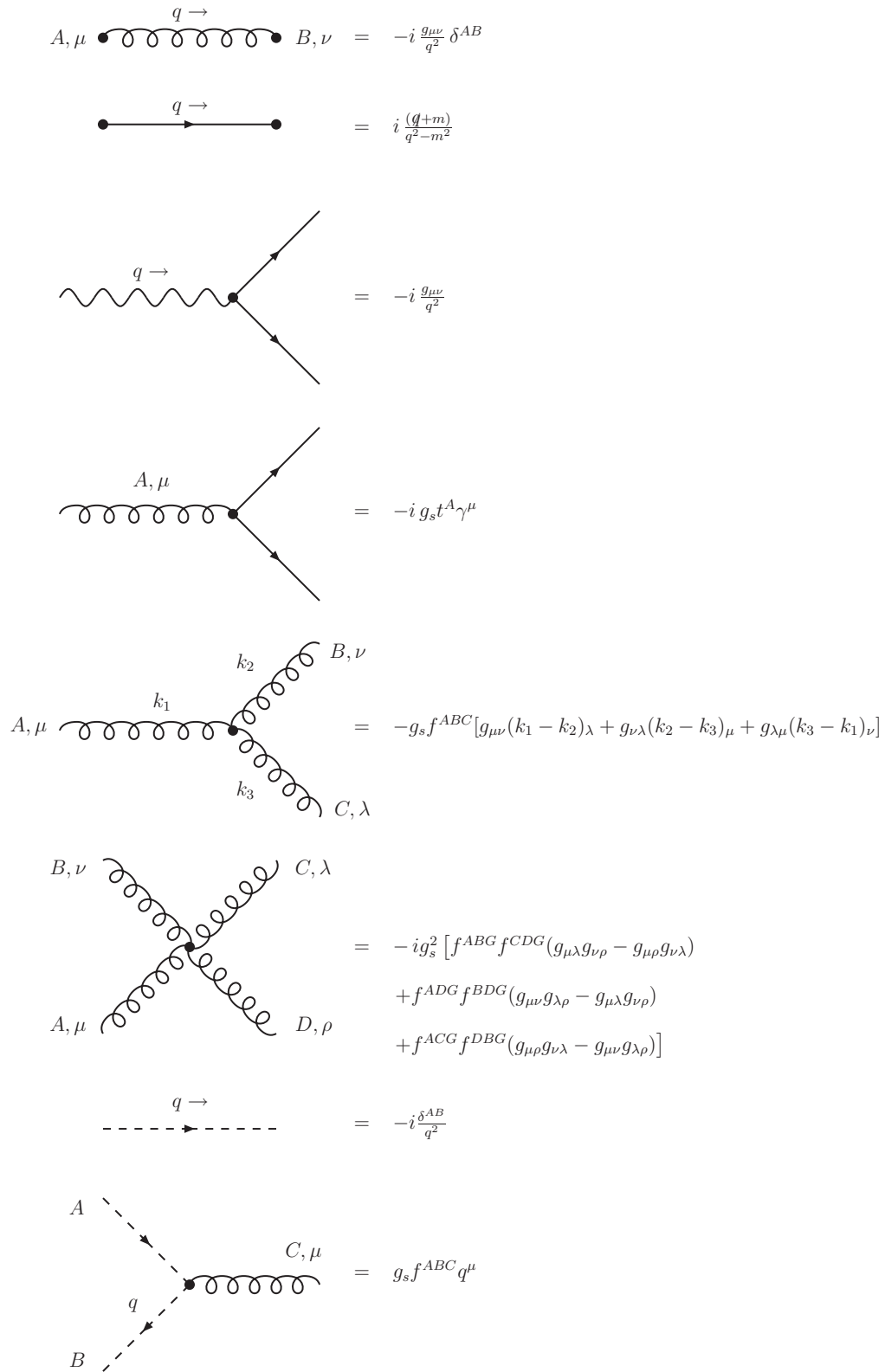
onde o índice  $a$  refere-se ao fator de cor.

## 1.2 Espalhamento Profundamente Inelástico

O espalhamento profundamente inelástico (DIS) caracteriza-se pela interação eletromagnética de um lépton  $\ell$  de alta energia com um nucleon  $N$  (próton ou nêutron), ou com nucleons dentro do núcleo. Tais interações ocorrem por meio da troca de um bóson de calibre ( $\gamma^*$ ,  $Z^0$  para corrente carregada e  $W^\pm$  para corrente neutra) <sup>1</sup>. No caso de corrente

<sup>1</sup> A troca de um fóton virtual  $\gamma^*$  contribui muito mais do que troca dos bosóns  $Z^0$  e  $W^\pm$  para a seção de choque do processo, pois os bósons vetoriais têm massa e são suprimidos se a virtualidade  $Q^2$  não for muito grande, como vemos pela forma  $1/(Q^2 + M^2)$  do propagador.





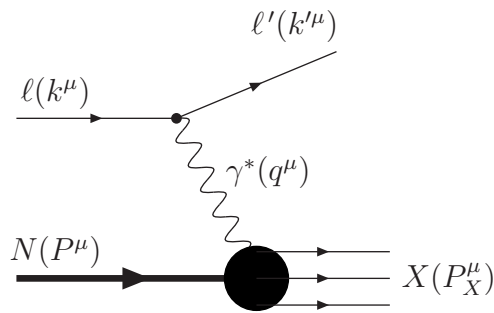
**Fig. 1.1:** Regras de Feynman para a QCD e QED em um calibre covariante (de Feynman). Os fótons são representados por linhas onduladas, glúons por linhas espirais, férmions por linhas sólidas e fantasmas por linhas tracejadas.

neutra o lépton final é do mesmo tipo que o inicial, enquanto que para corrente carregada os léptons finais e iniciais são diferentes. No estado final são medidos o lépton e um estado hadrônico  $X$ , como vemos em

$$\ell + N \rightarrow \ell' + X. \quad (1.22)$$

No caso de medirmos, além do estado hadrônico  $X$ , somente o lépton no estado final temos um processo dito inclusivo, enquanto que, havendo a seleção de um certo estado final, como por exemplo os mésons  $\rho$ ,  $J/\psi$ ,  $\dots$ , o processo é chamado exclusivo.

### 1.2.1 Variáveis Cinemáticas



**Fig. 1.2:** *Processo de Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS) em ordem mais baixa (LO) em teoria de perturbação.*

O processo caracterizado por (1.22) está representado na Fig.1.2. Entendemos esta figura através da QED, onde o fóton com quadrimomento  $q^\mu$  do tipo espaço ( $q^2 < 0$ ) é que define a escala de energia pela qual a estrutura hadrônica será provada. No processo, o lépton possui quadrimomento  $k^\mu$  no estado inicial e  $k'^\mu$  no estado final. O nucleon possui quadrimomento  $P^\mu$  e o estado hadrônico possui quadrimomento  $P_X^\mu$ . Assim, o processo é descrito pelas variáveis independentes de Mandelstam

$$s = (k + P)^2 = E_{CM} \quad (1.23)$$

$$t = (k - k')^2 = -Q^2 \quad (1.24)$$

$$u = (k - P_X)^2, \quad (1.25)$$

onde vemos que  $s$  é a energia do centro de momentum lépton–nucleon e  $Q^2$  é a chamada virtualidade do fóton, definida por

$$Q^2 \equiv -q^2 = (k - k')^2 > 0. \quad (1.26)$$

Para o sistema  $\gamma^*$ –nucleon tal energia é definida por

$$W^2 = (P + q)^2. \quad (1.27)$$

Em relação ao referencial de laboratório é possível determinar a diferença de energia entre os estados inicial e final do lépton

$$\nu = E - E' = \frac{P \cdot q}{m_N}, \quad (1.28)$$

onde  $m_N$  é a massa do nucleon. O DIS é descrito pela introdução da variável adimensional de Bjorken

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2m_N \nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m_N^2}, \quad (1.29)$$

definida no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ , pois  $W^2 \geq m_N^2$  e  $W^2 = m_N^2 + 2P \cdot q(1 - x)$ .

A variável chamada algumas vezes de inelasticidade define a fração de energia perdida pelo lépton no referencial de repouso do nucleon

$$y = \frac{\nu}{E} = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} = \frac{W^2 + Q^2 - m_N^2}{s - m_N^2}, \quad (1.30)$$

e também é válida no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ . A expressão profundamente inelástico refere-se ao regime onde  $m_N \nu \ll m_N^2$  e  $Q^2 \ll m_N^2$ , mantendo-se  $x$  fixo. Assim, é possível desprezar a massa do nucleon frente as outras grandes escalas de energia do processo.

Em ordem mais baixa na QED, a seção de choque inclusiva para o processo definido em (1.22), com o lépton sendo um elétron, pode ser escrita no referencial de laboratório como

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} (eN \rightarrow eX) = \frac{\alpha_{em}^2}{2m_N Q^4} \frac{E'}{E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

onde  $E'$  é a energia do elétron no estado final e  $\Omega$  é o ângulo sólido de espalhamento deste elétron. Na expressão (1.31),  $L^{\mu\nu}$  é o tensor de vértice leptônico, calculado através da regras de Feynman da QED, e que tem a forma

$$L^{\mu\nu} = 2(k'^\mu k^\mu + k'^\nu k^\nu - k \cdot k' g^{\mu\nu}), \quad (1.32)$$

e  $W_{\mu\nu}$  é o tensor do vértice hadrônico

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi^2} \int d^4z e^{ix \cdot z} \langle N | J^\mu(z) J^\nu(0) | N \rangle, \quad (1.33)$$

onde  $J^\mu$  é o operador densidade de corrente representando a probabilidade de transição do estado final para o estado inicial. O tensor hadrônico  $W_{\mu\nu}$  contém todas as informações sobre a interação entre o fóton virtual  $\gamma^*$  e o nucleon, inclusive sobre a possível estrutura interna que este fóton prova durante a interação.

Apesar do tensor hadrônico não ser conhecido por primeiros princípios é possível parametrizá-lo em termos dos quadrimomenta presentes no vértice que o define. Uma possibilidade de parametrização é [4]

$$W_{\mu\nu} = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) W_1 + \left( P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \frac{1}{m_N^2} W_2, \quad (1.34)$$

de forma que após a contração dos tensores em (1.31), a seção de choque para o DIS não polarizado pode ser escrita como função de duas funções de estrutura  $W_1(\nu, Q^2)$  e  $W_2(\nu, Q^2)$  [4, 5]

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} (eN \rightarrow eX) = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} \left[ 2W_1 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + W_2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (1.35)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de espalhamento do elétron.

Podemos reescrever convenientemente as funções de estrutura de forma adimensional

$$F_1(x, Q^2) \equiv m_N W_1(\nu, Q^2) \quad (1.36)$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2), \quad (1.37)$$

de forma que o tensor hadrônico adquira uma forma adimensional, como função de  $F_1$  e  $F_2$ , fornecendo a seção de choque para o DIS em função de  $x$  e  $y$  [5]

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2 s}{Q^4} \left[ xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{xy m_N^2}{s}\right) F_2(x, Q^2) \right]. \quad (1.38)$$

Além disso, também é possível escrever a seção de choque de foto-absorção virtual, um sub-processo do DIS, em termos das funções de estrutura [6]

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_{L,T}(x, Q^2), \quad (1.39)$$

onde os índices  $L$  e  $T$  referem-se às componentes longitudinal e transversal, respectivamente, tal que

$$F_T = 2xF_1 \quad (1.40)$$

$$F_L = F_2 - 2xF_1. \quad (1.41)$$

Notando que  $F_2 = F_L + F_T$ , temos que a soma das componentes transversal e longitudinal da seção de choque de foto-absorção é proporcional a  $F_2$

$$\sigma^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \quad (1.42)$$

### 1.2.2 Modelo de Pártons

A verificação experimental obtida na década de 60 com os resultados do Acelerador Linear da Universidade de Stanford (SLAC) [7], de que no limite de Bjorken [8] definido por

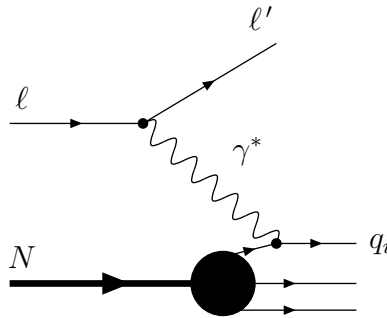
$$\nu, Q^2 \rightarrow \infty, \quad \text{com } x = \frac{Q^2}{2m_N \nu} \text{ fixo,} \quad (1.43)$$

as funções de estrutura dependem somente da variável adimensional  $x$  e não mais de  $Q^2$  e  $\nu$ , deu origem ao que convencionou-se chamar de modelo de pártons. O limite de Bjorken implica

$$\lim_{\nu, Q^2 \rightarrow \infty} m_N W_1(\nu, Q^2) \approx F_1(x), \quad (1.44)$$

$$\lim_{\nu, Q^2 \rightarrow \infty} \nu W_2(\nu, Q^2) \approx F_2(x). \quad (1.45)$$

Este comportamento é chamado escalamento das funções de estrutura e foi predito por Bjorken [9] a partir da álgebra de correntes. Em princípio as funções de estrutura poderiam



**Fig. 1.3:** Interpretação do DIS através do modelo de pãrtons.

ter uma forte dependência na virtualidade do fóton  $Q^2$ , já que a estrutura interna do hádron poderia ser excitada de diferentes maneiras para diferentes valores de  $Q^2$ . O escalamento acima citado, observado experimentalmente no SLAC [7], sugere que o fóton sofre um espalhamento elástico com partículas pontuais, chamadas pãrtons, que constituem o hádron. Isto é o que ilustra a Fig.1.3 e o que discutiremos a seguir.

Num referencial onde o hádron possui momentum  $P \rightarrow \infty$ , *i.e.*, num limite relativístico, este apresenta efeitos de contração temporal e dilatação espacial, de forma que pode-se desprezar as massas e os momenta transversos dos pãrtons constituintes, que comportam-se como partículas livres. Desta forma, os pãrtons movem-se paralelamente em relação ao movimento do hádron, carregando uma fração  $\xi_i$  do momentum do hádron, de forma que a soma sobre todos os pãrtons resulta no momentum do hádron

$$\sum_i \xi_i P = P. \quad (1.46)$$

O modelo de pãrtons implica ainda que a seção de choque inelástica lépton-hádron  $\ell + N \rightarrow \ell' + X$  é a soma incoerente (soma de probabilidades) das seções de choque elásticas individuais  $\ell + q_i \rightarrow \ell' + q'_i$ . Considerando a conservação de momentum aplicada ao vértice pãrton-bóson  $\xi_i p + q = p'$  obtém-se que

$$\xi_i = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = x, \quad (1.47)$$

ou seja, a variável de Bjorken  $x$  pode ser interpretada como a fração de momentum do hádron portada pelo pãrton espalhado.

Na descrição do hádron segundo o modelo de pãrtons, torna-se necessária a definição da probabilidade de encontrarmos um destes pãrtons portando uma fração  $\xi_i = x$  do momentum do hádron, a qual é chamada de densidade partônica  $f_i(x)$ . O número de pãrtons  $i$  no hádron pode ser expresso da seguinte forma:

$$N_i = \int_0^1 f_i(x) dx. \quad (1.48)$$

Por conservação de momentum, resulta que a soma sobre todas as frações de momentum

portadas pelos pártons (carregados ou não) é igual ao momentum do hádron, *i.e.*

$$\sum_i \int_0^1 x_i f_i(x) dx_i = 1. \quad (1.49)$$

De posse da densidade partônica  $f_i(x)$ , é possível encontrar uma relação entre as funções de estrutura  $F_1$  e  $F_2$ , descrita por

$$F_2 = 2xF_1 = x \sum_i e_i^2 f_i(x), \quad (1.50)$$

onde  $e_i$  corresponde à carga de  $i$ -ésima espécie de párton. A relação (1.50) é um resultado direto do fato de os pártons possuírem spin 1/2 [10, 12] e é chamada Relação de Callan-Gross [11].

Usando o conhecimento da classificação dos hádrons através de simetrias do grupo SU(3) [13], estes pártons puderam ser identificados como os quarks constituintes dos hádrons. Desta forma, os hádrons são constituídos de dois tipos de quarks: os quarks de valência, que possuem uma natureza não-perturbativa e definem cada tipo de hádron conhecido, e os quarks de mar, produzidos em pares quark-antiquark pela flutuação dos propagadores da interação forte.

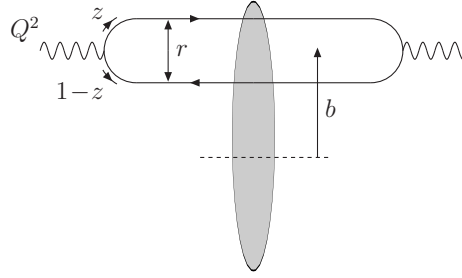
A partir dos resultados do espalhamento elétron-próton, verificou-se que incluindo apenas a contribuição de pártons carregados em (1.49), obtém-se um valor aproximado de 0.5 [10]. Este resultado indica que aproximadamente 50% do momentum total do hádron deve estar associado a pártons que não portam carga elétrica, não sendo diretamente detectados em experimentos de DIS. Estes pártons podem ser associados com as partículas mediadoras da interação forte, os glúons. Experimentalmente, as distribuições de quarks de valência anulam-se para  $x = 0$  e  $x = 1$ , enquanto que os quarks de mar tendem a popular a região de pequeno  $x$ . Os glúons, por sua vez, são originados em maior número na região de pequeno  $x$ , já que não possuem massa. Na região de  $x$  muito pequeno o que realmente domina nas distribuições de pártons é a componente gluônica.

### 1.2.3 DIS no referencial de dipolos de cor

Apresentaremos aqui a descrição de processos no espalhamento profundamente inelástico (DIS) no referencial de repouso do alvo, mais conhecida como referencial de dipolos de cor<sup>2</sup>. Neste referencial o espalhamento profundamente inelástico pode ser representado como se o fóton virtual (a partícula prova) emitido pelo elétron flutue em um par quark-antiquark, ou seja, em um dipolo, que posteriormente interage com o alvo, que pode ser um próton ou um núcleo por exemplo. Ou seja, no referencial de dipolos a quantidade que está provando o alvo não é mais o fóton virtual e sim o par  $q\bar{q}$ . O fóton pode ser expandido na base de

---

<sup>2</sup> Não devemos confundir o referencial de dipolos com o formalismo de dipolos, embora eles estejam intimamente relacionados. O primeiro, como o próprio nome diz, é a construção de um referencial conveniente para a descrição do DIS em altas energias. Já o segundo está relacionado com o limite de grande número de cores  $N_c$  e dá conta da evolução em energia de um dipolo, descrevendo os possíveis glúons emitidos durante a evolução como pares de quark-antiquark (dipolos).



**Fig. 1.4:** Representação de um processo em DIS segundo o formalismo de dipolos de cor.

quarks e glúons como uma superposição de estados de Fock em termos de suas flutuações hadrônicas [14, 15]

$$|\gamma^*\rangle = \sum |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle. \quad (1.51)$$

Para pequenas separações transversas do par quark-antiquark, ou seja, pequeno  $r$  (veja Figura 1.4), a configuração dominante consiste no par  $q\bar{q}$ . Para grandes separações, podem aparecer contribuições mais complexas, como por exemplo  $q\bar{q}g$ . Consideraremos, no entanto, somente a contribuição dominante  $q\bar{q}$ , para a qual o tempo de vida é muito importante, pois se considerarmos que este tempo é muito maior do que o tamanho do alvo, então podemos pensar que o par interage durante um curto intervalo de tempo com o alvo de tal forma que sua separação transversa é constante durante a interação, como vemos na Figura 1.4. Este tempo, também chamado de comprimento (ou tempo) de coerência  $l_c$ , pode ser estimado com o uso da relação de incerteza. Para isso, consideramos um fóton com virtualidade  $Q^2$ , energia  $q_0$  e momento grande  $|\mathbf{q}|$ , de forma que o comprimento de coerência é o tempo no qual o fóton virtual existe como uma flutuação  $q\bar{q}$  de massa  $M_{q\bar{q}}$ . Pelo princípio da incerteza, temos que este comprimento é inversamente proporcional à variação de energia entre o fóton e o par  $q\bar{q}$ , logo

$$l_c = \frac{1}{\Delta E} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{q}|^2 + M_{q\bar{q}}^2} - q_0} \approx \frac{2|\mathbf{q}|}{M_{q\bar{q}}^2 + Q^2} \approx \frac{|\mathbf{q}|}{Q^2}, \quad (1.52)$$

onde usamos  $M_{q\bar{q}} = Q^2$  na última passagem, por conservação de momentum. Utilizando a definição da variável de Bjorken  $x = Q^2/2p \cdot q$ , e notando que no referencial de repouso do alvo vale que  $p \cdot p = m_N |\mathbf{q}|$ , e então  $Q^2 = 2xm_N |\mathbf{q}|$ , resulta que

$$l_c = \frac{1}{2m_N x}, \quad (1.53)$$

onde  $m_N$  é a massa do alvo. A fim de ilustrar a validade do referencial de dipolos, para o DIS na região cinemática típica do colisor HERA, chegando a valores  $x \sim 10^{-5}$ , o comprimento de coerência é da ordem de 10 fm, o qual é maior que o raio de qualquer núcleo atômico. Segundo o referencial de dipolos, a seção de choque pode ser escrita como a convolução da probabilidade de o fóton decair em um dipolo com a seção de choque do espalhamento deste dipolo com o alvo, o que leva à relação

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y), \quad (1.54)$$

onde  $Y = \ln 1/x$  é a rapidez dos constituintes do alvo que interagem com o dipolo. A formulação acima é válida também no limite não perturbativo da QCD, uma vez que é determinada a partir da estrutura de espaço-tempo do processo. A quantidade  $\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)$  refere-se às componentes transversal e longitudinal da função de onda do fóton que descreve a formação do dipolo, onde  $z$  e  $1-z$  são as frações de energia do fóton portadas pelo quark e anti-quark, respectivamente. Para contribuições como  $q\bar{q}$ , as funções de onda são calculadas através da eletrodinâmica quântica (QED) perturbativa e são dadas por [14]

$$|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (1.55)$$

$$|\Psi_L(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (1.56)$$

onde  $N_c$  é o número de cores,  $\bar{Q}_q^2 = z(1-z)Q^2 + m_q^2$ , com  $m_q^2$  como a massa do quark de sabor  $q$  e  $K_{0,1}$  são as Funções de McDonald de ordem zero e um, respectivamente. Na expressão (1.54), a quantidade  $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y)$  é a seção de choque de dipolo, a qual não pode ser calculada perturbativamente como acontece com a função de onda do fóton, sendo assim dependente de modelo. Posteriormente iremos comentar a respeito de um modelo desenvolvido no espaço de momentum para a seção de choque de dipolos, o qual servirá de base para a investigação dos efeitos de flutuações na evolução das amplitudes da QCD em altas energias.

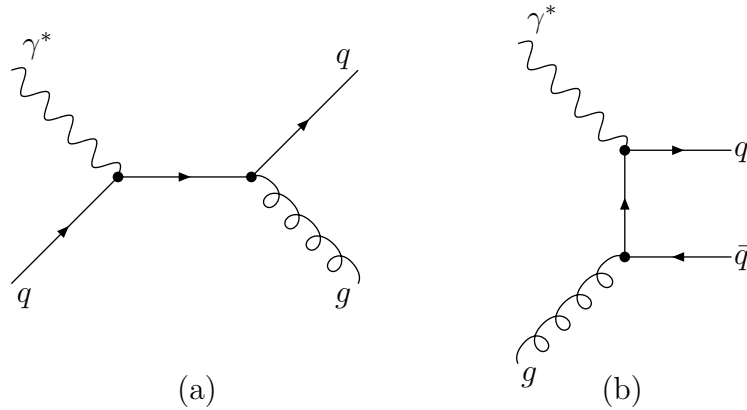
## 1.3 Equações de evolução lineares

### 1.3.1 DGLAP

O modelo de pártons descreve o espalhamento profundamente inelástico como a interação elástica de um fóton virtual com um dos pártons (quarks) constituintes dos hádrons, como mostramos na Fig.1.3. Por outro lado, a QCD prevê a existência de uma nuvem de glúons virtuais e pares quark-antiquark ao redor dos quarks de valência que compõem os hádrons, sendo que a virtualidade  $Q^2$  da partícula que prova o hádron determina a quantidade de pártons que serão observados no interior desta nuvem. Cada um destes pártons porta uma fração do momentum do hádron ao qual fazem parte, de forma que, quanto maior o valor de  $Q^2$ , maior é a probabilidade de encontrar um párton no interior no hádron com uma parcela menor do momentum total de tal hádron. Com isto, a função de estrutura do hádron experimentado deve apresentar dependência na virtualidade  $Q^2$ , violando assim o escalamento previsto pelo modelo de párton para estas quantidades (ver 1.44).

Este comportamento distinto ocorre porque o modelo de párton descreve o processo DIS desconsiderando a dinâmica do glúon como portador da força forte associada a carga de cor portada pelos quarks, como estabelece a QCD. Desta forma, ignora a possibilidade dos quarks emitirem glúons. Para introduzir tais efeitos no modelo de pártons, vamos considerar que o quark da Fig.1.3 possa emitir glúons (Fig.1.5a) e ainda que um glúon que compõe o hádron possa interagir com o quark (Fig.1.5b). Considerando a expansão perturbativa em termos das constantes de acoplamento da QED e da QCD,  $\alpha$  e  $\alpha_s$ , respectivamente, vemos o modelo de pártons como a contribuição de primeira ordem  $\mathcal{O}(\alpha)$  para a dinâmica no interior do hádron, enquanto que as correções citadas acima são de ordem  $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ .





**Fig. 1.5:** Contribuições de ordem  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  para o processo  $ep \rightarrow eX$  não contidas no modelo de pártons: (a) Emissão de glúons pelos quarks e (b) Glúons no estado inicial.

A inclusão dos diagramas da QCD no processo DIS determina que as funções de estrutura não sejam mais escalonadas pela variável de Bjorken, como ocorria no modelo de pártons. Contudo, a QCD consegue explicar como ocorre a quebra do escalamento das funções de estrutura do DIS e é isso que abordaremos a seguir. O modelo de pártons permite descrever a função de estrutura  $F_2$  em uma forma fatorizada

$$F_2(x) = \sum_{q\bar{q}} \int_x^1 d\varepsilon f_q(\varepsilon) \hat{F}_2^q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (1.57)$$

onde  $\hat{F}_2^q$  representa a função de estrutura elementar dos quarks, que é proporcional à seção de choque de fotoabsorção para o espalhamento  $\gamma^*q$ . No modelo de pártons tal processo é simplesmente  $\gamma^*q(\bar{q}) \rightarrow q(\bar{q})$  e está representado na Fig.1.6a, de forma que

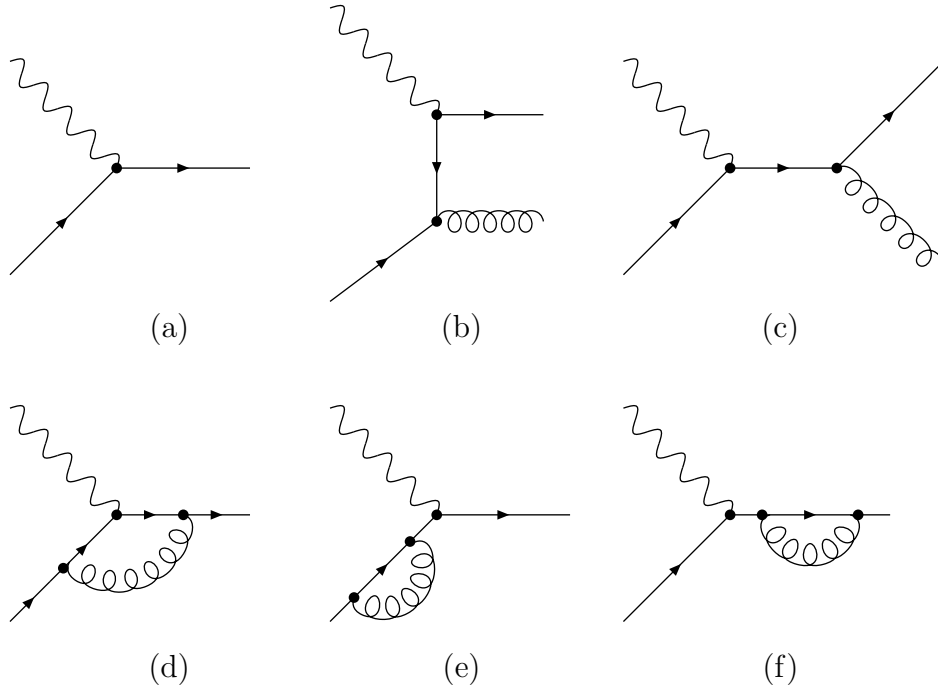
$$\hat{F}_2^q(z) = e_q^2 \delta(1-z). \quad (1.58)$$

Esta expressão, juntamente com (1.57) fornece a expressão bem conhecida do modelo de pártons,  $F_2 = x \sum_q e_q^2 [f_q(x) + f_{\bar{q}}(x)]$ .

Este seria o fim do assunto se os quarks (e antiquarks) fossem considerados livres no interior dos hádrons, mas isso não ocorre. A QCD prevê que os mesmos interagem por meio de emissão e absorção de glúons, de forma que outros diagramas, de ordem  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  devem ser adicionados à teoria para uma descrição correta de  $F_2$ . Estas correções ao processo  $\gamma^*q(\bar{q})$  são mostradas na Fig.1.6, onde identificamos os diagramas nas Figs.1.6b,c com a emissão de glúons reais nos canais  $t$  e  $s$ , respectivamente. Temos ainda as radiações de glúons virtuais, que no diagrama da Fig.1.6d representa a correção ao vértice  $\gamma^*q$ , enquanto que nas Figs.1.6e,f correspondem a correções de auto-energia. Estes diagramas contribuem para a função de estrutura  $\hat{F}_2^q(z)$  com um termo da forma

$$\hat{F}_2^q(z, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} e_q^2 z \left[ P(z) \ln\left(\frac{Q^2}{k_0^2}\right) + h(z) \right], \quad (1.59)$$

onde  $P(z)$  e  $h(z)$  são funções finitas e  $k_0$  é um corte no momentum transversal  $k_\perp$  do quark introduzido para regularizar divergências de pequeno momento nos diagramas de emissão



**Fig. 1.6:** Diagramas que contribuem ao processo  $\gamma^*q$  em ordem  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ .

de glúon real. Assumindo uma dependência em  $Q^2$  em  $\hat{F}_2^q$  na relação (1.57) e renomeando  $f_q(x)$  como a densidade de quarks nesta relação, podemos somar as contribuições de ordem  $\mathcal{O}(\alpha_s)$ , dada por (1.59), e  $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ , dada por (1.58). Desta forma, temos que a função de estrutura para o nucleon é dada por

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x \left\{ f_q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_q(\varepsilon) \right. \\ \left. \times \left[ P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{k_0^2}\right) + h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \dots \right\}, \quad (1.60)$$

onde os pontos referem-se à contribuições de ordens mais altas em  $\alpha_s$ . Introduzindo a escala de fatorização  $\mu^2$ , a fim de separar a física perturbativa (grandes escalas de momentum) da não-perturbativa (pequenas escalas de momentum), pode-se separar o logaritmo divergente em duas partes

$$\ln\left(\frac{Q^2}{k_0^2}\right) = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{\mu^2}{k_0^2}\right). \quad (1.61)$$

Separando em duas partes a função  $h(z)$

$$h(z) = \tilde{h}(z) + h'(z), \quad (1.62)$$

consegue-se absorver a divergência  $\ln(\mu^2/k_0^2)$  restante e  $h'(z)$  em uma redefinição da distribuição de quarks. Esta função define o esquema de fatorização mínima ( $\overline{\text{MS}}$ ) usado e assim escrevemos a função de estrutura  $F_2$  como

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x q(\varepsilon, \mu^2) C(z, Q^2, \mu^2), \quad (1.63)$$

onde definimos as funções de distribuição renormalizadas

$$q(x, \mu^2) = f_q(x) + \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_q(\varepsilon) \left[ P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln\left(\frac{\mu^2}{k_0^2}\right) + h'_q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \dots \quad (1.64)$$

e a função coeficiente, determinada após regularização dimensional,

$$C(z, Q^2, \mu^2) = \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left\{ P(z) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \left[ \tilde{h}(z) - \gamma_E + \ln(4\pi)P(z) \right] \right\}, \quad (1.65)$$

onde  $\gamma_E = 0.5772\dots$  é a constante de Euler-Mascheroni.

Para eliminarmos as singularidades colienares introduzimos em escala de fatorização  $\mu$ , que faz um papel similar à escala de renormalização. Assim não há uma predição absoluta para a distribuição renormalizada  $q(x, \mu^2)$ , mas uma previsão teórica de como esta distribuição varia com a escala. Assim, uma vez que  $F_2(x, Q^2)$  é um observável físico e não deve depender de nenhuma escala, diferenciando (1.63) em relação a  $\ln \mu^2$  obtém-se uma equação integro-diferencial governando a dependência em escala das distribuições de quarks

$$\frac{\partial q(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) q(y, \mu^2). \quad (1.66)$$

Esta é a chamada equação DGLAP, derivada independentemente por Dokshitzer [18], Gribov, Lipatov [20], Altarelli e Parisi [19], que em ordem dominante, *i.e.*, em ordem  $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$  em relação às funções de desdobramento  $P(z)$  e em ordem  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  para as funções coeficientes, efetivamente ressona sobre as contribuições do tipo  $(\alpha_s \ln Q^2)^n$ . Interpretamos a função de desdobramento  $P(z)$  como a probabilidade de um quark emitir outro quark com fração de momentum  $x$  do quark “pai”. Esta pode ser expandida em série de potências de  $\alpha_s$

$$P(x) = \sum_n \alpha_s^n P^n(x). \quad (1.67)$$

Tudo que fizemos até então refere-se a quarks e antiquarks somente. Levando em conta a contribuição dos glúons, a função de estrutura toma a forma

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 x \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left[ q(\varepsilon, \mu^2) C^q\left(\frac{x}{\varepsilon}, Q^2, \mu^2\right) + g(\varepsilon, \mu^2) C^g\left(\frac{x}{\varepsilon}, Q^2, \mu^2\right) \right]. \quad (1.68)$$

A função coeficiente referente aos glúons,  $C^g$ , provém do diagrama de fusão fóton-glúon, representado na Fig.1.5b e diz respeito a contribuição de glúons no estado inicial.

A definição da distribuição de quarks com dependência em escala é dada agora por

$$q(x, Q^2) = f_q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_q(\varepsilon) \left[ P_{qq}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln\left(\frac{\mu^2}{k_0^2}\right) + h'_q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \dots \quad (1.69)$$

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} f_g(\varepsilon) \left[ P_{qg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ln\left(\frac{\mu^2}{k_0^2}\right) + h'_g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \dots$$

As distribuições partônicas podem ser expressas em termos da natureza do pártons. Assim definimos as distribuições de quarks não-singlete (NS), referente aos quarks de valência,

e singlete (S), em relação aos quarks de mar, além da distribuição de glúons  $g(x, Q^2)$ , tal que

$$q^{NS}(x, Q^2) = q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2), \quad (1.70)$$

$$q^S(x, Q^2) = \sum_i [q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2)]. \quad (1.71)$$

Utilizando a variável  $t = \ln(Q^2/\mu^2)$ , as equações DGLAP se tornam

$$\frac{\partial q^{NS}(x, t)}{\partial t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) q^{NS}(y, t), \quad (1.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} q^S(x, t) \\ g(x, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) & 2n_f P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right) \\ P_{gq} \left( \frac{x}{y} \right) & P_{gg} \left( \frac{x}{y} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^S(y, t) \\ g(y, t) \end{pmatrix}, \quad (1.73)$$

onde  $n_f$  designa o número de sabores dos quarks levados em conta ( $u, d, \dots$ ). em ordem dominante, as funções de desdobramento são dadas por

$$P_{qq}^0(x) = C_F \left[ \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right] \quad (1.74)$$

$$P_{qg}^0(x) = \frac{1}{2} [x^2 + (1-x)^2] \quad (1.75)$$

$$P_{gq}^0(x) = C_F \left[ \frac{1+(1-x)^2}{x} \right] \quad (1.76)$$

$$P_{gg}^0(x) = 2C_A \left[ \frac{x}{(1-x)_+} + \frac{1-x}{x} + x(1-x) \right] + \frac{11C_A - 2n_f}{6} \delta(1-x) \quad (1.77)$$

onde  $C_F$  e  $C_A$  são relacionadas ao número de cores  $N_c$  pelas relações  $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$  e  $C_A = N_c$ , e a prescrição

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \quad (1.78)$$

é usada na regularização da divergência para  $x = 1$ .

Assim, o formalismo DGLAP descreve a evolução em  $Q^2$  das funções de distribuição partônica considerando que a interação partônica ocorre por meio de uma cascata partônica, com um forte ordenamento nos momenta transversos dos pártons emitidos no interior da cascata. Devido a este ordenamento, as equações DGLAP são válidas na seguinte região cinemática:

$$\alpha_s \ln Q^2 \approx 1, \quad \alpha_s \ll 1 \quad \text{e} \quad \ln \left( \frac{1}{x} \right) \ll \ln \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right), \quad (1.79)$$

ou seja, elas são válidas na região de valores de  $Q^2$  não muito baixos ( $Q^2 \gtrsim 1 \text{ GeV}^2$ , onde a QCD perturbativa é aplicável) e também numa região de  $x$  não muito pequena ( $x \gtrsim 0.001$ ).

### 1.3.2 BFKL

O formalismo associado à dinâmica DGLAP não permite fazer nenhuma predição sobre a evolução das distribuições partônicas na variável de Bjorken  $x$ , que entra apenas nas condições iniciais destas distribuições. Na evolução DGLAP, contribuições em  $1/x$ , dominantes para pequeno  $x$ , são consideradas no limite de duplo logaritmo dominante (DLLA), a qual soma termos da ordem de  $[\alpha_s \ln(1/x) \ln Q^2]^n$  com forte ordenamento na variáveis  $x$  e  $\mathbf{k}$  e faz com que as distribuições cresçam rapidamente quando  $x \rightarrow 0$ . Os termos dependentes de  $1/x$  aparecem sempre acompanhados de  $\ln Q^2$ , de forma que tal descrição é válida somente para grandes valores de  $x$  e  $Q^2$ .

A análise da região cinemática de pequeno  $x$  e valores moderados de  $Q^2$  implica somar diagramas que contribuam com termos da ordem  $[\alpha_s \ln(1/x)]^n$ , com  $\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1$  e  $\alpha_s \ln(1/x) \approx 1$ . Logo, devemos considerar termos dominantes em  $\ln(1/x)$ , com a dependência completa em  $Q^2$  mantida, significando que o forte ordenamento nos momenta transversos que aparece na dinâmica DGLAP deve ser atenuado e uma integração sobre todo o espaço de fase dos momenta transversos deve ser incluída. Isto implica em que nesta região cinemática as equações de evolução DGLAP não são mais válidas.

Visando descrever os processos em altas energias (pequeno  $x$ ), nos limites cinemáticos descritos acima, Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov [21–24] propuseram, na década de 70, uma equação para a evolução na variável de Bjorken  $x$ . Como o espaço de fase não está mais restrito ao ordenamento nos momenta transversos (agora os momenta longitudinais se tornam fortemente ordenados), a equação BFKL deve ser escrita em termos da função de glúons não-integrada  $\phi(x, \mathbf{k}^2)$ , que está relacionada à distribuição de glúons usual por

$$xg(x, Q^2) = \int_0^{Q^2} d\mathbf{k}^2 \frac{\phi(x, \mathbf{k}^2)}{\mathbf{k}^2}, \quad (1.80)$$

onde  $\phi(x, \mathbf{k}^2)$  fornece a probabilidade de encontrar um párton (glúon) com fração de momento  $x$  e momentum transversos  $\mathbf{k}$ .

A forma diferencial da equação BFKL é dada, em ordem dominante (LO), por

$$\frac{\partial \phi(x, \mathbf{k}^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \mathbf{k}^2 \int_0^\infty \frac{d\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'} \left\{ \frac{\phi(x, \mathbf{k}'^2) - \phi(x, \mathbf{k}^2)}{|\mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}^2|} + \frac{\phi(x, \mathbf{k}^2)}{\sqrt{4\mathbf{k}'^4 - \mathbf{k}^4}} \right\}. \quad (1.81)$$

A condição inicial para esta equação deve ser tomada para um valor suficientemente pequeno de  $x_0$ , tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\alpha_s \ll 1, \quad \alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1, \quad \alpha_s \ln(1/x) \approx 1, \quad (1.82)$$

de forma que a equação BFKL é apropriada para descrição de processos no limite de altas energias, já que descreve o limite  $x \rightarrow 0$ , onde a distribuição de glúons domina a dinâmica. Neste limite, a equação BFKL pode ser representada por um diagrama escada efetivo, com os momenta longitudinais fortemente ordenados, e sem ordenamento nos momenta transversos, ou seja,

$$x \ll x_{i+1} \ll \cdots \ll x_1 \ll 1, \quad (1.83)$$

$$Q^2 \approx \mathbf{k}_{i+1}^2 \ll \cdots \ll \mathbf{k}_1^2 \ll Q_0^2. \quad (1.84)$$

Visando obter uma solução analítica para a equação BFKL, toma-se a transformada de Mellin de  $\phi(x, \mathbf{k}^2)$  em relação a  $\mathbf{k}^2$ ,

$$\phi(x, \gamma) = \int_0^1 d\left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2}\right) \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2}\right)^{-\gamma-1} \phi(x, \mathbf{k}^2), \quad (1.85)$$

onde introduz-se uma escala  $\mathbf{k}_0^2$  no momentum transverso por razões dimensionais. A transformada inversa fornece

$$\phi(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\gamma \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2}\right)^\gamma \phi(x, \gamma). \quad (1.86)$$

Em termos de  $\phi(x, \gamma)$  a equação BFKL tem a forma

$$\frac{\partial \phi(x, \gamma)}{\partial \ln(1/x)} = \bar{\alpha} \chi(\gamma) \phi(x, \gamma), \quad (1.87)$$

onde usamos  $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c / \pi$  e

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma) \quad (1.88)$$

é o chamado núcleo da equação BFKL, o qual está definido em termos das funções digamma  $\psi(\gamma) = \Gamma'(\gamma)/\Gamma(\gamma)$ .

A solução de (1.87) é

$$\phi(x, \gamma) = \phi(x_0, \gamma) \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\chi(\gamma)}, \quad (1.89)$$

a qual, quando inserida na transformada inversa de Mellin (1.86), fornece

$$\phi(x, \mathbf{k}^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\gamma \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2}\right)^\gamma \phi(x_0, \gamma) \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\chi(\gamma)}. \quad (1.90)$$

Após realizar a integração em  $\gamma$ , temos como solução

$$\phi(x, \mathbf{k}^2) \sim \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\lambda} \left[ \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2 \ln(x_0/x)} \right]^{1/2} \exp \left[ -\frac{\ln^2(\mathbf{k}/\tilde{\mathbf{k}}^2)}{2\lambda' \ln(x_0/x)} \right], \quad (1.91)$$

onde  $\lambda = 4\bar{\alpha} \ln 2$  e  $\lambda' = 28\bar{\alpha}\zeta(3)$ , com  $\zeta$  sendo a função zeta de Riemann. O termo que domina esta expressão é  $\phi(x, \mathbf{k}^2) \sim x^{-\lambda}$ , com  $\lambda \approx 0.5$  para  $\alpha_s = 0.2$ . Este comportamento é característico na dinâmica BFKL e representa um crescimento na distribuição de glúons em altas energias, correspondendo a um rápido crescimento na seção de choque  $\sigma^{\gamma^*N}$ . No próximo capítulo veremos equações de evolução desenvolvidas a fim de evitar esse crescimento, incluindo assim efeitos de unitariedade à dinâmica BFKL.

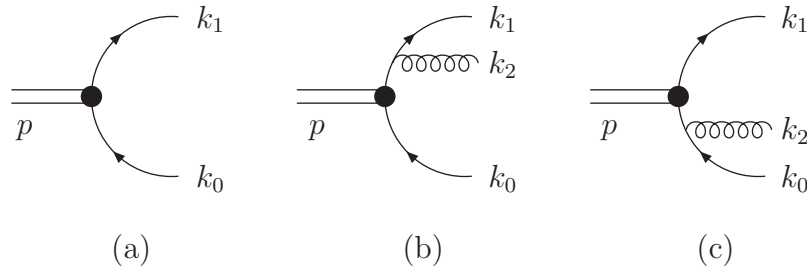
### 1.3.3 Dinâmica BFKL no formalismo de dipolos de cor

A dinâmica BFKL pode ser escrita de uma forma bastante interessante com o uso do formalismo de dipolos de cor. Aqui, vamos seguir o método usado por Mueller em [30], que considera o espalhamento onium-onium, onde um onium representa um estado ligado quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ) pesado mais os glúons que estes podem emitir após a evolução em energia. Estes onia são supostos pesados o suficiente para que  $\alpha_s(R^2) \ll 1$ , onde  $R$  é o raio do onium. Esta análise tem a vantagem de eliminar as contribuições não perturbativas relevantes ao processo.

A idéia essencial é que a emissão dos glúons — chamados macios, pois devem ter energia menor do que o par que os gera — pelo dipolo inicial cresce no decorrer da evolução em rapidez, dando origem à cascata partônica característica da dinâmica BFKL. Todo este processo é incorporado na evolução da função de onda do estado inicial formado pelo par  $q\bar{q}$  mais os possíveis glúons macios. Consideremos então a função de onda  $\Psi^{(0)}(k_1)$  do estado inicial  $q\bar{q}$ , ilustrada na Fig.1.7a, onde  $k_1$  e  $k_0$  são os momenta do quark e do antiquark, respectivamente e o momentum do onium  $q\bar{q}$  é  $p = k_0 + k_1$ . Os spins dos quarks são ignorados, pois estes são irrelevantes quando os glúons são macios. Usando variáveis do cone de luz, podemos identificar os momenta  $k_i$ , com

$$k_i = x_i p + \frac{\mathbf{k}_i^2}{x_i} n + k_{i\perp}, \quad \epsilon_i = \frac{\mathbf{k}_i \cdot \epsilon_i}{x_i} n + \epsilon_{i\perp}, \quad (1.92)$$

onde usamos as condições de camada de massa e de transversalidade. Nesta expressão,  $p = (P, 0, 0, P)$ ,  $n = (1/2P, 0, 0, -1/2P)$  e  $k_\perp \equiv \mathbf{k} = (0, k_x, k_y, 0)$ , de forma que a massa do onium se torna desprezível quando  $P$  é muito grande.



**Fig. 1.7:** (a) Dipolo no estado inicial; (b) emissão de um glúon macio pelo quark e (c) pelo antiquark.

A função de onda  $\Psi^{(1)}(k_1, k_2)$  para o estado  $q\bar{q}g$ , computada pelos diagramas das Figs.1.7b,c com uso de acoplamentos eikonais, é dada por

$$\Psi^{(1)}(k_1, k_2) = -ig_s t^A \left[ \Psi^{(0)}(k_1 + k_2) \frac{k_1 \cdot \epsilon_1}{k_1 \cdot k_2} - \Psi^{(0)}(k_1) \frac{k_0 \cdot \epsilon_1}{k_0 \cdot k_2} \right], \quad (1.93)$$

onde  $A$  é o índice de cor e o vetor de polarização do glúon é, de acordo com 1.92, dado por

$$\epsilon_2 = \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \epsilon_2}{x_2} n + \epsilon_2. \quad (1.94)$$

Contudo, a emissão do glúon macio das Figs.1.7b,c implica em  $x_2 \ll x_1, (1 - x_1)$ , de forma que neste limite

$$k_1 \cdot \epsilon_2 \simeq \frac{x_1}{x_2} (\epsilon_2 \cdot \mathbf{k}_2), \quad k_1 \cdot k_2 \simeq \frac{x_1 \mathbf{k}_2^2}{2x_2}. \quad (1.95)$$

Desta forma, a função de onda para o estado  $q\bar{q}g$  se torna

$$\Psi^{(1)}(x_1, \mathbf{k}_1, x_2 \mathbf{k}_2) = -2ig_s t^A [\Psi^{(0)}(x_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) - \Psi^{(0)}(x_1, \mathbf{k}_1)] \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \epsilon_2}{\mathbf{k}_2^2}. \quad (1.96)$$

Para simplificar este tipo de equação faz-se a transformada de Fourier do espaço de momenta transverso  $\mathbf{k}_i$  para o espaço de coordenadas transversas (parâmetros de impacto)  $\mathbf{b}_i$ :

$$\Psi^{(n-1)}(x_1, \mathbf{b}_1 \dots x_n, \mathbf{b}_n) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^2 \mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{b}_i} \Psi^{(n-1)}(x_1, \mathbf{k}_1 \dots x_n, \mathbf{k}_n). \quad (1.97)$$

Com isto, temos que

$$\Psi^{(1)}(x_1, \mathbf{b}_1, x_2, \mathbf{b}_2) = \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{b}_2)} \Psi^{(1)}(x_1, \mathbf{k}_1, x_2, \mathbf{k}_2). \quad (1.98)$$

Inserindo (1.96) em (1.98) e usando a relação

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}} \frac{k_i}{\mathbf{k}^2} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{b_i}{\mathbf{b}^2} \quad (1.99)$$

resulta que

$$\Psi^{(1)}(x_1 \mathbf{b}_1, x_2 \mathbf{b}_2) = \frac{g_s t^A}{\pi} \left( \frac{\mathbf{b}_{21} \cdot \epsilon_2}{\mathbf{b}_{21}^2} - \frac{\mathbf{b}_{20} \cdot \epsilon_2}{\mathbf{b}_{20}^2} \right) \Psi^{(0)}(x_1, \mathbf{b}_1), \quad (1.100)$$

onde  $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j$ , com  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ . Ao tomarmos o módulo quadrado e somando sobre cores e polarizações obtemos

$$|\Psi^{(1)}|^2 = 4C_F \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} |\Psi^{(0)}|^2, \quad (1.101)$$

onde usamos o fato de que

$$\frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} = \frac{1}{\mathbf{b}_{21}^2} + \frac{1}{\mathbf{b}_{20}^2} - 2 \frac{\mathbf{b}_{21} \cdot \mathbf{b}_{20}}{\mathbf{b}_{21}^2 \mathbf{b}_{20}^2}. \quad (1.102)$$

Os dois primeiros termos à direita desta expressão correspondem aos diagramas (a) e (b) da Fig.1.8, enquanto que o termo cruzado a direita de (1.102) corresponde aos diagramas de interferência (c) e (d) ilustrados na Fig1.8. A expressão (1.102) pode ser representada simbolicamente pelo diagrama a direita da Fig.1.9, o qual não é um diagrama de Feynman, mas simplesmente uma representação do fato que o glúon é emitido coerentemente pelo quark ou antiquark.

O próximo passo na evolução em energia é obtido considerando a emissão de dois glúons pelo par  $q\bar{q}$ . Para construir a função de onda do onium, assumimos um forte ordenamento nas frações de momentum dos seus constituintes, tal que

$$x_3 \ll x_2 \ll x_1, (1 - x_1). \quad (1.103)$$



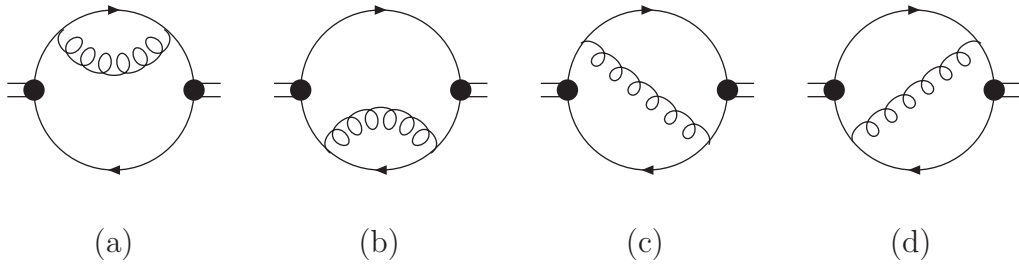


Fig. 1.8: Diagramas que contribuem para  $|\Psi^{(1)}|^2$ .

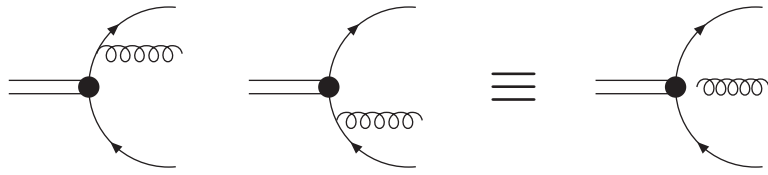


Fig. 1.9: Representação da emissão de um glúon pelo dipolo.

Esta é a configuração relevante pois dá origem ao maior número de fatores de  $\ln x$  na distribuição inclusiva de glúons. A emissão do segundo glúon pode ocorrer de diversas formas nos diagramas da Fig1.8: pelo quark, pelo antiquark, pelo primeiro glúon, antes ou depois da emissão deste glúon, etc. Nesta ordem o cálculo ainda é possível, mas em ordens mais altas — mais emissões de glúons — este se torna impossível. A fim de simplificar o desenvolvimento usa-se o limite de grande número de cores, introduzido por t’Hooft [25] como uma aproximação para auxiliar na descrição das interações fortes.

A idéia é considerar o limite  $N_c \rightarrow \infty$ , com  $\alpha_s \rightarrow 0$  tal que  $\alpha_s N_c$  é mantido fixo. O pequeno parâmetro usado para a expansão perturbativa é então  $1/N_c$ . Neste limite, os glúons são representados por pares quark-antiquark e t’Hooft demonstrou que uma considerável simplificação ocorre nos diagramas que contribuem: somente os diagramas planares sobrevivem à aproximação. Diagramas planares são aqueles onde é possível desenhar todos os glúons dentro do par  $q\bar{q}$  original sem que haja sobreposição destes, enquanto para os não planares ocorre o contrário. Estes últimos são suprimidos por potências de  $1/N_c$ .

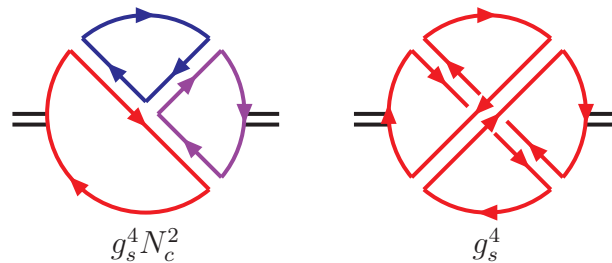


Fig. 1.10: Diagramas planares e não planares.

Na Fig.1.10 temos exemplos destes dois tipos de contribuições, onde os glúons (pares  $q\bar{q}$ ) são representados por linhas duplas indicando o fluxo de cor e anticor. Os dois diagramas são de mesma ordem no acoplamento  $g_s$ , mas o planar tem três laços de cor fechados enquanto que o não planar tem apenas um. Cada vértice dos onia introduz um fator de normalização

$1/\sqrt{N_c}$ , já que o estado deve ser um singleto de cor. Desta forma, o diagrama planar é de ordem  $\mathcal{O}(g_s^4 N_c^2)$ , enquanto que o não planar é  $\mathcal{O}(g_s^4)$ , sem dependência em  $N_c$ . No limite de grande número de cores exposto acima, o diagrama não planar é suprimido por um fator  $1/N_c^2$  e temos  $N_c^2$  glúons ao invés de  $N_c^2 - 1$ , de forma que  $C_A = 2C_F = N_c$ .

O uso da aproximação planar vista acima reduz consideravelmente o número de diagramas contribuindo aos processos durante a evolução do onium. Para o caso da emissão de 2 glúons em questão, esta aproximação implica na colocação do último glúon emitido entre o quark e o primeiro glúon (primeiro par  $q\bar{q}$ ) ou entre o glúon e o antiquark. Assim, este último glúon (dipolo) é emitido ou pelo dipolo 21, como ilustra a Fig.1.11a, ou pelo dipolo 20, como mostra a Fig.1.11b. Vejamos como estes diagramas contribuem para a função de onda do onium. Quando o glúon (dipolo) identificado por 3 é emitido pelo quark original 1 ou pelo antiquark de 2, este deve ser reabsorvido somente pelo quark original 1 ou pelo antiquark de 2. A contribuição deste processo — que está ilustrado na Fig.1.11a — para o módulo quadrado da função de onda do estado  $q\bar{q}gg$  é então

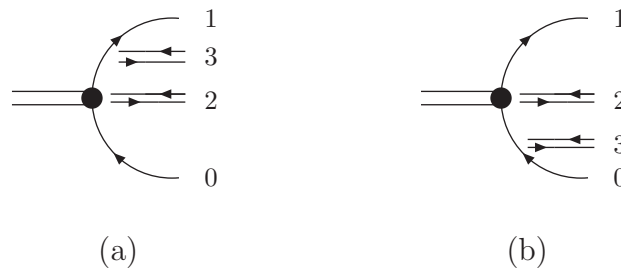
$$2 \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \frac{\mathbf{b}_{21}^2}{\mathbf{b}_{31}^2 \mathbf{b}_{32}^2}, \quad (1.104)$$

onde usamos  $C_F = N_c/2$ . De forma análoga, quando o glúon 3 é emitido pelo antiquark original 0 ou pelo quark presente em 2, este deve ser reabsorvido somente pelo antiquark original ou pelo quark em 2, de forma que a este processo (visto na figura Fig.1.11) contribuem com

$$2 \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \frac{\mathbf{b}_{20}^2}{\mathbf{b}_{30}^2 \mathbf{b}_{32}^2}. \quad (1.105)$$

Somando os dois termos, a função de onda do estado  $q\bar{q}gg$  toma a forma

$$|\Psi^{(2)}|^2 = 2 \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \left( \frac{\mathbf{b}_{21}^2}{\mathbf{b}_{31}^2 \mathbf{b}_{32}^2} - \frac{\mathbf{b}_{20}^2}{\mathbf{b}_{30}^2 \mathbf{b}_{32}^2} \right) |\Psi^{(1)}|^2. \quad (1.106)$$



**Fig. 1.11:** Emissão de dois glúons no limite de grande número de cores.

Contribuições de mais alta ordem são obtidas de maneira similar, pois qualquer glúon adicional é emitido por um dos dipolos correspondente à pares de pártons, os quais são adjacentes nos diagramas planares. Os diagramas não planares, desprezados no limite de grande  $N_c$ , correspondem a processo de interferência entre diferentes dipolos.

A probabilidade diferencial  $d\Pi(x_2, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{20})$  para a emissão de um glúon com fração de momentum longitudinal  $x_2$  e separação transversa  $\mathbf{b}_{20}$  pelo dipolo original (10) é definida

como

$$d\Pi(x_2, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{20}) = \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} \frac{dx_2}{x_2} d^2 \mathbf{b}_{20}. \quad (1.107)$$

Introduzimos ainda a densidade inclusiva de glúons  $f(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1)$  para a função de onda do onium com tamanho transverso  $\mathbf{b}_{10}$  e fração de momentum longitudinal  $x_1$ . Esta densidade é dita inclusiva pois devemos somar sobre todas as contribuições com qualquer número de glúons. A variação de  $f(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1)$  com  $x_1$  é determinada pela emissão de um glúon 2 que origina dois novos dipolos (20) e (21) em adição ao dipolo original (10). Usando (1.107) temos

$$df(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \frac{dx_1}{x_1} \int d^2 \mathbf{b}_{20} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} [f(x, \mathbf{b}_{21}^2, x_1) + f(x, \mathbf{b}_{20}^2, x_1) - f(x, \mathbf{b}_{10}^2, x_1)], \quad (1.108)$$

onde usamos  $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c / \pi$ . A invariância sob translações longitudinais implica que  $f$  deve ter somente dependência funcional em  $x/x_1$ . Assim

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad (1.109)$$

tal que

$$\frac{df(x, \mathbf{b}_{10}^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 \mathbf{b}_{20} \frac{\mathbf{b}_{10}^2}{\mathbf{b}_{20}^2 \mathbf{b}_{21}^2} [f(x, \mathbf{b}_{21}^2) + f(x, \mathbf{b}_{20}^2) - f(x, \mathbf{b}_{10}^2)]. \quad (1.110)$$

Esta é a equação BFKL para a distribuição de glúons não integrada, escrita no espaço de parâmetro de impacto, obtida por Mueller. Ela será útil no decorrer do trabalho para fim de comparações entre as dinâmicas BFKL da evolução dos dipolos e as dinâmicas não lineares para tal evolução.

## 1.4 Conclusões

Neste capítulo vimos alguns aspectos básicos da Cromodinâmica Quântica (QCD), teoria que descreve as interações fortes. Além disso foi apresentado o espalhamento profundamente inelástico (DIS) e a interpretação deste segundo o modelo de pártons. Também foi visto como o DIS pode ser interpretado segundo o formalismo de dipolos de cor, o qual será muito útil para entendermos a dinâmica da QCD em energias muito altas. Por fim, introduziu-se o formalismo de duas equações de evolução para a QCD em altas energias: as dinâmicas DGLAP e BFKL. A primeira delas evolui na virtualidade  $Q^2$ , não sendo muito indicada para a descrição de processos em energias muito elevadas, quando  $x \propto s^{-1}$ , sendo  $s$  a energia de centro de massa do processo. Para descrever a QCD nesta região de energia, foi proposta a equação BFKL como correta, visto que ela evolui em  $1/x \propto s$ . Entretanto a análise de suas soluções prevê um forte crescimento nas seções de choque totais, o que é um problema, já que estas devem ser limitadas para  $s \rightarrow \infty$ . No próximo capítulo veremos melhor a razão desta limitação, bem como introduziremos efeitos de saturação para corrigi-los, levando ao desenvolvimento das equações de evolução não lineares. Vimos ainda como a dinâmica BFKL pode ser vista no referencial de dipolos de cor, o que se mostra interessante para fins de comparação com as dinâmicas não lineares que serão apresentadas a seguir, visto que nos interessa principalmete a evolução não linear de dipolos de cor.

## Capítulo 2

# A Evolução e a Saturação Partônica

### 2.1 As correções de unitariedade

Como visto no capítulo anterior, a aproximação de logaritmo dominante usada na derivação da equação BFKL prevê que as amplitudes de espalhamento cresçam com o aumento da energia  $s$ , ou com o decréscimo de  $x$  — lembrando que em altas energias  $x \approx Q^2/s$ . Isto significa que a seção de choque, calculada com o uso do teorema ótico, também cresce segundo

$$\sigma_{\text{tot}} \sim s^\lambda, \quad (2.1)$$

com  $\lambda = 4\bar{\alpha} \ln 2$ . Este comportamento exige cuidados, pois, intuitivamente, espera-se que as seções de choque sejam limitadas quando  $s \rightarrow \infty$ , de forma que o limite de Froissart-Martin

$$\sigma_{\text{tot}} < A \ln^2 s \quad \text{para } s \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

onde  $A$  é uma constante, seja satisfeito. O comportamento das soluções da equação BFKL não satisfaz este limite, de tal forma que correções de unitariedade devem ser feitas para uma correta descrição dos processos em energias muito altas.

Começamos apresentando um argumento físico, devido originalmente a Feynman, que torna plausível o limite de Froissart-Martin. Vamos supor que a partícula alvo tenha uma distribuição de densidade que reflete o comportamento de curto alcance da força forte, dada por exemplo por

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/R), \quad (2.3)$$

onde  $r$  é a distância em relação ao centro do alvo e  $R$  é o tamanho deste. Toma-se como uma propriedade fundamental da interação forte que esta distribuição decresça mais rápido do que qualquer lei de potência para grandes distâncias. Se a probabilidade de interação entre o projétil e o alvo é limitada, quando  $s \rightarrow \infty$ , ela deve satisfazer

$$P(s, r) < P_0 \left( \frac{s}{s_0} \right)^N \exp\left(-\frac{r}{R}\right). \quad (2.4)$$

Logo, a interação deve ser desprezível para colisões com parâmetros de impacto

$$r \gg NR \ln(s/s_0), \quad (2.5)$$

implicando em que a seção de choque total para o processo deve satisfazer

$$\sigma_{\text{tot}} < \pi R^2 N^2 \ln^2(s/s_0). \quad (2.6)$$

Assim, vemos claramente que os cálculos feitos com base na aproximação de logaritmo dominante da QCD (BFKL) falham conforme a energia total  $s$  tende ao infinito. No referencial de centro de massa do processo de colisão, o aumento da seção de choque total com  $s$  é devido a proliferação da emissão de glúons macios durante a evolução. Na linguagem de dipolos introduzida no capítulo anterior é a proliferação de dipolos que produz este crescimento. Podemos imaginar como será a física que eventualmente existirá na evolução quando a densidade de dipolos (glúons) continuar a crescer. Em altas energias a densidade deverá ser grande o bastante para que mais de um par de dipolos no projétil sofra espalhamento com o alvo para cada dipolo “pai” do projétil, ou seja, existe a possibilidade de múltiplos espalhamentos. Como veremos, correções como esta devem levar à saturação da densidade de pártons (glúons ou dipolos) no alvo e assim ao controle do crescimento da seção de choque total, como demanda a unitariedade. No restante deste capítulo vamos apresentar as equações de evolução não lineares que introduzem efeitos de saturação às amplitudes de espalhamento.

## 2.2 As equações de evolução não lineares

Como vimos acima, as correções de unitariedade são imprescindíveis na descrição de processos para QCD de altas energias. Com vistas a incluir os chamados efeitos de saturação partônica na evolução em altas energias, muitos esforços foram despendidos ao longo das últimas décadas e como resultado surgiram diversas equações de evolução não lineares, onde os termos não lineares dão conta, justamente, das devidas correções de unitariedade. Não vamos descrever todos os trabalhos desenvolvidos neste sentido, mas apenas citar alguns e então partir para a descrição das equações de evolução que são realmente relevantes a este trabalho.

Um dos primeiros trabalhos que buscaram introduzir correções de unitariedade à evolução culminou no desenvolvimento da equação de evolução GLR, devida à Gribov, Levin e Ryskin [26], que considera efeitos de recombinação partônica na QCD perturbativa por meio da inclusão de diagramas não-escada, ou gráficos de multi-escada que também são conhecidos como diagramas “fan”. A evolução QCD padrão é representada então por uma cascata de decaimentos partônicos no nucleon. Outra equação que visa a unitarização é a obtida pelo formalismo desenvolvido por Ayala, Gay Ducati e Levin (AGL) [27, 28] com o uso da abordagem de Glauber [29] para a QCD perturbativa, considerando a interação dos pártons mais rápidos da escada com o alvo. Como resultado obtém-se uma equação de evolução não linear que ressoa a troca de múltiplos diagramas de escadas gluônicas, na aproximação de duplo logaritmo dominante (DLA).

A seguir mostraremos os principais aspectos de duas equações de evolução não lineares baseadas no formalismo de dipolos de cor: A equação de Balitsky e Kovchegov (BK) [31–35] e a hierarquia de Balitsky [33–35].

### 2.2.1 A equação de Balitsky e Kovchegov

O problema das correções de unitariedade da QCD foi abordado por Kovchegov [31, 32] como uma extensão da equação BFKL na representação de dipolos, com termos não lineares

que unitarizam a equação BFKL. Esta equação foi investigada também por Balitsky [33–35] com o uso da Expansão do Produto de Operadores (OPE) na QCD, obtendo uma hierarquia para a evolução de operadores de linhas de Wilson. Kovchegov partiu do espalhamento de um dipolo (onium  $q\bar{q}$ ) com um grande alvo (núcleo na derivação original) considerando que tal processo é descrito pela evolução da cascata partônica associada à multiplicação de dipolos na função de onda do dipolo gerador da cascata. Cada dipolo nesta cascata sofre múltiplos espalhamentos com os nucleons do alvo, implicando a ressonância das múltiplas trocas do tipo escada com vistas a obter a seção de choque da interação da par de dipolos com o alvo. Deste processo de reespalhamento dos dipolos resulta a unitarização do Pomeron BFKL na aproximação de logaritmo dominante  $LL(1/x)$ .

O espalhamento de um dipolo com o alvo é considerado no referencial de repouso do alvo e ocorre através da interação de uma cascata de glúons macios na função de onda do onium  $q\bar{q}$  com o alvo. A utilização do limite de grande número de cores  $N_c$ , vista anteriormente, é usada a fim de suprimir diagramas não planares do formalismo. Com isto, os glúons emitidos podem ser tratados como pares  $q\bar{q}$  e a função de onda do onium e sua evolução pode ser descrita com uso do formalismo de dipolos desenvolvido por Mueller [30] usando QCD perturbativa, considerando que cada dipolo da cascata interage independentemente com os constituintes do alvo e de forma que não haja correlações entre estes dipolos.

A equação de Balitsky-Kovchegov (BK), para a amplitude de espalhamento frontal do processo onium-alvo,  $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y)$ , é dada por [31, 32]

$$\begin{aligned}
 N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y) = & -\gamma(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0) \exp \left[ -\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \ln \left( \frac{x_{01}}{\rho} \right) Y \right] \\
 & + \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int_0^\infty dy \exp \left[ -\frac{4\alpha_s C_F}{\pi} \ln \left( \frac{x_{01}}{\rho} \right) (Y - y) \right] \int_\rho d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} \\
 & \times \left[ 2N \left( \mathbf{x}_{02}, \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{12}, y \right) - N \left( \mathbf{x}_{02}, \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{12}, y \right) N \left( \mathbf{x}_{12}, \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{02}, y \right) \right],
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

com  $\gamma(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0)$  estabelecendo o propagador de um dipolo de tamanho transversal  $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  e com parâmetro de impacto  $\mathbf{b}_0$  quando este atravessa o alvo (hádron). Em (2.7),  $Y = \ln(1/x)$  é variável rapidez,  $\rho$  é um corte para regularizar divergências infravermelhas e  $C_F = N_c/2$ , pois o limite de grande número de cores foi tomado.

Se considerarmos apenas o termo linear em  $N$ , a equação BK é reduzida à equação BFKL (pomeron BFKL), enquanto que o termo quadrático em  $N$  é responsável pelas correções de unitariedade na amplitude, de forma que o pomeron BFKL é unitarizado pela equação BK. No que segue devemos mostrar que a equação BK pode ser vista como uma aproximação de campo médio de uma hierarquia de equações, onde fica clara sua conexão com a dinâmica BFKL na representação de dipolos.

No capítulo 3 vamos apresentar um modelo para amplitude de espalhamento dipolo-próton que é baseado nas soluções assintóticas das equações BK. Estas soluções, obtidas por meio de uma analogia com processos de reação-difusão, foram originalmente desenvolvidas no espaço de momentum, como veremos adiante. Portanto, é importante mostrar aqui como é expressa a evolução da amplitude (2.7) neste espaço, ou seja, qual é a forma da equação BK

quando expressa no espaço de momentum. Para tanto devemos assumir independência no parâmetro de impacto  $\mathbf{b}$ , o que é feito considerando o alvo suficientemente grande tal que a amplitude de espalhamento frontal do dipolo original com o alvo,  $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y)$ , é uma função suave em relação ao parâmetro de impacto  $\mathbf{b}_0$  do fóton virtual que gera o dipolo. Isto é equivalente a supor que o tamanho transverso da função de onda do dipolo é muito menor que o tamanho do alvo, de forma que o parâmetro de impacto entre o fóton virtual e o alvo é menor do que o raio  $R$  deste último. Formalmente, assumimos  $x_\perp \ll R$ , onde  $x_\perp$  é o tamanho transverso típico da função de onda do dipolo, e ainda que  $b_0 < R$  —  $b_0$  é zero no centro do alvo. Com isso, podemos desprezar  $\mathbf{x}_{12}$  e  $\mathbf{x}_{02}$  em relação a  $\mathbf{b}_0$  no lado direito de (2.7), o que significa dizer que as variações em  $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y)$  quando  $\mathbf{b}_0$  é variado de uma quantidade  $\mathbf{x}_\perp$  são muito pequenas e desprezíveis. Desta forma, fazendo  $N(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0, Y) = N(\mathbf{x}_{01}, Y)$  temos que a derivada em relação a  $Y$  de (2.7) tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\mathbf{x}_{01}, Y)}{\partial Y} &= \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_\rho d^2 x_2 \left[ \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} - 2\pi \delta^{(2)}(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02}) \ln \left( \frac{x_{01}}{\rho} \right) \right] N(\mathbf{x}_{02}, Y) \\ &\quad - \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 x_2 \frac{x_{01}^2}{x_{02}^2 x_{12}^2} N(\mathbf{x}_{02}, Y) N(\mathbf{x}_{12}, Y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nesta expressão, a condição inicial é  $N(\mathbf{x}_{01}, 0) = -\gamma(\mathbf{x}_{01}, \mathbf{b}_0)$ , a única que ainda depende do parâmetro de impacto  $\mathbf{b}_0$ . Contudo,  $\gamma$  é uma função suave em relação a  $\mathbf{b}_0$ , de forma que a suposição fraca dependência de  $N$  em  $\mathbf{b}_0$  ainda é válida. Fisicamente isto implica em que antes da colisão, quando o fóton virtual desenvolve sua função de onda de dipolo, este não possui qualquer informação a respeito do alvo, já que a interação com este último se dá através do dipolo e portanto a informação sobre a espessura (tamanho) do alvo como uma função do parâmetro de impacto se dá através de  $\gamma$  quando o dipolo interage com o alvo.

A fim de transformar para o espaço de momentum, definimos as transformadas de Fourier

$$N(x_\perp) = x_\perp^2 \int \frac{d^2 k}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{N}(k, Y) = x_\perp^2 \int_0^\infty dk k J_0(kx_\perp) \tilde{N}(k, Y). \quad (2.9)$$

A transformada inversa é dada por

$$\tilde{N}(k, Y) = \int \frac{d^2 x_\perp}{2\pi x_\perp^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} N(x_\perp, Y) = \int_0^\infty \frac{dx_\perp}{x_\perp} J_0(kx_\perp) N(x_\perp). \quad (2.10)$$

Com isso, (2.8) se torna, no espaço de momentum [32],

$$\frac{\partial \tilde{N}(k, Y)}{\partial Y} = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \tilde{N}(k, Y) - \bar{\alpha} \tilde{N}^2(k, Y), \quad (2.11)$$

onde

$$\chi(\lambda) = 2\psi(1) - \psi(1 - \lambda) - \psi(\lambda) \quad (2.12)$$

é o autovalor do núcleo da equação BFKL, visto no capítulo anterior e interpretado como um operador diferencial, com  $\lambda \equiv -\partial_L = -\partial/\partial \ln k$ , agindo sobre  $\tilde{N}(k, Y)$ . Agora, vemos explicitamente que o primeiro termo no lado direito de (2.11) refere-se à evolução BFKL usual, enquanto que o termo quadrático corresponde à unitarização do crescimento do pomeron BFKL. Na apresentação do modelo para amplitude de espalhamento dipolo-próton, a ser vista no capítulo 3, a forma (2.11) da equação BK será muito útil.

### 2.2.2 A hierarquia de Balitsky

Como comentado na seção anterior, Balitsky deduziu uma equação semelhante àquela de Kovchegov usando a expansão do produto de operadores (OPE) da QCD. Vamos mostrar aqui uma forma intuitiva de visualizar a chamada hierarquia de Balitsky, e como ela se reduz à equação BK. Vamos partir da probabilidade de um dipolo emitir um glúon de pequeno  $x$

$$dP = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) d^2 z dY, \quad \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2}, \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  são as coordenadas transversas do quark, do antiquark e do glúon, respectivamente. Esta probabilidade é nula para  $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow 0$ , o que é esperado — pois um dipolo de tamanho nulo é não interagente, e se torna singular quando o glúon for emitido colinearmente ao quark ou ao anti-quark. Segundo o formalismo de dipolos, para grande  $N_c$  o glúon pode ser substituído por um par  $q\bar{q}$ , de forma que a emissão do glúon pode ser vista como o desdobramento do dipolo original  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  em dois novos dipolos:  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  e  $(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ , chamados dipolos filhos.

O que acontece é semelhante ao já mencionado na seção anterior em termos da cascata partônica, de forma que se o glúon emitido estiver presente na função de onda do dipolo no decorrer do espalhamento com o alvo, então o que espalha como este alvo é o sistema de dois dipolos. Caso o glúon não esteja presente na função de onda do projétil durante o espalhamento, ele pode ser visto como um termo “virtual” que diminui a probabilidade para que o par  $q\bar{q}$  original permaneça como um dipolo simples, compensando assim a probabilidade para o estado de dois dipolos. O processo todo pode ser descrito pela seguinte equação de evolução para a matriz  $S$  de espalhamento, derivada por Balitsky em [33–35]:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 z \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \left\{ - \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}, \quad (2.14)$$

onde  $\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$  descreve o espalhamento do sistema de dois dipolos com o alvo. A suposição feita por Kovchegov de que os dipolos da cascata partônica interagem independentemente com o alvo é vista agora como possível somente se o campo de cor do alvo for fixo, tal que o operador de espalhamento do sistema de dois dipolos é dado simplesmente pelo produto dos operadores dos dipolos individuais:  $S^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{z}, \mathbf{y}) \equiv S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ . Entretanto, geralmente existem correlações entre os campos de cor de diferentes configurações que devem ser consideradas — em particular no decorrer da evolução, quando a densidade do campo de cor no alvo deve aumentar. Desta forma, a média sobre a função de onda do alvo deve introduzir correlações entre o espalhamento do sistema de dois dipolos, tal que  $\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \neq \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y \langle S(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ . Logo, a equação (2.14) não é uma equação fechada, mas sim a primeira de uma hierarquia infinita de equações que acopla operadores de espalhamento expressos em termos de linhas de Wilson, de forma que a cada iteração — a cada nova equação, ou a cada passo na evolução — a estrutura de cor se torna mais complicada.

A identificação de (2.14) com as equações BK e BFKL na representação de dipolos se dá



mais facilmente quando a escrevemos em termos da amplitude de espalhamento  $T = 1 - S$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y &= \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 \mathbf{z} \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &\times \left\{ -\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

cujos termos contribuem com os diagramas expressos na Fig.2.1. Por simplicidade, nesta figura estão representados o espalhamento entre um dipolo elementar e o alvo na aproximação da troca de dois glúons, embora no regime de altas energias o número de glúons trocados pode ser arbitrário. O espalhamento do dipolo com o alvo começa com a troca de dois glúons, como visto na Fig.2.1a. Após um passo na evolução do projétil, *i.e.*, após a emissão de um glúon ou dipolo filho, surgem os diagramas das Figs.2.1b,c,d: (b) é o termo virtual — o dipolo original interage com o alvo antes de emitir o glúon, (c) mostra o espalhamento de um dos dipolos (existe um diagrama similar para o outro dipolo) e (d) mostra o espalhamento simultâneo dos dois dipolos filhos com o alvo. Na equação (2.15) o espalhamento múltiplo do sistema de dois dipolos com o alvo é descrito pelo último termo, que descreve o espalhamento simultâneo dos dipolos filhos com o alvo (Fig.2.1d).

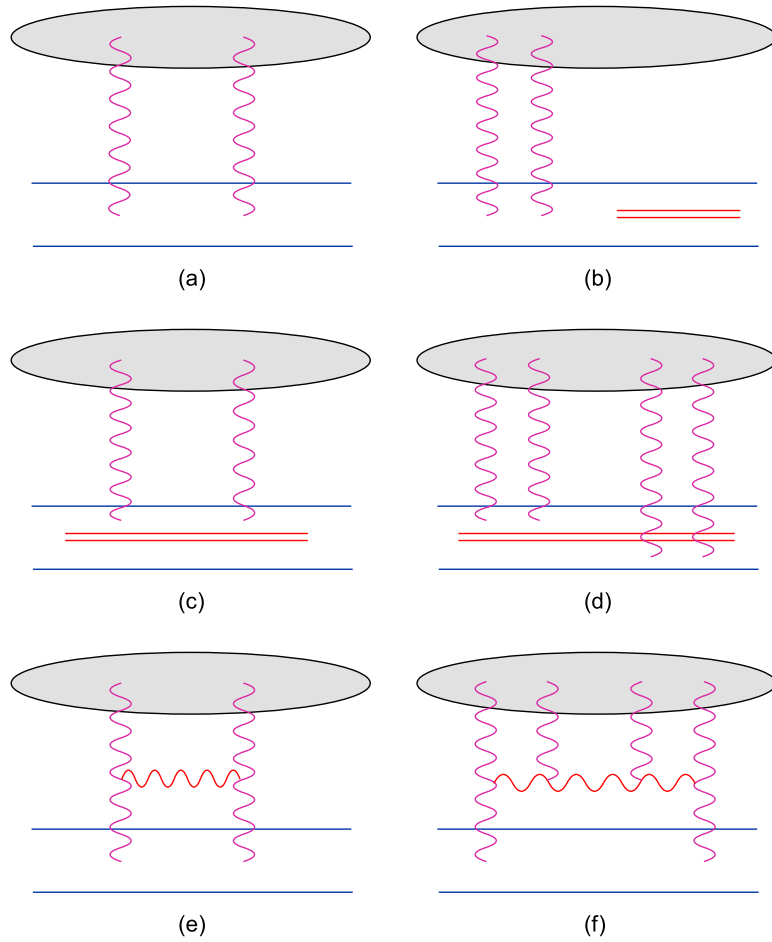
Podemos notar que embora a dedução das equações de Balitsky foram realizadas através da evolução do *projétil*, sua interpretação em termos da evolução do *alvo* também é possível. A evolução do alvo no regime de altas energias é descrita pelo formalismo do condensado de vidro de cor (CGC), usando as equações de evolução JIMWLK [36–41], as quais são baseadas nas equações do grupo de renormalização (RGE). Essa correspondência entre a evolução do alvo ou do projétil é possível pois a estrutura do Hamiltoniano das equações do grupo de renormalização permitem uma interpretação dual — como as representações de Schrödinger e Heisenberg na mecânica quântica, o que permite que os efeitos não lineares na evolução possam ser interpretados ou como múltiplos espalhamentos ou como saturação gluônica, dependendo do ponto de vista.

Assim, os diagramas que descrevem um passo na evolução do projétil, mostrados nas Figs.2.1b,c,d, correspondem, na evolução do alvo, às Figs.2.1e,f, sendo que a primeira, Fig.2.1e, corresponde um passo na evolução BFKL do alvo, que fornece a amplitude de espalhamento em mais baixa ordem. Em termos do projétil, ela corresponde aos diagramas das Figs.2.1b,c. O segundo diagrama, Fig.2.1f, representa a fusão de quatro glúons em dois e corresponde ao espalhamento duplo da Fig.2.1d. Assim fica claro que os efeitos de saturação gluônica no alvo podem ser vistos como efeitos de espalhamentos múltiplos na função de onda do projétil.

A equação BFKL surge de (2.15) como o limite de espalhamento fraco da seguinte forma: Para energias suficientemente pequenas, tal que o alvo é diluto, a amplitude de espalhamento é pequena,  $T \ll 1$ , de forma que o termo descrevendo o espalhamento simultâneo dos dois dipolos é menor ainda,  $\langle TT \rangle \ll \langle T \rangle \ll 1$ . Logo, pode-se desprezar este termo e como resultado obtém-se uma equação linear para a amplitude de espalhamento

$$\frac{\partial}{\partial Y} \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 \mathbf{z} \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \times \left\{ -\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}, \quad (2.16)$$

reconhecida como a representação de dipolos da equação BFKL mostrada no capítulo 1.



**Fig. 2.1:** Diagramas para a evolução da amplitude de dipolos: (a) contribuição em nível de árvore para o espalhamento com o dipolo “pai”; (b) correção virtual —  $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ ; (c) espalhamento de um dos dipolos “filhos”,  $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y$  ou  $\langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ ; (d) espalhamento simultâneo de ambos os dipolos filhos,  $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ ; (e,f) um passo na evolução do alvo.

A equação BK também pode ser obtida como uma aproximação de (2.15). Assumindo a aproximação de campo médio para o campo de cor do alvo, podemos escrever a propriedade de fatorização

$$\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z})T(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \rangle_Y \approx \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y \langle T(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \rangle_Y, \quad (2.17)$$

de forma que uma equação não linear fechada — as equações de Balitsky formam uma hierarquia de equações acopladas — é obtida

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y &= \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &\times \left\{ -\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y + \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle_Y \langle T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta equação é a equação de Balitsky–Kovchegov, que preserva o vínculo de unitariedade

$T \leq 1$  no decorrer da evolução e prevê um limite superior  $T = 1$  a ser alcançado no limite de energias muito altas. No capítulo 3 mostraremos como são as soluções assintóticas da amplitude de espalhamento descrita pela equação BK, bem como um modelo para tal amplitude.

Como veremos adiante, esta aproximação de campo médio permite uma boa descrição da física de altas energias, mas descarta a possibilidade de flutuações no número de glúons, que introduzem consideráveis mudanças na QCD de altas energias.

## 2.3 Conclusões

Apresentamos neste capítulo como as correções de unitariedade são importantes na descrição de processos para a QCD em energias muito altas, ou seja, como efeitos de saturação partônica devem ser introduzidos aos modelos a fim de satisfazer o limite de Froissart-Martin para a seção de choque total nestas energias. Visto isso, introduzimos o conceito de equações de evolução não lineares, onde os efeitos de saturação são incluídos nas não linearidades de forma que possam ser usadas para sistemas em evolução nas regiões de altas densidades partônicas. Algumas equações importantes foram citadas, mas nos concentramos em descrever apenas duas destas, ambas desenvolvidas no formalismo de dipolos de cor apresentado no capítulo 1: a equação de Balitsky–Kovchegov (BK) e um sistema de equações acopladas para a evolução em altas energias, conhecida como hierarquia de Balitsky. A primeira delas, a qual pode ser vista como uma versão de campo médio da segunda, será muito importante no próximo capítulo, quando apresentaremos um modelo fenomenológico para a amplitude de espalhamento frontal de dipolos, o qual baseia-se nas soluções assintóticas de equação BK. A segunda delas, por ignorar efeitos de flutuações no número de partículas, implica em que a equação BK ainda não inclui tais efeitos, que quando feito dá origem às chamadas equações de laços de pomerons, a ser vista no capítulo 4 e que é um dos objetivos principais de estudo deste trabalho.

## Capítulo 3

# Amplitudes de espalhamento em altas energias

Neste capítulo apresentaremos um modelo desenvolvido recentemente para a amplitude de espalhamento de um dipolo por um próton no espaço de momentum, o qual chamaremos de modelo AGBS [42]. Tal modelo é baseado em QCD perturbativa e foi desenvolvido usando o conhecimento das soluções assintóticas da equação de evolução de Balitsky-Kovchegov (BK) [31–35]. O modelo tem excelente acordo com os dados para a função de estrutura do próton, obtidos em espalhamentos elétron–próton no acelerador HERA. Primeiramente mostraremos como obter a função de estrutura do próton no espaço de momentum, já que a modelagem ocorre neste espaço. Logo após descreveremos a obtenção das soluções assintóticas da equação BK com ajuda de ferramentas da física estatística e por fim apresentaremos o modelo AGBS e alguns de seus resultados.

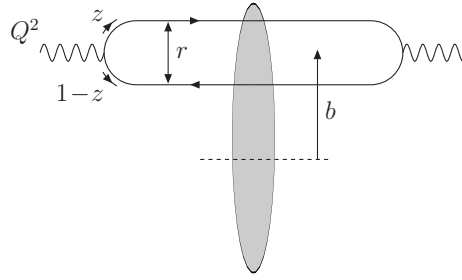
### 3.1 A função de estrutura do próton no referencial de dipolos

Vamos discutir adiante um modelo para a seção de choque de dipolos, o qual foi desenvolvido no espaço de momentum usando o conhecimento das soluções assintóticas da equação de evolução BK, e então usá-lo para descrever a função de estrutura do próton. Antes disso, temos que expressar as quantidades relevantes no espaço de momentum. Para isso consideremos o referencial de dipolos descrito no capítulo 1 e mostrado novamente na figura 3.1, onde o fóton virtual pode se desdobrar num par  $q\bar{q}$  que então sofre o espalhamento com o alvo. O quark possui fração de momentum longitudinal  $z$  do fóton e o antiquark  $1 - z$  e a separação transversa do par é dada por  $r$ .

A seção de choque assume então a forma fatorizada

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y), \quad (3.1)$$

com  $|\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2$  sendo a densidade de probabilidade de emissão de um par  $q\bar{q}$ , pelo fóton virtual, com fração de momentum  $z$  do fóton e separação transversa  $r$ . É esta quantidade, dada por (1.55), que devemos transformar para o espaço de momentum a fim de descrever a função de estrutura do próton neste espaço.



**Fig. 3.1:** Representação de um processo em DIS no referencial de dipolos de cor.

Se consideramos o próton <sup>1</sup> como um disco homogêneo de raio  $R_p$ , ou seja, se considerarmos o parâmetro de impacto fixo, podemos relacionar a seção de choque de dipolo com a amplitude de espalhamento para frente  $T(r, Y)$  através da relação

$$\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 T(r, Y). \quad (3.2)$$

A função de estrutura do próton  $F_2$  é obtida a partir da seção de choque  $\gamma^*p$  e dada pela expressão

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \left[ \sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2) \right]. \quad (3.3)$$

Para expressarmos estas quantidades no espaço de momentum, usamos a transformada de Fourier

$$T(k, Y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2r}{r^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y), \quad (3.4)$$

e como pode ser visto em detalhes no apêndice A, obtemos

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y), \quad (3.5)$$

onde a função de onda do fóton é agora expressa no espaço de momentum

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 = & \sum_q \left( \frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \\ & \times \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \left[ \frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[ \frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{4\bar{Q}_q^4 + 2\bar{Q}_q^2 k^2 + k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O modelo a ser apresentado posteriormente para a amplitude de espalhamento no espaço de momentum deverá ser incluído nesta expressão para  $F_2$  através de (3.2) para sua correta descrição.

<sup>1</sup> Consideraremos a partir daqui o alvo como sendo o próton.

## 3.2 O escalamento geométrico e a física estatística

O escalamento geométrico [43] é uma propriedade empírica verificada pelos dados das seções de choque do espalhamento profundamente inelástico (DIS) em altas energias. Neste sentido mostrou-se válida, com razoável precisão, a representação da seção de choque pela fórmula

$$\sigma^{\gamma^*p}(Y, Q) = \sigma^{\gamma^*p} \left( \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \right), \quad (3.7)$$

onde  $Q$  é a virtualidade do fóton,  $Y$  é a rapidez total no referencial  $\gamma^* - \text{próton}$  e  $Q_s \propto e^{\lambda Y}$  é uma função crescente de  $Y$ . O valor  $\lambda \sim 0.3$  foi confirmado pelo conhecido modelo GBW, atribuído a Golec-Biernat e Wüsthoff [16], no qual o escalamento geométrico foi introduzido explicitamente na parametrização.

A propriedade (3.7) tem sido intimamente relacionada ao conceito de saturação, *i.e.*, ao comportamento das amplitudes da QCD perturbativa quando a densidade de pártons se torna grande o bastante para que seja necessária a introdução de mecanismos que permitam à estas amplitudes não violarem o limite de unitariedade da matriz de espalhamento. Neste sentido a função  $Q_s(Y)$  pode ser chamada de escala de saturação, pois ela marca um limite superior aproximado para a região onde a saturação partônica deve ocorrer.

Vamos trabalhar na representação de dipolos da QCD para o espalhamento profundamente inelástico (DIS). Nesta representação, a seção de choque  $\gamma^*p$  assume a forma fatorizada na qual é uma função da probabilidade do fóton virtual decair no par quark-anti-quark convolvida com a seção de choque dipolo-próton. Esta última é uma função da amplitude de espalhamento dipolo-próton,  $T(r, Y)$ , que pode ser escrita no espaço de momentum através da transformada de Fourier

$$\tilde{T}(k, Y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2r}{r^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y), \quad (3.8)$$

onde assumiu-se independência sobre o parâmetro de impacto  $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ . Desta forma, na representação de dipolos da QCD, a propriedade do escalamento geométrico toma a forma

$$\tilde{T}(k, Y) = \tilde{T} \left( \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right). \quad (3.9)$$

Buscamos agora mostrar que, assintoticamente, a equação de evolução BK possui soluções que obedecem a propriedade do escalamento geométrico. Faremos isto usando o método das ondas propagantes, no qual as soluções assintóticas de equações não-lineares em  $u(x, t)$  adquirem a forma  $u(x, t) \rightarrow u(x - vt)$ , quando  $t$  é grande. Para tanto, devemos trabalhar com a equação BK no espaço de momentum, que pode ser obtida de sua versão no espaço de coordenadas via transformada de Fourier (3.8). Assim, pode-se mostrar que [30, 32]

$$\partial_Y \tilde{T} = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) - \bar{\alpha} \tilde{T}^2, \quad (3.10)$$

onde  $L = \log(k^2/k_0^2)$ , com  $k_0$  sendo uma escala de referência de baixo momentum, e

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma) \quad (3.11)$$

sendo o autovalor do núcleo da equação BFKL [21–24], com  $\psi(\gamma) = \Gamma'(\gamma)/\Gamma(\gamma)$ . Trabalhando com uma aproximação de ponto de sela, freqüentemente chamada de aproximação difusiva, expandimos (3.11) até segunda ordem em torno de  $\gamma = 1/2$  transformando o complicado operador diferencial em (3.10) em um operador de segunda ordem

$$\begin{aligned}\chi(-\partial_L) &= \chi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\chi''(\frac{1}{2})}{2} \left(\partial_L + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4}\right),\end{aligned}\quad (3.12)$$

onde  $\omega = \chi(\frac{1}{2})$  e  $D = \chi''(\frac{1}{2})$ . Definindo  $\bar{\gamma} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8\omega}{D}}$  e fazendo a troca de variáveis

$$t = \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 Y, \quad x = (1 - \bar{\gamma}) \left(L + \frac{\bar{\alpha}D}{2} Y\right) \quad (3.13)$$

podem-se mostrar que a equação BK na aproximação difusiva recai na equação F-KPP, devida a Fisher, Kolmogorov, Petrovsky e Piscounov [45, 46] e muito estudada na física estatística. Vejamos como isso se dá, atacando termo a termo a equação

$$\partial_Y \tilde{T} = \bar{\alpha} \left[ \omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4}\right) \right] \tilde{T} - \bar{\alpha} \tilde{T}^2, \quad (3.14)$$

tendo em vista a transformação (3.13). Para o termo a esquerda, temos:

$$\begin{aligned}\partial_Y \tilde{T} &\equiv \frac{\partial}{\partial Y} \tilde{T} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} \\ &= \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_t \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Para o primeiro termo à direita devemos levar em conta que

$$\begin{aligned}\partial_L \tilde{T} &\equiv \frac{\partial}{\partial L} \tilde{T} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial L} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L} = (1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T}, \\ \partial_L^2 \tilde{T} &= \partial_L(\partial_L \tilde{T}) = (1 - \bar{\gamma}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{T} = (1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T},\end{aligned}$$

de forma que, para tal termo, temos

$$\bar{\alpha} \left[ \omega + \frac{D}{2} \left(\partial_L^2 + \partial_L + \frac{1}{4}\right) \right] \tilde{T} = \bar{\alpha} \left\{ \omega \tilde{T} + \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T} + \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T} + \frac{D}{8} \tilde{T} \right\}. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.15) e (3.16) em (3.14), resulta

$$\frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_t \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T} = \bar{\alpha} \left( \omega + \frac{D}{8} \right) \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T} + \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1 - \bar{\gamma}) \partial_x \tilde{T} - \bar{\alpha} \tilde{T}^2.$$

Da expressão para  $\bar{\gamma}$  vista anteriormente, temos que  $\omega + D/8 = D(1 - \bar{\gamma})^2/2$ . Logo, esta última toma a forma

$$\frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_t \tilde{T} = \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \partial_x^2 \tilde{T} + \frac{D}{2}(1 - \bar{\gamma})^2 \tilde{T} - \tilde{T}^2,$$

a qual, se multiplicada por  $4/D^2(1-\bar{\gamma})^4$ , se torna

$$\partial_t \left( \frac{2}{D(1-\bar{\gamma})^2} \tilde{T} \right) = \partial_x^2 \left( \frac{2}{D(1-\bar{\gamma})^2} \tilde{T} \right) + \frac{2}{D(1-\bar{\gamma})^2} \tilde{T} - \frac{4}{D^2(1-\bar{\gamma})^4} \tilde{T}^2, \quad (3.17)$$

ou

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t) - u^2(x, t), \quad (3.18)$$

onde

$$u(x, t) = \frac{2}{D(1-\bar{\gamma})^2} \tilde{T}(L, Y) = \frac{2}{D(1-\bar{\gamma})^2} \tilde{T} \left( \frac{x}{1-\bar{\gamma}} - \frac{t}{(1-\bar{\gamma})^2}, \frac{2t}{\bar{\alpha}D(1-\bar{\gamma})^2} \right). \quad (3.19)$$

A equação (3.18) não é nada mais do que a equação F-KPP, a qual descreve processos de reação e difusão na aproximação de campo médio, sendo governada por três termos: um termo de difusão ( $\partial_x^2 u$ ), responsável pela disseminação de partículas no espaço, um termo de crescimento ( $u$ ), que descreve a criação de partículas e um termo não-linear de amortecimento ( $-u^2$ ), cuja função é descrever a destruição de partículas, ou melhor, a saturação da solução da equação,  $u(x, t)$ . Em particular, na ausência deste termo a equação é restrita a sua parte linear e leva a um crescimento exponencial da solução com o tempo aliado a sua difusão no espaço. Esta é justamente a característica do núcleo da equação BFKL que governa a parte linear da equação BK.

Equações do tipo F-KPP são conhecidas por admitirem as chamadas soluções de ondas propagantes, cuja existência é devida ao termo de amortecimento não-linear, enquanto que algumas de suas propriedades assintóticas, como por exemplo a velocidade e a forma da frente de onda, são determinadas pela equação linearizada sobre o estado instável  $u = 0$ , como veremos. Se escolhermos uma condição inicial no tempo  $t = t_0$  tal que  $u(x, t_0)$  decresce suavemente de 1 a 0 quando  $x$  vai de  $-\infty$  a  $+\infty$  e tem o comportamento assintótico

$$u(x, t_0) \stackrel{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\beta x}, \quad (3.20)$$

pode-se provar, como fez Bramson em [47], que a equação F-KPP admite as soluções de ondas propagantes para grandes tempos. Isto significa que existe uma função de uma variável  $f$  tal que

$$u(x, t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} f(x - m_\beta(t)) \quad (3.21)$$

tem um comportamento uniforme em  $x$ . A função  $m_\beta(t)$  depende da condição inicial:

$$\begin{aligned} m_\beta(t) &= c(\beta) + \mathcal{O}(1) && \text{para } \beta < \beta_c, \\ m_\beta(t) &= 2t - \frac{1}{2} \log t + \mathcal{O}(1) && \text{para } \beta = \beta_c, \\ m_\beta(t) &= 2t - \frac{3}{2} \log t + \mathcal{O}(1) && \text{para } \beta > \beta_c, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $c(\beta) = \beta + 1/\beta$ , sendo que o valor crítico  $\beta_c = 1$  corresponde ao mínimo de  $c(\beta)$ . Podemos notar que para  $\beta \geq \beta_c$  a velocidade da frente de onda propagante  $dm(\beta)/dt$  independe do valor de  $\beta$ .

Podemos mostrar ainda que as condições iniciais da QCD são da forma da equação (3.20). Para um valor inicial  $Y = Y_0$ , ao qual corresponde  $t_0 = \frac{\bar{\alpha}D}{2}(1-\bar{\gamma})^2 Y_0$  de acordo com



(3.13), e para  $L$  grande, que implica  $x$  grande, o comportamento de  $\tilde{T}$  é dado pela QCD perturbativa. Assim, tomando o limite assintótico em  $x$  com  $t$  fixo, temos, de acordo com (3.20):

$$\tilde{T}(L, Y_0) \propto e^{-\beta(1-\bar{\gamma})L}. \quad (3.23)$$

Comparando (3.13) e (3.20), tomamos  $\beta = \gamma_0/(1 - \bar{\gamma})$  de forma que, como  $L = \log(k^2/k_0^2)$  esta última se torna

$$\tilde{T}(L, Y_0) \propto e^{-\gamma_0 \log k^2} = k^{-2\gamma_0}. \quad (3.24)$$

Tomando  $\gamma_0 = 1$  nesta relação obtemos a conhecida propriedade da transparência de cor da QCD. Particularmente,  $u(+\infty, t_0) \propto \tilde{T}(L \rightarrow +\infty, Y_0) = 0$ . Já a condição  $u(-\infty, t_0) = 1$ , imposta à solução para a ocorrência das ondas propagantes, implica em  $\tilde{T}(L \rightarrow -\infty, Y_0) = D(1 - \bar{\gamma})^2/2$ , quando  $k/k_0 \rightarrow 0$ . Este limite infravermelho não permite o uso de QCD perturbativa e portanto a dinâmica é desconhecida em tal região. No entanto, podemos esperar um limite superior em  $\tilde{T}$  como forma de impor unitariedade à esta.

Como visto nas referências [48, 49], a formação de ondas propagantes nas soluções de equações não lineares é uma propriedade muito mais geral, podendo ocorrer inclusive para equações não lineares com núcleos mais complicados do que  $\partial_x^2 + 1$ . Desta forma, o surgimento de ondas propagantes depende somente de que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- $u = 0$  seja um ponto fixo instável da equação e  $u = 1$  um ponto fixo estável;
- a condição inicial deve decrescer mais rapidamente que  $e^{-\gamma_c x}$ , *i.e.*, se  $u_0(x) \sim e^{-\gamma_0 x}$ , queremos  $\gamma_0 > \gamma_c$ ;
- a equação de evolução linearizada admita superposição de ondas como solução:

$$u(x, t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) e^{-\gamma x + \omega(\gamma)t} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) e^{-\gamma(x_{wf} + vt) + \omega(\gamma)t}, \quad (3.25)$$

onde  $\omega(\gamma)$  é a transformada de Mellin do núcleo linear da equação e  $x_{wf} = x - vt$  é a posição da frente de onda.

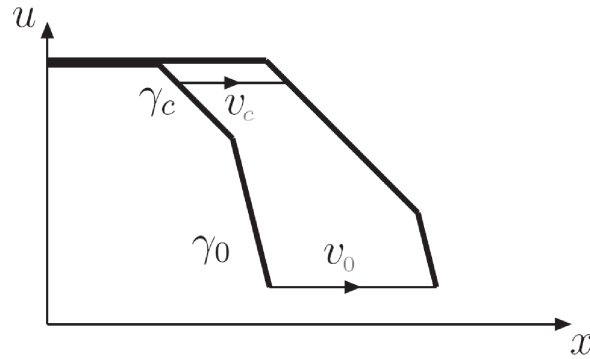
Ocorre então que o termo não linear força a solução a atingir um comportamento crítico correspondente as ondas propagantes após um longo tempo

$$u(x, t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma_c x_{wf}}. \quad (3.26)$$

O expoente crítico  $\gamma_c$  corresponde a uma onda parcial que tenha a velocidade de fase mínima igual à velocidade de grupo do pacote de ondas

$$v_c = \frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c} = \partial_\gamma \omega(\gamma)|_{\gamma_c}. \quad (3.27)$$

Podemos entender qualitativamente como ocorre a seleção desta velocidade  $v_c$  analisando a Figura 3.2 e observando as condições expostas acima para a formação das ondas propagantes. A frente de onda em um tempo inicial (à esquerda na figura) captura as principais



**Fig. 3.2:** *Evolução de uma frente de onda no tempo (ou rapidez) e a formação de uma onda propagante.*

propriedades da dependência espacial: saturação (primeira condição) seguida de uma queda com declividade dada pelo expoente crítico  $\gamma_c$  e logo após uma queda mais abrupta com declividade dada por  $\gamma_0$  (segunda condição). Após um passo na evolução, no tempo ou em rapidez, cada uma das frentes decrescentes deverá evoluir com sua própria velocidade (tais frentes estão no regime diluto de forma que podemos usar a terceira condição). Como resultado, vemos que a região alcançada, nas frentes, pelo expoente crítico é cada vez maior, o que corresponde que estas frentes viajam com velocidade  $v_c$ .

É importante analisar também o comportamento subassintótico das soluções, para saber como a frente de onda atinge o seu comportamento assintótico como função do tempo. Para tanto usamos o seguinte ansatz para a solução na vizinhança da frente de onda, o qual se mostrou relevante no caso de equações do tipo F-KPP [50]

$$u(x, t) \stackrel{t \text{ grande}}{\approx} t^\alpha G\left(\frac{x_{wf} + c(t)}{t^\alpha}\right) e^{-\gamma_c(x_{wf} + c(t))}, \quad (3.28)$$

onde  $c(t)$  é uma função subdominante do tempo e o fator  $t^\alpha$  descreve uma evolução do tipo difusiva. O fator  $t^\alpha G$  representa uma correção subassintótica à forma da frente dada por (3.26) em grandes tempos, tendo como propriedade chave o fato de ser, também, uma solução da equação linearizada para algum  $\alpha$  e  $c(t)$  a serem determinados. Podemos notar ainda que quando  $u(x, t)$  atinge o comportamento assintótico de onda propagante pura ela depende somente de  $x_{wf} + c(t)$ , de forma que  $G(z)$  deve ser nulo para  $z \rightarrow 0$ .

Vamos então aplicar o formalismo exposto acima à equação de evolução BK com acoplamento fixo. A parte linear de (3.10) é solucionada pela superposição de ondas (3.25),

$$\tilde{T}(k, Y) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \tilde{T}_0(\gamma) e^{-\gamma L + \bar{\alpha}\chi(\gamma)Y}, \quad (3.29)$$

onde a rapidez  $Y$  é a variável de evolução a faz assim o papel do tempo  $t$ , enquanto que  $L = \log(k^2/k_0^2)$  faz o papel da coordenada espacial  $x$ . Comparando as equações (3.29) e (3.26), vemos que a relação de dispersão toma a forma

$$\omega(\gamma) = \bar{\alpha}\chi(\gamma), \quad (3.30)$$

a qual, quando substituída em (3.27) fornece uma equação implícita para  $\gamma_c$ ,

$$\gamma_c \chi'(\gamma) = \chi(\gamma). \quad (3.31)$$

Em aproximação de ordem dominante para o núcleo da equação BFKL, temos que  $\gamma_c = 0.6275\dots$ . Vimos anteriormente que a condição inicial para amplitude  $\tilde{T}(L, Y_0)$  implica em  $\gamma_0 = 1$  de forma que estamos na região  $\gamma_c < \gamma_0$ , justamente a região necessária para a formação das ondas propagantes.

Para estudar a formação da frente de onda usaremos a aproximação difusiva da equação BK, para a qual mostramos a equivalência com a equação F-KPP. Entretanto, agora usaremos a expansão em séries para  $\chi(-\partial_L)$  em torno de  $\gamma_c$  até segunda ordem, *i.e.*,

$$\chi(-\partial_L) = \chi(\gamma_c) + (-\partial_L - \gamma_c 1) \chi'(\gamma_c) + \frac{1}{2} (-\partial_L - \gamma_c 1)^2 \chi''(\gamma_c). \quad (3.32)$$

Com esta aproximação, a equação BK toma a forma

$$\partial_Y \tilde{T} = -v_c \partial_L \tilde{T} + \frac{1}{2} \bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) (-\partial_L - \gamma_c 1)^2 \tilde{T} - \bar{\alpha} \tilde{T}^2, \quad (3.33)$$

a qual é equivalente, como mostramos anteriormente, a equação F-KPP.

Usaremos agora o ansatz (3.28) como solução da parte linear da equação acima nas proximidades da frente de onda. Para tanto, faremos a troca de variáveis:  $u = \tilde{T}$ ,  $x = L$  e  $t = Y$  de forma que,

$$z = \frac{x_{wf} + c(t)}{t^\alpha} = \frac{(L - v_c Y) + c(Y)}{Y^\alpha}. \quad (3.34)$$

Assim o termo à esquerda de (3.33) é dado por

$$\begin{aligned} \partial_Y \tilde{T} &= \partial_L [G(z) Y^\alpha e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))}] \\ &= \left\{ G'(z) \frac{\partial z}{\partial Y} Y^\alpha + G(z) \alpha Y^{\alpha-1} + G(z) Y^\alpha [-\gamma_c(\dot{c}(Y) - v_c)] \right\} e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\partial z}{\partial Y} = \partial_Y [(L - v_c Y + c(Y)) Y^{-\alpha}] = -\alpha z Y^{-1} + \dot{c}(Y) Y^{-\alpha} - v_c Y^{-\alpha},$$

tal que

$$\begin{aligned} \partial_Y \tilde{T} &= \left\{ G'(z) [-\alpha z Y^{\alpha-1} + \dot{c}(Y) - v_c] + G(z) Y^\alpha [\alpha Y^{-1} - \gamma_c(\dot{c}(Y) - v_c)] \right\} \\ &\quad \times e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para o lado direito de (3.33), precisamos de:

$$\begin{aligned} \partial_L \tilde{T} &= [G'(z) - \gamma_c Y^\alpha G(z)] e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))} \\ \partial_L^2 \tilde{T} &= [G''(z) Y^{-\alpha} - 2\gamma_c G'(z) + \gamma_c^2 Y^\alpha G(z)] e^{-\gamma_c(L - v_c Y + c(Y))}. \end{aligned}$$

Logo, (3.33) se torna

$$\begin{aligned} G'(z) [-\alpha z Y^{\alpha-1} + \dot{c}(Y) - v_c] + G(z) Y^\alpha [\alpha Y^{-1} - \gamma_c(\dot{c}(Y) - v_c)] &= -v_c [G'(z) - \gamma_c Y^\alpha G(z)] \\ + \frac{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}{2} [G''(z) Y^{-\alpha} - 2\gamma_c G'(z) + \gamma_c^2 Y^\alpha G(z) + 2\gamma_c (G'(z) - \gamma_c Y^\alpha G(z)) + \gamma_c^2 Y^\alpha G(z)] &, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}{2}G''(z)Y^{-\alpha} + (\alpha zY^{\alpha-1} - \dot{c}(Y))G'(z) + Y^{\alpha-1}(\gamma_c\dot{c}(Y) - \alpha)G(z) = 0. \quad (3.36)$$

Ou seja, a parte linear da equação BK, na aproximação difusiva, se transforma numa equação diferencial ordinária de segunda ordem para  $G(z)$ . Podemos ver ainda que, negligenciando o termo  $\dot{c}(Y)G'(z)$ , os diferentes termos nesta última equação contribuem igualmente se  $\alpha = 1/2$  e  $\dot{c}(Y) = \beta/Y$  onde  $\beta$  é uma constante. Este valor de  $\alpha$  permite a retirada da dependência explícita em  $Y$  da equação, restando apenas a dependência em  $z$ . Assim,

$$\frac{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}{2}G''(z) + \frac{z}{2}G'(z) + \left(\beta\gamma_c - \frac{1}{2}\right)G(z) = 0. \quad (3.37)$$

Esperamos que a frente de onda adquira o comportamento de onda propagante pura para  $Y \rightarrow \infty$ , que implica em  $z \rightarrow 0$ . Portanto, escolhemos a solução  $G_{\beta'}(z)$ , com  $\beta' = \beta\gamma_c$ , que é linear em  $z = 0$  e que pode ser escrita como uma série infinita, que não é válida quando  $\beta'$  é um inteiro não positivo [50]

$$G_{\beta'}(z) = A\sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)}z^{2n+1}, \quad (3.38)$$

onde  $A$  é uma constante.

Para determinar  $\beta'$  notemos que a forma escalada do ansatz (3.28) deve ter um comportamento semelhante ao da condição inicial para a formação das ondas propagantes (3.20) quando  $L$  é grande e  $Y$  é de ordem 1. Devemos calcular então o comportamento assintótico de  $G(z)$  quando  $z$  é grande. Para  $\beta' = 3/2$  ou  $\beta = 3/2\gamma_c$  a expressão (3.38) fornece [50]

$$G_{3/2}(z) = A\sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}}z\exp\left(-\frac{z^2}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}\right). \quad (3.39)$$

Em termos das variáveis físicas  $L = \log(k^2/k_0^2)$  e  $Y$  esta última fica da forma

$$G\left(\frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{\sqrt{Y}}\right) = A\sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}}\frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{\sqrt{Y}}\exp\left(-\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y}\right), \quad (3.40)$$

onde usamos, com  $c(Y) = \int dt\dot{c}(Y) = 3\log Y/2\gamma_c$ ,

$$z = \frac{L - v_c Y + 3\log Y/2\gamma_c}{\sqrt{Y}} = \frac{\log k^2 - \log k_0^2 (\exp(v_c Y - 3\log Y/2\gamma_c))}{\sqrt{Y}} = \frac{\log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)}{\sqrt{Y}}, \quad (3.41)$$

onde definimos a escala de saturação como

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp\left(v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log Y\right). \quad (3.42)$$

Substituindo estes resultados na equação (3.28) em termos das variáveis físicas  $\tilde{T}$ ,  $L = \log(k^2/k_0^2)$  e  $Y$ , temos,

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(k, Y) &\stackrel{Y \rightarrow \infty}{\cong} \tilde{T} \left( \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) \stackrel{k \gg Q_s}{\cong} \sqrt{Y} G \left( \frac{\log(k^2/Q_s^2(Y))}{\sqrt{Y}} \right) e^{-\gamma_c \log \left( \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)} \\
 &= A \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c)}} \log \left( \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) \left( \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c} \exp \left( -\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) Y} \right) \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Desta forma, mostramos que a solução para a amplitude de espalhamento em termos de ondas propagantes apresenta uma estrutura escalada, o que concorda com o escalamento geométrico das seções de choque da QCD, como visto no início desta seção.

O escalamento geométrico tem importantes conseqüências, como por exemplo o fato de que o movimento, no espaço  $(\log(Q^2), Y)$ , ao longo da linha da saturação onde  $Q = Q_s(Y)$ , não muda o comportamento das amplitudes de espalhamento. Analizando a expressão (3.43) vemos que ela possui um termo subdominante que depende explicitamente da rapidez  $Y$ , o que viola o escalamento geométrico. Entretanto, este termo pode ser desprezado quando

$$\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) Y} < 1,$$

implicando que o escalamento geométrico é obtido para

$$\log(k^2/Q_s^2(Y)) \lesssim \sqrt{2\bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) Y}, \quad (3.44)$$

ou seja, em uma janela que se estende por um fator proporcional a  $\sqrt{Y}$  acima da escala de saturação. Esta é uma propriedade importante das amplitudes de espalhamento em altas energias: as conseqüências da saturação partônica são observadas em regiões distantes da região de saturação, inclusive na cauda das amplitudes, onde estas são muito menores que a unidade.

### 3.3 O modelo AGBS para a amplitude $\tilde{T}(k, Y)$

Vamos expor agora um modelo para a amplitude de espalhamento dipolo-próton no espaço de momentum. O modelo AGBS [42] usa as soluções assintóticas da equação de evolução BK para descrever a amplitude tanto na região de saturação como na região onde os pártons estão diluídos no interior dos hádrons. A expressão (3.43) é válida somente para este regime diluto, onde  $k \gg Q_s$  e portanto  $\tilde{T}(k, Y) \ll 1$ . Para o modelo se tornar completo precisamos de uma expressão que descreva a evolução partônica na vizinhança da escala de saturação  $Q_s$  e na região de saturação. Como nesta última é esperado que a densidade de pártons (ou dipolos) tenha um limite superior, devido a unitariedade, escrevemos a amplitude nesta região com uma função de Heaviside

$$T(r, Y) = \Theta(rQ_s(Y) - 1). \quad (3.45)$$

Usando a Transformada de Fourier (3.8) podemos mostrar que

$$\tilde{T} \left( \frac{k}{Q_s(Y)}, Y \right) \stackrel{k \ll Q_s}{\cong} c - \log \left( \frac{k}{Q_s(Y)} \right), \quad (3.46)$$

onde  $c$  é uma constante ainda não fixada.

Agora temos todos os ingredientes para descrever a amplitude  $\tilde{T}(k, Y)$ , visto que as expressões (3.43) e (3.46) descrevem completamente o comportamento assintótico de tal amplitude. Além disto, elas representam um comportamento universal, visto que independentemente de condições iniciais e (3.43) depende somente do núcleo da equação BFKL. Esta é uma propriedade marcante, pois significa que contribuições de correções de próxima ordem dominante (NLO da sigla em inglês) à equação BFKL levarão à equações com mesma estrutura analítica, somente com parâmetros diferentes.

Vamos então tentar unir as expressões para os regimes diluto e saturado em torno da escala de saturação. Uma maneira de fazer isto é usar (3.43) para  $k > Q_s$  e (3.46) para  $k < Q_s$  e obter, impondo continuidade em  $k = Q_s$ , a constante  $c$ . No entanto, esta definição por partes da amplitude em toda a região cinemática poderia introduzir oscilações na amplitude, quando transformada, através de (3.8), para o espaço de coordenadas, podendo inclusive torná-la negativa. A maneira que o modelo AGBS contorna esse problema é fazendo uma interpolação analítica suave entre os comportamentos diluto e saturado da amplitude de espalhamento. A fim de modelar tal interpolação, parte-se do regime diluto para o regime saturado, construindo uma expressão que se torne saturada a uma constante quando  $k \ll Q_s$ , na qual posteriormente inclui-se os fatores logarítmicos. Tal expressão é uma função decrescente de  $L = \log(k^2/k_0^2)$  e que reproduz (3.43) a menos de constantes e um fator logarítmico

$$T_{dil} = \exp \left[ -\gamma_c \log \left( \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) - \frac{L_{red}^2 - \log^2(2)}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right], \quad (3.47)$$

com

$$L_{red} = \log \left[ 1 + \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right] \quad \text{e} \quad Q_s^2(Y) = k_0^2 e^{\bar{\alpha}v_c Y}, \quad (3.48)$$

onde considera-se somente o termo dominante da expressão (3.42) para a escala de saturação. A expressão (3.47) é unitarizada por uma eikonal, ou seja,  $T_{unit} = 1 - e^{-T_{dil}}$  e nos resta então reinserir os fatores logarítmicos nos regimes diluto e saturado. A expressão usada no modelo é

$$\tilde{T}(k, Y) = \left[ \log \left( \frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k} \right) + 1 \right] (1 - e^{-T_{dil}}). \quad (3.49)$$

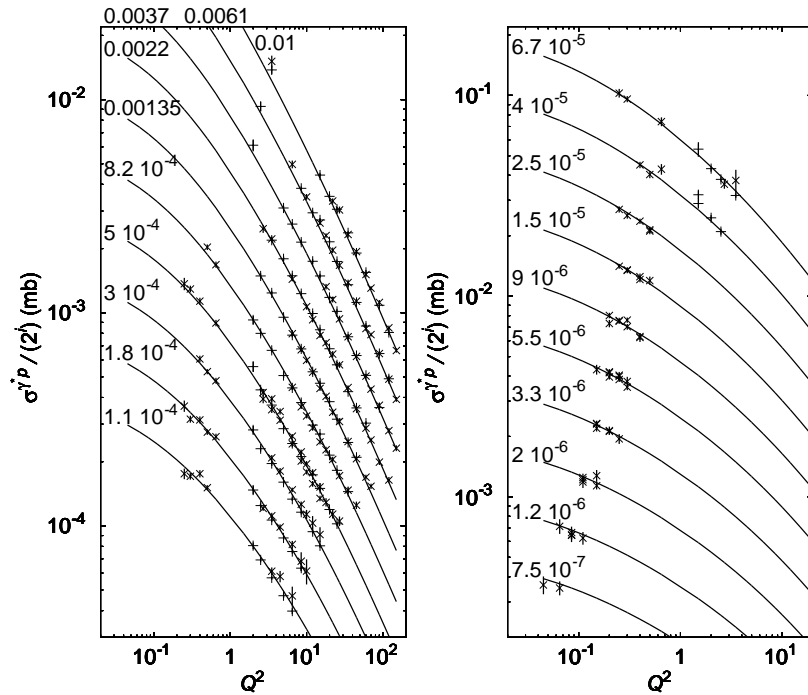
As expressões (3.47), (3.48) e (3.49) determinam o modelo AGBS para a amplitude de espalhamento no espaço de momentum, o qual foi usado para descrever a função de estrutura do próton,  $F_2$ , dada por

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y), \quad (3.50)$$

a qual foi ajustada aos dados de HERA disponíveis para esta quantidade. Nesta análise, as últimas medidas de HERA para a função de estrutura do próton, vindos das colaborações H1 [51] e ZEUS [52, 53], foram ajustados, dentro do seguinte regime cinemático:

$$\begin{aligned} x &\leq 0.01, \\ 0.045 &\leq Q^2 \leq 150 \text{ GeV}^2, \end{aligned} \quad (3.51)$$

o que resulta em um total de 279 pontos de dados a serem ajustados. No regime cinemático acima, o primeiro limite indica que o modelo se propõe a descrever o limite de altas energias das amplitudes de espalhamento, ou seja, o chamado comportamento em pequeno  $x$  destas quantidades. A segunda desigualdade inclui valores da virtualidade  $Q^2$  não tão grandes a ponto de evitar que correções à equação DGLAP sejam necessariamente incluídas no modelo. Além disto, o modelo permite uma incerteza de renormalização de 5% sobre os dados de H1.



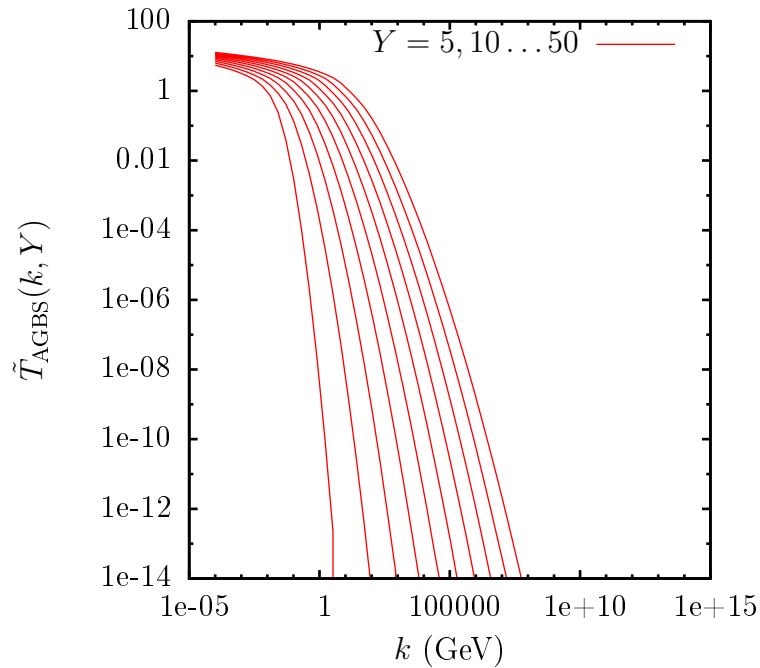
**Fig. 3.3:** Resultados do ajuste do modelo à seção de choque  $\gamma^*p$  aos dados de HERA como função de  $Q^2$  para diferentes valores de  $x$  [42]. As curvas foram reescaladas por potências de 2 (1 até  $2^{-9}$  de cima para baixo) para tornar mais clara a observação. Os símbolo mais corresponde aos dados de ZEUS [52, 53] e a cruz aos dados de H1 [51].

Massas (MeV)	$k_0^2$ ( $10^{-3}$ GeV $^2$ )	$v_c$	$\chi_c''$	$R_p$ (GeV)	$\chi^2/\text{nop}$
$m_q = 50, m_c = 50$	$3.782 \pm 0.293$	$1.065 \pm 0.018$	$4.691 \pm 0.221$	$2.770 \pm 0.045$	0.960
$m_q = 50, m_c = 1300$	$7.155 \pm 0.624$	$0.965 \pm 0.017$	$2.196 \pm 0.161$	$3.215 \pm 0.065$	0.988
$m_q = 140, m_c = 1300$	$3.917 \pm 0.577$	$0.807 \pm 0.025$	$2.960 \pm 0.279$	$4.142 \pm 0.167$	1.071

**Tab. 3.1:** Resultados do ajuste do modelo AGBS aos dados de  $F_2$ . Os valores do parâmetros com seus respectivos erros são mostrados, juntamente com o  $\chi^2$  por número de dados.

Em relação aos parâmetros, foram mantidos fixos  $\gamma_c = 0.6275$ , que é o valor esperado em ordem dominante (LO) para o núcleo BFKL; e  $\bar{\alpha} = 0.2$ , que corresponde a um valor de  $\alpha_s \approx 0.2$ , para  $N_c = 3$ . Com isto, os parâmetros  $v_c$ ,  $\chi''(\gamma_c)$ ,  $k_0^2$  e  $R_p$  ficam livres para o ajuste

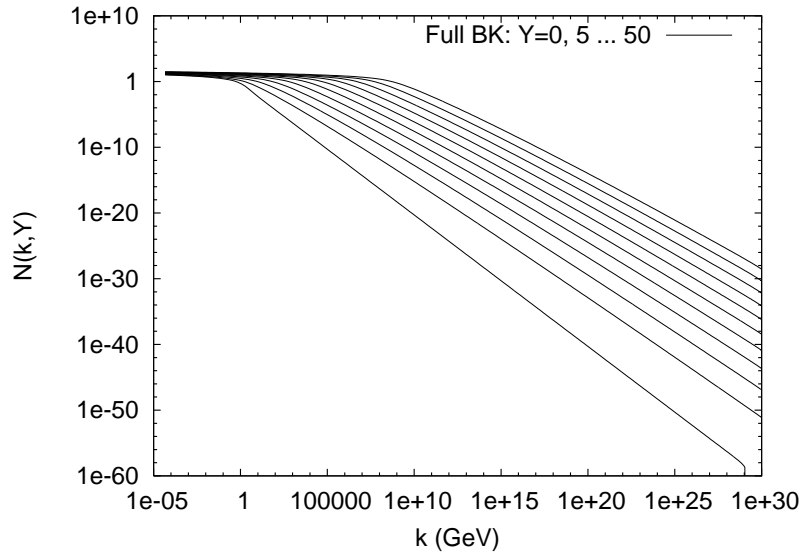
aos dados. O modelo inclui a contribuição dos quarks leves,  $u$ ,  $d$  e  $s$ , além do quark charm  $c$  em situações distintas quanto às massas: A massa dos quarks leves,  $m_q$  foi definida como 50 ou 140 MeV enquanto que a massa do quark charm foi usada como  $m_c = m_q = 50$  GeV ou  $m_c = 1.3$  GeV. Os parâmetros obtidos do ajuste aos dados estão na Tabela 3.1, juntamente com o  $\chi^2$  por número de pontos. O modelo se ajustou muito bem aos dados, como pode ser visto pelo gráfico na Figura 3.3, que mostra  $\sigma^{\gamma^*p} \propto F_2^p$  versus  $Q^2$  para diferentes valores de  $x$ .



**Fig. 3.4:** Forma para a amplitude no espaço de momentum segundo o modelo AGBS, para diferentes valores de rapidez. Da esquerda para a direita temos  $Y = 5, 10, \dots, 50$ . Os parâmetros para este gráfico foram tomados do ajuste correspondente à terceira linha da tabela 3.1.

Podemos comparar ainda a forma da amplitude AGBS com as soluções numéricas da equação BK no espaço de momentum [54]. A amplitude AGBS, que está ilustrada na Fig.3.4, mostra claramente os comportamentos de saturação e diluto da evolução, além de mostrar o escalamento geométrico na evolução em rapidez. A solução numérica para a equação BK fornece a amplitude vista na Fig.3.5, a qual mostra um comportamento bastante semelhante ao observado para a amplitude AGBS. Isto confirma a validade do modelo e mostra ainda que este modelo não apresenta os problemas vistos nos modelos GBW [16] e IIM [17], quando transformados para o espaço de momentum. A análise da transformada de Fourier dos modelos citados foi feita em [55], mostrando que, no caso do modelo GBW, a transformada de Fourier da seção de choque de dipolos apresenta um comportamento não compatível com a QCD perturbativa, enquanto que no caso do modelo IIM, a amplitude apresenta valores não positivos. Uma comparação do modelo AGBS com estes dois modelos, além do modelo BGK [56, 57], que consiste em um aprimoramento do modelo GBW pela incorporação de





**Fig. 3.5:** Solução numérica da equação BK no espaço de momentum, mostrada para diferentes valores de rapidez [54].

uma densidade de glúons evoluindo de acordo com a dinâmica DGLAP, é vista na tabela 3.2.

### 3.4 Conclusões

O objetivo deste capítulo foi apresentar um modelo fenomenológico para a amplitude de espalhamento dipolo-próton no espaço de momentum, o qual chamamos modelo AGBS. Antes disso vimos como descrever a função de estrutura do próton em tal espaço, bem como algumas propriedades das amplitudes de espalhamento em altas energias. Tais propriedades incluem uma conexão com a física estatística, buscando a descrição das soluções assintóticas da equação de evolução BK, o que é feito tratando a evolução descrita por esta equação como um processo de reação-difusão, bem conhecido da física estatística. A equivalência entre a equação BK e a equação FKPP foi mostrada, bem como as implicações desta para o com-

Parametrização	Massas dos quarks	nop	$\chi^2/\text{nop}$
GBW [16]	$m_q = 140$ MeV, $m_c = 140$ MeV	372	1.5
IIM [17]	$m_q = 140$ MeV, sem charm	156	0.81
BGK [57]	$m_q = 0$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	288	1.06
AGBS [42]	$m_q = 50$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	279	0.988

**Tab. 3.2:** Comparação entre os resultados de diversas parametrizações para a seção de choque de dipolos. Para cada modelo, estão indicados os valores das massas dos quarks considerados, além do número de pontos usados no ajuste e do respectivo  $\chi^2$  por número de pontos obtido.

---

portamento assintótico das amplitudes da equação BK, que descreve muito a propriedade experimental do escalamento geométrico das seções de choque observado no colisor HERA. Por fim apresentamos o modelo AGBS para a amplitude — e portanto para a seção de choque — dipolo-próton, o qual interpola analiticamente entre os comportamentos assintóticos para os regimes diluto e saturado da evolução BK e descreve muito bem os dados de HERA para o ajuste da função de estrutura do próton  $F_2$ . No próximo capítulo iremos investigar como os efeitos de flutuações no número de partículas durante a evolução influem na descrição do espalhamento profundamente inelástico (DIS) em HERA, sob a perspectiva do modelo AGBS visto aqui.

## Capítulo 4

# Flutuações e suas conseqüências para a QCD em altas energias

No capítulo anterior vimos um modelo para a amplitude de espalhamento dipolo–próton, construído pela interpolação das soluções assintóticas da equação de evolução de Balitsky-Kovchegov (BK). Esta equação pode ser vista como uma aproximação de campo médio para um conjunto de equações para os múltiplos espalhamentos entre os dipolos que formam o projétil e o alvo. O conjunto em questão forma a chamada hierarquia de Balitsky-JIMWLK [33–38], a qual não inclui termos que levem em conta os múltiplos espalhamentos no projétil, ou flutuações no número de partículas (glúons ou dipolos) no alvo, como mostraram Iancu e Triantafyllopoulos [58, 59]. Os termos adicionais descrevem o desdobramento de glúons na função de onda do alvo, que juntamente com os termos para a fusão de glúons contido em todas as equações para o regime de saturação partônica, representam laços de pomerons e formam as chamadas equações de laços de pomerons. Como resultado temos uma hierarquia infinita que pode ser reescrita, a menos de uma aproximação para manter a independência no parâmetro de impacto, na forma de uma equação de Langevin estocástica que é formalmente igual a equação BK acrescida de um termo de ruído responsável pelas flutuações. Como foi mostrado no capítulo anterior, a equação BK está em classe de equivalência com a equação de reação–difusão FKPP, a qual admite as chamadas ondas propagantes como solução. A equação de Langevin estocástica, por sua vez, também está em classe de equivalência com uma equação FKPP, mas em sua forma estocástica. Esta última nada mais é que a FKPP adicionada de um termo de ruído.

Veremos a seguir como se manifestam as propriedades citadas acima, bem como quais são suas implicações para as amplitudes de espalhamento em altas energias. Feito isso, discutiremos como tais flutuações entram no modelo AGBS para a amplitude de espalhamento dipolo–próton e como elas influenciam a descrição dos dados de HERA para a função de estrutura do próton.

### 4.1 Flutuações e evolução no formalismo de dipolos

Vamos mostrar nesta seção, que o formalismo de dipolos de cor proposto por Mueller se mostra naturalmente um bom referencial para a descrição das flutuações no número de glúons (ou dipolos) no regime diluto, e no limite de grande número de cores. Para tanto vamos usar uma formulação alternativa para o modelo de dipolos [60] segundo a qual o

sistema de dipolos gerado pela evolução de um dipolo original, com coordenadas  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , até uma rapidez  $Y$  é descrito como um *ensemble* estocástico de configurações de dipolos com uma lei de probabilidade que evolui em  $Y$  de acordo com uma *equação mestra*. Desta forma, uma dada configuração é especificada pelo número  $N$  de dipolos e pelas  $N - 1$  coordenadas transversais  $\{\mathbf{z}_i\} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{N-1}\}$  destes dipolos, tal que as coordenadas dos  $N$  dipolos são  $(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1), (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2), \dots, (\mathbf{z}_{N-1}, \mathbf{z}_N)$ , com  $\mathbf{z}_0 \equiv \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{z}_N \equiv \mathbf{y}_0$ . A probabilidade  $P_N(\{\mathbf{z}_i\}; Y)$  de achar uma dada configuração obedece ao seguinte conjunto de equações de evolução acopladas

$$\begin{aligned}
 \partial_Y P_N(\{\mathbf{z}_i\}; Y) = & -\frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \left[ \sum_{i=1}^N \int d^2\mathbf{z} \mathcal{M}(\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}) \right] P_N(\{\mathbf{z}_i\}; Y) \\
 & + \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{M}(\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_{i+1}, \mathbf{z}) P_{N-1}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_{i+1}, \dots, \mathbf{z}_{N-1}; Y),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

nas quais identificam-se os característicos termos de perdas e ganhos de uma equação mestra para um processo markoviano [61] e onde definimos

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{y} - \mathbf{z})^2}. \tag{4.2}$$

As equações (4.1) devem ser resolvidas com a condição inicial de que em  $Y = 0$  existe somente um dipolo, *i.e.*,  $P_N(Y = 0) = \delta_{N1}$ . O valor esperado de um operador  $\mathcal{O}$  que depende somente sobre o tamanho do dipolo é dado por

$$\langle \mathcal{O}(Y) \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} \int d\Gamma_N P_N(\{\mathbf{z}_i\}; Y) \mathcal{O}_N(\{\mathbf{z}_i\}), \tag{4.3}$$

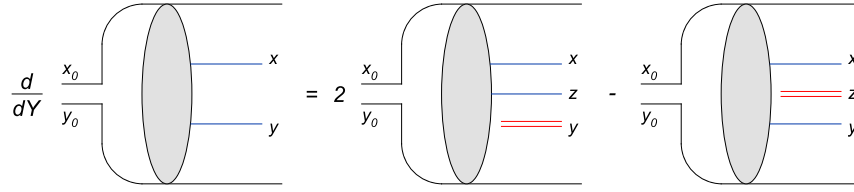
onde o elemento diferencial do espaço de fases é simplesmente  $d\Gamma_N = d^2\mathbf{z}_1 d^2\mathbf{z}_2 \dots d^2\mathbf{z}_{N-1}$ . Usando a equação mestra (4.1) temos que

$$\begin{aligned}
 \partial_Y \langle \mathcal{O}_N(Y) \rangle = & \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \int d\Gamma_N P_N(\{\mathbf{z}_i\}; Y) \sum_{i=1}^N \int d^2\mathbf{z} \mathcal{M}(\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}) \\
 & \times [-\mathcal{O}_N(\{\mathbf{z}_i\}) + \mathcal{O}_{N+1}(\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}, \mathbf{z}_i, \dots, \mathbf{z}_{N-1}\})].
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nesta última, dentro de  $\mathcal{O}_{N+1}$ ,  $\mathbf{z}$  é uma coordenada comum aos dipolos adjacentes  $(\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z})$  e  $(\mathbf{z}, \mathbf{z}_i)$ , tal que, quando, por exemplo,  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_i$ , o respectivo dipolo desaparece e  $\mathcal{O}_{N+1}$  reduz-se a  $\mathcal{O}_N$ . Desta forma, as possíveis divergências infravermelhas que podem aparecer em (4.2) quando  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_i$  são eliminadas de quaisquer quantidades físicas, que envolvem médias sobre todas as probabilidades como em (4.4).

Vamos usar a equação (4.4) para obter equações de evolução para as densidades de número de dipolos. Mas primeiramente, consideraremos a densidade média do número de dipolos, para a qual temos, em uma configuração de  $N$  dipolos, o operador

$$n_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N \delta^{(2)}(\mathbf{z}_{j-1} - \mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{z}_j - \mathbf{y}). \tag{4.5}$$



**Fig. 4.1:** Um passo na evolução da densidade média do número de dipolos como descrito pela equação 4.6.

Usando (4.4), com  $\mathcal{O}_N \equiv n_N$ , e após algumas manipulações chega-se a seguinte equação de evolução para  $n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial Y} &= \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 z [-\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad + \mathcal{M}(\mathbf{x}, z, \mathbf{y})n_Y(\mathbf{x}, z) + \mathcal{M}(z, \mathbf{y}, \mathbf{x})n_Y(z, \mathbf{y})] \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 z \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}z} \otimes n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde usamos a notação

$$\mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}z} \otimes n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) [-n_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + n_Y(\mathbf{x}, z) + n_Y(z, \mathbf{y})]. \quad (4.7)$$

Reconhecemos em (4.6), a qual é representada na Fig.4.1, a equação BFKL no espaço de coordenadas [30,63], de onde vemos que a densidade de número de dipolos cresce em energia como o pomeron BFKL.

Voltamos agora à densidade de um par de dipolos. Para uma configuração de  $N$  dipolos, o operador correspondente é definido como o produto normal ordenado das densidades individuais [58]

$$\begin{aligned} n_N^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) &= : n_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)n_N(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) : \\ &\equiv n_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)n_N(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) - \delta^{(2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\delta^{(2)}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)n_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde o termo subtraído à direita elimina a possibilidade de que pares de dipolos sejam feitos de um mesmo dipolo, além de eliminar a singularidade do produto  $n_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)n_N(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$  no limite onde os dois dipolos têm coordenadas idênticas. Desta forma,  $n^{(2)}$  considera realmente correlações não triviais entre os pares distintos de dipolos.

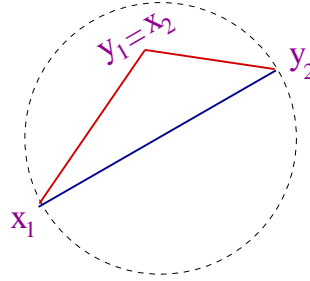
No limite de altas energias, onde o número de dipolos é grande e espera-se que as flutuações  $\delta n$  não sejam relativamente importantes, a densidade média de pares de dipolos  $n_Y^{(2)} \equiv \langle n^{(2)} \rangle_Y$  pode ser aproximada por  $n_Y^{(2)}(1, 2) \approx n_Y^{(2)}(1)n_Y^{(2)}(2)$ , mostrando-nos que realmente as correlações nas densidades de dipolos não são importantes neste regime. Contudo, estas correlações têm papel fundamental no regime diluto, onde  $n_Y^{(2)}$  é relativamente pequena e a evolução é dominada pelas flutuações. Para ver isso, vamos assumir que em  $Y = 0$  o sistema consiste de um dipolo  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  apenas. Assim,

$$n_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta^{(2)}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0), \quad (4.9)$$

com  $n_0^k = 0$  para  $k \geq 2$ . Após um passo de evolução em rapidez  $dY$ , o dipolo original pode decair em dois dipolos  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z})$  e  $(\mathbf{z}, \mathbf{y}_0)$  com probabilidade [30]

$$dP_{\text{decai}} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) d^2 \mathbf{z} dY. \quad (4.10)$$

Logo, se medirmos a densidade de pares (4.8) em  $Y = dY$  podemos encontrar um resultado não nulo visto que as coordenadas  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$  e  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$  dos dipolos medidos encontram-se com as coordenadas  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z})$  e  $(\mathbf{z}, \mathbf{y}_0)$  dos dois novos dipolos que fazem parte do sistema. Isto impõe a condição de que os dipolos medidos tenham uma coordenada em comum,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1$  ou  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1$ , como mostra a Fig.4.2, ou seja, os dipolos são adjacentes. Mas mesmo com esta condição satisfeita a densidade do par de dipolos  $n_{dY}^{(2)}$  permanece pequena, da ordem de  $\bar{\alpha}dY$ , em comparação com a densidade de um dipolo  $n_{dY}$ , a qual é de ordem um.



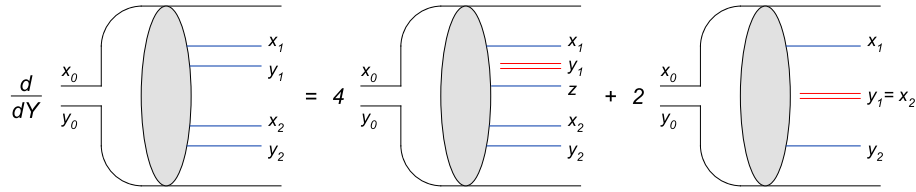
**Fig. 4.2:** Geometria do decaimento de um dipolo.

Vemos que, enquanto  $\bar{\alpha}dY \lesssim 1$ , as correlações entre pares de dipolos são pequenas, as quais são construídas por meio de decaimentos de dipolos no decorrer da evolução. Neste processo, a densidade  $n_Y$  age como uma fonte para correlações de mais alta ordem. Dada a forma (4.10) da probabilidade diferencial para um passo na evolução e a geometria do decaimento de um dipolo mostrada na Fig.4.2, temos que a variação na densidade de um par de dipolos, devida ao decaimento de um dos dipolos em  $n_Y$ , é da forma

$$\left. \frac{\partial n_Y^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)}{\partial Y} \right|_{\text{flut}} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{r_1^2 r_2^2} \left\{ \delta^{(2)}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_1) n_Y(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) + \delta^{(2)}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_1) n_Y(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) \right\}, \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2$  são os tamanhos dos dipolos medidos. Como mencionado, esta expressão descreve apenas a contribuição das “flutuações” à evolução de  $n_Y^{(2)}$ , na qual os dipolos medidos se originam de um mesmo dipolo através do decaimento deste. A equação geral para a evolução é obtida ao adicionarmos termos lineares em relação a  $n_Y^{(2)}$  na expressão (4.11), os quais descrevem a evolução BFKL para qualquer um dos dipolos medidos. Desta forma, a equação completa é

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_Y^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)}{\partial Y} = & \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \left[ \int d^2 \mathbf{z} \mathcal{M}_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}} \otimes n_Y^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \right. \\ & \left. + \mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) n_Y(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_1) \right] + \{1 \leftrightarrow 2\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$



**Fig. 4.3:** Um passo na evolução da densidade de um par de dipolos como descrito por (4.12). Os termos virtuais comuns na dinâmica BFKL não são mostrados.

onde

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) = \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_2)^2}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_2)^2} = \frac{(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)^2}{r_1^2 r_2^2}, \quad (4.13)$$

pois consideramos os dipolos adjacentes, com  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1$  neste caso e  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_2$  na parte onde  $\{1 \leftrightarrow 2\}$ .

Este comportamento está ilustrado na Fig.4.3 e fica claro que o termo de flutuações, proporcional a  $n_Y$ , controla o crescimento de  $n_Y^{(2)}$  no regime diluto, ao passo que os termos BFKL usuais, lineares em  $n_Y^{(2)}$ , dominam quando a densidade se torna grande. Podemos nos perguntar qual a importância das flutuações na densidade de número de dipolos para a física de saturação partônica, já que as contribuições destes termos são suprimidas no limite de altas densidades. Salientamos então que por “regime diluto” não devemos entender o regime descrito apenas por condições iniciais de baixa densidade: Não importa quão grande é a rapidez  $Y$  e portanto a densidade, sempre existirá uma cauda na distribuição de dipolos, correspondente a dipolos com tamanhos muito pequenos,  $r \ll 1/Q_s(Y)$ , onde a densidade é baixa e as flutuações desempenham importante papel. Pela subsequente evolução, as correlações que podem existir naquela cauda sofrem um aumento devido ao decaimento das correlações originais.

Podemos notar ainda que uma discussão similar aplica-se para uma equação que descreve a evolução das correlações entre  $k$ -pares de dipolos, ou seja, uma equação para  $n_Y^{(k)}$ , com  $k \geq 2$ .

Com isto vemos que o formalismo de dipolos fornece o referencial ideal para tratarmos as flutuações no número de partículas no regime diluto, no limite de grande número de cores (grande  $N_c$ ). Este tipo de correlação entre partículas não está incluído nas equações de Balitsky-JIMWLK e o objetivo da próxima seção é mostrar como é possível construir equações de evolução que incluam tanto os efeitos de flutuações para o regime diluto quanto as correlações responsáveis pela saturação partônica no limite de altas energias.

## 4.2 Equações de evolução na presença de flutuações e saturação

A fim de aproveitar a naturalidade com que as flutuações aparecem no formalismo de dipolos, vamos explorar a relação entre as densidades de dipolos e as amplitudes de espalhamento, visando transferir os efeitos das flutuações nas funções de onda do alvo para as equações de evolução em relação as amplitudes. Como veremos a seguir, no regime diluto,

onde as flutuações são importantes, as amplitudes são proporcionais às densidades de dipolos no alvo e se torna direta a tradução das equações desenvolvidas na seção anterior nas correspondentes equações para as amplitudes. Posteriormente estas últimas podem ser então estendidas ao limite de altas densidades (altas energias) pela simples adição dos termos não-lineares comuns as equações de Balitsky-JIMWLK e responsáveis pela saturação, já que as flutuações não devem mudar significativamente o comportamento não linear da evolução.

Começamos considerando o espalhamento entre um único dipolo externo — considerado o projétil — e um alvo diluto, cuja função de onda pode ser descrita em termos de dipolos de cor. Quando nos referimos à um alvo diluto deve-se entender a forma como o alvo é visto na escala de resolução do projétil, que é o seu tamanho transverso. Como resultado temos que o tamanho  $r$  do projétil é pequeno comparado ao comprimento de saturação  $1/Q_s(Y, \mathbf{b})$  do alvo num parâmetro de impacto  $\mathbf{b}$ , significando que o espalhamento entre o dipolo externo (o projétil) e o alvo serve como medida da densidade de dipolos (ou glúons) de tamanho  $r$  na função de onda do alvo, já que a amplitude de espalhamento dipolo-dipolo  $\mathcal{T}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{b} - \mathbf{b}_1)$  é quase local no espaço de fases transverso:  $\mathcal{T}_0 \sim \alpha_s^2$  quando os dois dipolos têm tamanhos similares e são relativamente próximos um do outro no espaço de parâmetro de impacto, mas diminui rapidamente para grandes separações entre os dipolos, *i.e.*,  $\mathcal{T}_0 \sim \alpha_s^2 r^2 r_1^2 / (\mathbf{b} - \mathbf{b}_1)^4$  para  $|\mathbf{b} - \mathbf{b}_1| \gg r_>$ , com  $r_> = \max(r, r_1)$ ; e para grandes disparidades entre seus respectivos tamanhos,  $\mathcal{T}_0 \sim \alpha_s^2 (r_</r_>)^2$ , onde agora  $r_< = \min(r, r_1)$ .

A amplitude de espalhamento para o processo descrito acima tem a forma

$$T_Y(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = \int d^2\mathbf{r}_1 \int d^2\mathbf{b}_1 \mathcal{T}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{b} - \mathbf{b}_1) n_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{b}_1), \quad (4.14)$$

onde  $n_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{b}_1)$  é a densidade do número de dipolos com tamanhos  $\mathbf{r}_1$  e parâmetros de impacto  $\mathbf{b}_1$  presentes na função de onda do alvo quando a rapidez na evolução é  $Y$ , e como já mencionado,  $\mathcal{T}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{b} - \mathbf{b}_1)$  é a amplitude de espalhamento entre dois dipolos elementares. As considerações feitas acima a respeito de  $\mathcal{T}_0$  equivalem a resolvê-la em ordem dominante — em ordem  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  — correspondendo à troca de dois glúons (ou a um pomeron BFKL) entre os dipolos, levam-nos a fazer  $\mathbf{b}_1 \rightarrow \mathbf{b}$  em  $n$  de tal forma que a integral em  $\mathbf{b}_1$  restante em (4.14) é aproximadamente igual a  $\alpha_s^2 r_<^2$ . A integral em  $\mathbf{r}_1$  restante é resolvida fazendo com que a densidade  $n$  seja descrita em ordem dominante pela equação BFKL, já que estamos num regime onde ela é válida para a descrição da evolução, fornecendo [58]

$$n_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{b}) \sim \frac{1}{r_1^4} (r_1^2 Q_c^2(\mathbf{b}, Y))^{\gamma_c}, \quad (4.15)$$

onde  $\gamma_c = 0.6275$ ,  $1 - \gamma_c$  é a chamada dimensão anômala que caracteriza o comportamento das soluções no regime diluto — como soluções da equação BFKL — e  $Q_c^2(\mathbf{b}, Y)^{\gamma_c} \propto e^{\lambda \bar{\alpha} Y}$  é uma linha, paralela à linha definida pela escala de saturação, que define a região de densidade constante no plano  $\ln(1/r_1) - Y$ . Inserindo (4.15) em (4.14) resulta que

$$T_Y(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \simeq \alpha_s^2 r^4 n_Y(\mathbf{r}, \mathbf{b}). \quad (4.16)$$

A expressão (4.16) pode ser estendida para o espalhamento entre dois ou mais dipolos externos — que compõem o projétil — bastando notar que em um evento particular a



amplitude de espalhamento para um sistema formado por muitos dipolos é igual ao produto das amplitudes individuais para cada dipolo. Para dois dipolos temos [58]

$$\begin{aligned} T_Y^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{b}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{b}_2) &= T_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{b}_1) T_Y(\mathbf{r}_2, \mathbf{b}_2) \\ &\simeq \alpha_s^4 r_1^4 r_2^4 : n_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{b}_1) n_Y(\mathbf{r}_2, \mathbf{b}_2) :, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde o produto ordenado permanece, pela mesma razão que apareceu na seção anterior, para evitar que os dois dipolos que formam o projétil espalhem simultaneamente um mesmo dipolo no alvo.

Usando as equações (4.17) e (4.16) juntamente com as densidades de dipolos no alvo  $n_Y$  e  $n_Y^{(2)}$  estabelecidas na seção anterior, podemos obter equações de evolução para as amplitudes médias. Relacionando (4.6) e (4.16) temos que a amplitude de espalhamento entre um único dipolo e o alvo,  $\langle T(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \rangle_Y \equiv \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ , é descrita pela equação BFKL — em sua representação dipolar — como esperado para o regime diluto da evolução, que é exatamente a equação (4.6) para a amplitude  $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y$ . Esta expressão pode ser estendida ao regime de alta-densidade, onde a dinâmica BFKL falha, pela simples adição dos termos de correlação responsáveis pela saturação partônica, como ocorre nas equações de Balitsky-JIMWLK. No caso considerado acima, este termo é  $\langle -T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) T(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \equiv -\langle T^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y$  e a equação considerada se torna idêntica a primeira equação da hierarquia de Balitsky

$$\frac{\partial \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y}{\partial Y} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \left\{ \int d^2 z \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} \otimes \langle T_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_Y - \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \langle T^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \mathbf{z}, \mathbf{y}) \rangle_Y \right\}. \quad (4.18)$$

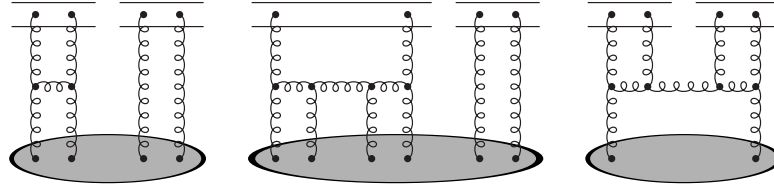
Seja agora a amplitude para o espalhamento de dois dipolos e o alvo

$$\langle T^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \rangle \equiv \langle T(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) T(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \rangle. \quad (4.19)$$

No regime diluto esta obedece a evolução descrita pela combinação de (4.17) e (4.12), enquanto que no regime de altas densidades a evolução deve conter ainda termos não lineares — proporcionais a  $\langle T^{(3)} \rangle_Y$  neste caso — responsáveis pelas correções de unitariedade. Com isto, temos que [58, 59]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle T^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \rangle_Y}{\partial Y} &= \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \left\{ \int d^2 z \left[ \mathcal{M}_{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}} \otimes \langle T^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \rangle_Y \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}) \langle T^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}; \mathbf{z}, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \rangle_Y \right] \right. \\ &\quad \left. + \kappa \alpha_s^2 \mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) \langle T(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \rangle_Y \delta^{(2)}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_1) \right\} + \{1 \leftrightarrow 2\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Na expressão acima, as duas primeiras linhas são iguais à correspondente equação de Balitsky — a segunda na hierarquia — enquanto que a terceira linha, com dependência em  $\langle T \rangle_Y$ , define o comportamento das flutuações no número de partículas no alvo. O fator de incerteza  $\kappa$  é de ordem  $\mathcal{O}(1)$  e foi colocado devido ao nosso desconhecimento da relação



**Fig. 4.4:** Diagramas contribuindo na evolução da amplitude  $T^{(2)}$ : um termo linear — BFKL, proporcional a  $T^{(2)}$ , um termo de fusão de glúons — BK, proporcional a  $T^{(3)}$ , e um termo de desdobramento de glúons proporcional a  $T$ .

exata entre as amplitudes de espalhamento  $T$  e as densidades de dipolos  $n$  no alvo, como já expresso nas relações (4.16) e (4.17).

A expressão (4.20) para a amplitude  $T^{(2)}$  pode ser visualizada de maneira fácil em termos de diagramas, como ilustra a Fig.4.4. Nesta figura, o diagrama à esquerda representa os termos lineares para a troca de diagramas escadas — pomerons QCD — entre o projétil e o alvo, correspondendo ao crescimento nas densidades de pártons e proporcional a  $T^{(2)}$ . No termo intermediário, vemos as recombinações de glúons responsáveis pela saturação partônica e proporcionais a  $T^{(3)}$ . Por fim, o último e novo termo, que considera o desdobramento de glúons e corresponde as flutuações, introduzindo uma contribuição proporcional a  $T$  na evolução de  $T^{(2)}$ .

As equações de mais altas ordens na hierarquia são obtidas de maneira análoga. Assim a  $k$ -ésima equação, para a amplitude de  $k$  dipolos  $\langle T^{(k)} \rangle_Y$ , será proporcional a um termo BFKL  $\langle T^{(k)} \rangle_Y$ , um termo de saturação  $\langle T^{(k+1)} \rangle_Y$  e um termo de flutuação  $\langle T^{(k-1)} \rangle_Y$ . Os termos de saturação e flutuação servem como sementes para a formação de laços de pomerons — na aproximação de troca de dois glúons, ou pomeron QCD: as flutuações correspondem a termos de emissão de pomerons, enquanto que a saturação corresponde a termos de recombinação ou fusão de pomerons. Com a adição destes dois tipos de termos, a hierarquia completa forma as chamadas equações de evolução de laços de pomerons.

### 4.3 Uma equação de Langevin para a evolução na presença de flutuações

As equações para laços de pomerons obtidas na seção anterior formam uma hierarquia, a qual é difícil de se trabalhar como um todo. Entretanto, esta hierarquia pode ser reformulada como uma única equação de Langevin estocástica, cuja manipulação é mais fácil e que pode ser usada para a obtenção de informações macroscópicas do sistema, com ajuda de equações da física estatística, como feito no capítulo anterior no caso da equação BK. A fim de obter a equação de Langevin, devemos supor que as amplitudes de espalhamento são quase locais sobre o parâmetro de impacto  $\mathbf{b}$ , o que implica em considerar o alvo como sendo quase homogêneo para distâncias da ordem do tamanho do dipolo externo que o prova. Esta é uma boa aproximação no sentido da obtenção de informações a respeito da aproximação ao regime de saturação pela amplitude de espalhamento e para estudar a dependência em

energia da escala de saturação que determina o início deste regime, mas com isto não podemos calcular seções de choque totais, que dependem explicitamente do parâmetro de impacto.

Sob esta aproximação todos os termos nas equações anteriores, exceto os termos de flutuações, se tornam locais em  $\mathbf{b}$ . A presença das funções delta impedem que os termos responsáveis pelas flutuações se tornem locais no parâmetro de impacto, mas podemos tratar estes termos localmente no espaço de parâmetro de impacto supondo este espaço como discreto, como veremos a seguir. Trabalhando no espaço de momentum, com

$$\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{b}) = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi r^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(\mathbf{r}, \mathbf{b}), \quad (4.21)$$

resulta que os termos não lineares nas equações de evolução se tornam locais em  $\mathbf{k}$ . Assim, a evolução de  $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \equiv \langle T(\mathbf{r}\mathbf{b}) \rangle$ , dada por (4.18), tem a seguinte forma no espaço de momentum [58]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{b}) \rangle_Y}{\partial Y} = & \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{\pi} \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{p}^2(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2} \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{k}^2} \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{b}) - \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{b}) \right\rangle_Y \\ & - \bar{\alpha} \langle \varphi^2(\mathbf{k}, \mathbf{b}) \rangle_Y. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A expressão para  $\langle T^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \rangle_Y$ , como visto na seção anterior, é semelhante a expressão para  $\langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ , e portanto terá uma parte semelhante a (4.22), mais um termo de flutuação, que é dado no espaço de momentum por [58]

$$\left. \frac{\partial \langle \varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{b}_1) \varphi(\mathbf{k}_2, \mathbf{b}_2) \rangle_Y}{\partial Y} \right|_{\text{flut}} = \bar{\alpha} 2\kappa \alpha_s^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \int \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi r^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \langle T(\mathbf{r}, \mathbf{b}_1) \rangle_Y \delta^{(2)}\left(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{r}}{2}\right). \quad (4.23)$$

Como vemos, a presença da função delta, que impõe a adjacência dos dipolos com parâmetros de impacto  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$ , impede que o termo de flutuações em (4.23) seja local sobre o parâmetro de impacto  $\mathbf{b}$ . A fim de tornar este termo local em  $\mathbf{b}$  aproximamos o espaço de parâmetro de impacto como discreto, o que é razoável do ponto de vista físico, já que o dipolo externo — presente no projétil — não pode distinguir detalhes do alvo muito maiores que seu tamanho  $r$ . No espaço de momentum isto significa discretizar o espaço em células de área  $1/k^2$ , e tomar a média da amplitude de espalhamento sobre cada uma destas células. Desta forma,

$$\varphi_i(\mathbf{k}) \equiv k^2 \int_{\Sigma_i(\mathbf{k})} d^2\mathbf{b} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{b}), \quad \varphi_i^2(\mathbf{k}) \equiv k^2 \int_{\Sigma_i(\mathbf{k})} d^2\mathbf{b} \varphi^2(\mathbf{k}, \mathbf{b}), \quad \dots \quad (4.24)$$

onde  $\Sigma_i(\mathbf{k}) \sim 1/k^2$  é a área de cada célula. Tomar estas quantidades se torna equivalente a tomar o valor das mesmas no centro de cada célula, pois consideramos que o alvo é quase homogêneo em relação ao dipolo com o qual interage. Logo, fazemos  $\varphi_i(\mathbf{k}) \approx \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{b}_i)$  e  $\varphi_i^2(\mathbf{k}) \approx [\varphi_i(\mathbf{k})]^2$ , de forma que a discretização do espaço de parâmetro de impacto não leva a maiores correlações do que as já existentes para as amplitudes  $\varphi$ .

Com isto, integramos o termo de flutuação (4.23) sobre  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$ , de forma que este se torna (notando que a multiplicação por  $k_j^2$ ,  $j = 1, 2$ , seguida da integração sobre a área  $\sum_i(k_j) \sim 1/k_j^2$  no espaço de parâmetro de impacto é aproximadamente igual a unidade e que  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$  neste caso)

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \langle \varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{b}_1) \varphi(\mathbf{k}_2, \mathbf{b}_2) \rangle_Y}{\partial Y} \right|_{\text{flut}} &= \bar{\alpha} 2\kappa \alpha_s^2 k_1^4 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \int_{\Sigma_i(\mathbf{k}_1)} d^2\mathbf{b}_1 \int_{\Sigma_i(\mathbf{k}_1)} d^2\mathbf{b}_2 \int \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi r^2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \\
 &\quad \times \langle T(\mathbf{r}, \mathbf{b}_1) \rangle_Y \delta^{(2)}\left(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \\
 &= \bar{\alpha} 2\kappa \alpha_s^2 k_1^4 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \int_{\Sigma_i(\mathbf{k}_1)} d^2\mathbf{b}_1 \int \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi r^2} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \langle T(\mathbf{r}, \mathbf{b}_1) \rangle_Y \\
 &= \bar{\alpha} 2\kappa \alpha_s^2 k_1^4 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \int_{\Sigma_i(\mathbf{k}_1)} d^2\mathbf{b}_1 \langle \varphi(\mathbf{k}_1, \mathbf{b}_1) \rangle_Y \\
 &= \bar{\alpha} 2\kappa \alpha_s^2 k_1^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \langle \varphi_i(\mathbf{k}_1) \rangle_Y.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Agora podemos escrever as duas primeiras equações para a hierarquia, dentro da aproximação em termos de células no espaço de parâmetro de impacto, segundo o qual as amplitudes de espalhamento se referem a quantidades dentro de cada célula  $i$ :

$$\frac{\partial \langle \varphi_i(\mathbf{k}) \rangle_Y}{\partial Y} = \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{2\pi} \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{p}^2(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2} \left\langle 2 \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{k}^2} \varphi_i(\mathbf{p}) - \varphi_i(\mathbf{k}) \right\rangle_Y - \bar{\alpha} \langle \varphi_i^2(\mathbf{k}) \rangle_Y \tag{4.26}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \varphi_i(\mathbf{k}_1) \varphi_i(\mathbf{k}_2) \rangle_Y}{\partial Y} &= \bar{\alpha} \left\{ \int \frac{d^2\mathbf{p}}{2\pi} \frac{\mathbf{k}_1^2}{\mathbf{p}^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p})^2} \left\langle \left( 2 \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{k}_1^2} \varphi_i(\mathbf{p}) - \varphi_i(\mathbf{k}_1) \right) \varphi_i(\mathbf{k}_2) \right\rangle_Y \right. \\
 &\quad \left. - \langle \varphi_i^2(\mathbf{k}_1) \varphi_i(\mathbf{k}_2) \rangle_Y + \kappa \alpha_s^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_1^2 \langle \varphi_i(\mathbf{k}_1) \rangle_Y \right\} + \{1 \leftrightarrow 2\}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

A aproximação em células é válida para mais altas ordens, sempre fornecendo equações locais no parâmetro de impacto, ou seja, as equações sempre envolverão operadores atuando dentro de uma célula. Abandonaremos a notação em  $i$  para designar as células, pois não existe acoplamento entre estas, de forma que a equação de Langevin que descreve a hierarquia para uma célula é dada por [58]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi(\mathbf{k})}{\partial Y} &= \bar{\alpha} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{2\pi} \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{p}^2(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2} \left( 2 \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{k}^2} \varphi(\mathbf{p}) - \varphi(\mathbf{k}) \right) - \bar{\alpha} \varphi^2(\mathbf{k}) \\
 &\quad + \bar{\alpha} \sqrt{2\kappa \alpha_s^2 \varphi(\mathbf{k})} \nu(\mathbf{k}),
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

onde  $\nu(\mathbf{k}, Y)$  é um ruído branco gaussiano que satisfaz:

$$\begin{aligned}
 \langle \nu(\mathbf{k}, Y) \rangle &= 0 \\
 \langle \nu(\mathbf{k}_1, Y_1), \nu(\mathbf{k}_2, Y_2) \rangle &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \delta(Y_1 - Y_2) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_1^2.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Esta equação deve ser entendida através de uma discretização em rapidez do tipo Ito [61,62], uma vez que uma equação de Langevin não é diferenciável. A primeira linha em (4.28) pode ser reconhecida como a equação BK no espaço de momentum [31,32], enquanto que o termo de ruído na segunda linha é responsável pelos desvios do comportamento de campo médio — da equação BK — ou, analogamente, aos efeitos de flutuações no número de partículas no alvo. Para ficar mais clara a correspondência entre (4.28) e a equação BK no espaço de momentum, salientamos que a integral no lado direito da expressão anterior pode ser escrita em termos de um operador diferencial identificado como o núcleo da equação BFKL. Com isto, podemos escrever (4.28) como

$$\partial_Y \varphi(\mathbf{k}) = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \varphi(\mathbf{k}) - \bar{\alpha} \varphi^2(\mathbf{k}) + \bar{\alpha} \sqrt{2\kappa\alpha_s^2 \varphi(\mathbf{k})} \nu(\mathbf{k}), \quad (4.30)$$

onde  $L = \log(k^2/k_0^2)$ , sendo  $k_0$  uma escala de referência e  $\chi(-\partial_L)$  é o núcleo da equação BFKL, como em (3.10).

### 4.3.1 Conexão com a física estatística

No capítulo anterior, usamos a física estatística para a obtenção de importantes informações a respeito das soluções da equação de evolução de Balitsky e Kovchegov. Novamente, uma conexão com a conhecida equação FKPP, agora em sua forma estocástica, é muito útil para uma análise macroscópica do sistema, já que a análise microscópica da hierarquia de equações para laços de pomerons é um tanto complicada. Além disso, a análise macroscópica se mostrou muito satisfatória na descrição dos dados através da modelagem feita no capítulo anterior.

Para mostrar a equivalência entre a equação de Langevin (4.30) e a equação FKPP estocástica, temos de usar a aproximação difusiva para o núcleo da equação BFKL, analogamente ao que fizemos para a equação FKPP determinística no capítulo anterior. Assim, expandindo  $\chi(-\partial_L)$  até segunda ordem como em (3.32) e substituindo em (4.30) resulta que ( $\tau = \bar{\alpha}Y$ ,  $\rho \equiv L = \log(k^2/k_0^2)$ ):

$$\partial_\tau \varphi_\tau(\rho) = (-\lambda \partial_\rho + D(-\partial_\rho - \gamma_c)^2) \varphi_\tau(\rho) - \bar{\alpha} \varphi_\tau^2(\rho) + \sqrt{2\kappa\alpha_s^2 \varphi_\tau(\rho)} \nu_\tau(\rho), \quad (4.31)$$

onde  $\lambda \equiv \bar{\alpha}v_c = \bar{\alpha}\chi(\gamma_c)/\gamma_c$ ,  $D = \chi''(\gamma_c)/2$ . O ruído branco gaussiano agora obedece as relações

$$\langle \nu(\rho, \tau) \rangle = 0, \quad \langle \nu(\rho_1, \tau_1), \nu(\rho_2, \tau_2) \rangle = \frac{1}{\pi} \delta(\tau_1 - \tau_2) \delta(\rho_1 - \rho_2). \quad (4.32)$$

A equação (4.31) é semelhante àquela que obtivemos no capítulo anterior para a equação BK na aproximação difusiva, agora com a adição de um termo de ruído, responsável pelas flutuações. Naquele momento mostramos que a equação BK está na mesma classe de equivalência que a equação FKPP determinística, de onde verificamos a natureza escalada das soluções de tal equação. Perante as mesmas trocas de variáveis e mais uma para o termo de ruído, *i.e.*, perante as transformações

$$x \rightarrow \rho, \quad t \rightarrow \bar{\alpha}\tau, \quad N \rightarrow 1/\alpha_s^2, \quad u(x, t) \rightarrow \varphi_\tau(\rho), \quad (4.33)$$

a equação de Langevin (4.31) se torna equivalente à equação FKPP estocástica

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t)(1 - u(x, t)) + \sqrt{\frac{2}{N} u(x, t)(1 - u(x, t))} \nu(x, t), \quad (4.34)$$

onde

$$\langle \nu(x, t) \rangle = 0, \quad \langle \nu(x_1, t_1), \nu(x_2, t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_2). \quad (4.35)$$

Em um problema de reação-difusão,  $u(x, t)$  representa a concentração de partículas no sítio  $x$  e ao tempo  $t$ , enquanto que  $N$  representa o número de ocupação máximo por sítio (número de partículas por sítio na região saturada). Na analogia com o problema da QCD, a amplitude  $\varphi_\tau(\rho)$  corresponde à densidade de partículas por sítio  $u(x, t)$ , ao passo que  $1/\alpha_s^2$  faz o papel de  $N$ , o que é esperado, pois  $n \sim 1/\alpha_s^2$  é reconhecida como a densidade de dipolos na região de saturação. A aproximação de campo médio, descrita pela equação FKPP determinística e portanto pela equação BK, é obtida no limite onde os números de ocupação são grandes, *i.e.*,  $N \rightarrow \infty$  no modelo de partículas e  $\alpha_s^2 \rightarrow 0$  no problema de QCD.

A equação sFKPP (4.34), embora mais simples que a equação de Langevin (4.28), é ainda complicada pelo fato de conter simultaneamente um termo não linear devido a recombinações e um termo de ruído multiplicativo. Entretanto, esta equação foi muito estudada em problemas de física estatística (boas revisões podem ser encontradas em [64, 65]), com resultados que podem ser adaptados aos problemas de QCD de nosso interesse. Vamos agora revisar tais resultados e suas implicações ao nosso problema. Para isso nos basearemos nos resultados obtidos, por simulação numérica e também por meio de argumentos analíticos, por Brunet e Derrida em [50, 66, 67], considerando a evolução temporal de um sistema de partículas com número de ocupação discreto. Uma propriedade interessante obtida nestes trabalhos é que a velocidade assintótica da frente de onda  $v_N$  converge para o valor de campo médio  $v_c$  apenas logaritmicamente com relação ao número de ocupação  $N$ .

Para argumentar como isto ocorre, Brunet e Derrida consideraram que a dinâmica destas frentes de onda, na presença de discreteza e para  $N \gg 1$ , pode ser descrita por uma versão modificada da equação FKPP, para a qual o termo linear — responsável pelo crescimento na densidade de partículas — é desprezado quando a concentração  $u(x, t)$  se torna menor que o seu valor mínimo (no caso onde o número de partículas é considerado discreto)  $u(x, t) < 1/N$ . Assim, a dinâmica pode ser descrita por

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t) (1 - u(x, t)) \Theta(1 - \kappa/N). \quad (4.36)$$

Analizando a versão linearizada de (4.36) os autores obtiveram [50, 66, 67]:

$$v_N = v_c - \frac{\pi^2 \gamma_c^2 v''(\gamma_c)}{2 \ln^2 N} + \mathcal{O}(1/\ln^3 N), \quad (4.37)$$

onde  $v(\gamma)$  é dada pela relação de dispersão (3.27) para a versão linearizada da equação FKPP e  $\gamma_c$  é a declividade crítica correspondente à velocidade mínima  $v_c$ , que é também a velocidade física das frentes de onda propagantes na aproximação de campo médio, para condições iniciais suficientemente abruptas.

Esta equação pode ser traduzida para a QCD fazendo  $1/N \rightarrow \alpha_s^2$ , com a notação  $v(\gamma) \rightarrow \lambda(\gamma)$  para discernirmos entre os modelos de partículas e o problema de QCD. Como resultado temos que a velocidade das frentes na presença de flutuações no número de partículas é [68, 69]:

$$\lambda^* = \lambda - \frac{\pi^2 \gamma_c \lambda''(\gamma_c)}{2 \ln^2(1/\alpha_s^2)}, \quad \text{para} \quad \alpha_s \ll 1, \quad (4.38)$$

onde designamos  $\lambda^*$  como a velocidade de propagação — no problema de QCD — para as frentes de ondas estocásticas, características dos modelos com número de partículas discretos. O primeiro termo em (4.38) corresponde ao valor para a velocidade das frentes na descrição de campo médio, ou seja, às predições da equação BK. Por outro lado, o termo de correção à direita desta equação é muito grande, não só pelo fato de  $\alpha_s^2 \rightarrow 0$ , mas também porque o coeficiente  $\mathcal{C} = \pi^2 \gamma_c \chi''(\gamma_c)/2 \approx 150$  é alto, de forma que este termo de correção só pode ser conhecido para valores extremamente pequenos de  $\alpha_s$ , o que é fisicamente irreal.

O comprimento das frentes individuais pode ser estimado a partir da descrição de campo médio, que pode ser aplicada em todos os pontos exceto na vizinhança da cauda da frente, onde  $\varphi \simeq \alpha_s^2$ . Nesta região o termo de ruído é importante e a descrição de campo médio não é suficiente. Assim, o comprimento das frentes é a quantidade  $\Delta\rho = \rho - \rho_s$  para a qual a amplitude diminui de um valor  $\varphi(\rho_s) \sim 1$  até o valor  $\varphi(\rho_s) \sim \alpha_s^2$ . Com a forma conhecida para as frentes obtidas no capítulo anterior, estima-se  $\Delta\rho \sim (1/\gamma_c) \ln(1/\alpha_s^2)$  [68,69].

Por outro lado, devido às flutuações presentes no termo de ruído para a evolução, diferentes realizações da mesma evolução levarão a um *ensemble* de frentes, todas com a mesma forma e deslocadas umas das outras no plano- $\rho$ . Ou seja, a posição  $\rho_s$  da frente é uma variável aleatória caracterizada por um valor esperado  $\langle \rho_s(\tau) \rangle$ , com

$$\langle \rho_s(\tau) \rangle \simeq \lambda^* \tau, \quad \text{para} \quad \tau \gg \ln^2(1/\alpha_s^2), \quad (4.39)$$

mas também por uma dispersão  $\sigma^2 = \langle \rho_s^2 \rangle - \langle \rho_s \rangle^2$ . Fisicamente, essa dispersão origina o que se chama na literatura de flutuações raras: em uma realização particular da evolução um pequeno dipolo pode ser criado, o qual após em sua evolução deverá puxar todas as frentes atrás dele para longe dos valores típicos da evolução, resultando em uma escala de saturação  $\rho_s(\tau)$ , para esta realização, que é maior que o valor médio  $\langle \rho_s(\tau) \rangle$  [60].

Para entender a evolução do ensemble de frentes em QCD vamos, novamente, usar a correspondência com estudos da física estatística. Estes estudos mostram que a posição  $\rho_s$  da frente executa uma caminhada aleatória em relação ao seu valor médio, tal que sua dispersão cresce linearmente com  $\tau$ :  $\sigma^2 \simeq D\tau$ , onde  $D$  é o coeficiente de difusão das frentes. Simulações numéricas da equação sFKPP confirmam este comportamento, além de prever que o coeficiente de difusão  $D$  é escalado de acordo com  $1/\ln^3 N$ , para  $N \gg 1$ . Para as variáveis da QCD isto implica [69]

$$D \simeq \frac{\mathcal{D}}{\ln^3(1/\alpha_s^2)}, \quad \text{para} \quad \alpha_s \ll 1, \quad (4.40)$$

onde  $\mathcal{D}$  é um coeficiente desconhecido. Esta expressão implica em  $D \rightarrow 0$  quando  $\alpha_s \rightarrow 0$ .

Outra propriedade muito importante advinda das flutuações diz respeito a amplitude física, que deve ser tomada como a média das amplitudes individuais sobre a escala de saturação estocástica  $\rho_s$ :

$$\langle \varphi(\rho) \rangle_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s P(\rho_s, \tau) \varphi(\rho, \rho_s), \quad (4.41)$$

onde  $P(\rho_s, \tau)$  é a distribuição de probabilidade para a escala de saturação  $\rho_s$ , a qual, como

demonstrada no apêndice B, é uma Gaussiana:

$$P(\rho_s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(\tau)} \exp \left[ -\frac{(\rho_s - \langle \rho_s \rangle_\tau)^2}{\sigma^2(\tau)} \right], \quad (4.42)$$

e  $\varphi(\rho, \rho_s)$  é a forma das frentes individuais. Usando uma forma simples para as amplitudes destas frentes, que interpolam os comportamentos  $\varphi = 1$  para  $\rho \leq \rho_s$  e  $\varphi \simeq e^{-\gamma_c(\rho - \rho_s)}$  para  $\rho \geq \rho_s$ , é possível mostrar que, para energias suficientemente altas ( $\sigma \gg 1$ ), a amplitude média obedece a seguinte lei de escalamento [69]:

$$\langle \varphi(\rho) \rangle_\tau \simeq \varphi \left( \frac{\rho - \langle \rho_s \rangle_\tau}{\sqrt{\tau / \ln^3(1/\alpha_s^2)}} \right) \simeq \varphi \left( \frac{\rho - \langle \rho_s \rangle_\tau}{\sqrt{\tau D}} \right), \quad (4.43)$$

também chamado *escalamento difusivo*. Assim, vemos que neste regime de energia o escalamento geométrico é substituído pelo escalamento difusivo (4.43), ou seja, com o aumento da energia, a forma da amplitude média se torna cada vez mais suave em relação a  $\rho_s$ .

## 4.4 Flutuações no modelo AGBS

Agora que o arcabouço teórico envolvendo a presença de flutuações na evolução das amplitudes — de dipolos — foi apresentado, podemos partir para a investigação dos seus efeitos sobre o modelo para a amplitude de espalhamento dipolo-próton, apresentado no capítulo 3. Tal modelo, que chamamos modelo AGBS, foi construído com base na correspondência entre a equação BK e a equação FKPP e portanto descreve o que chamamos anteriormente de aproximação de campo médio para a hierarquia infinita de equações para a evolução. Como visto nas seções anteriores, esta descrição não incorpora os efeitos de flutuações no número de partículas e são justamente tais efeitos que devemos incluir no modelo a partir de agora.

Antes vamos relembrar a forma predita para a amplitude no modelo AGBS. Este modelo faz uma interpolação analítica entre as soluções assintóticas da equação BK no espaço de momentum, para o regime diluto e a transformada de Fourier de uma função  $\Theta$  para o regime saturado, pois nesta região é esperado que a amplitude seja de ordem 1. Usando a notação  $\rho = \ln(k^2/k_0^2)$ ,  $\rho_s = \ln(k_0^2/Q_s^2(Y))$ , temos que o modelo é dado por

$$\tilde{T}^{\text{AGBS}}(\rho, Y) = L_F (1 - e^{-T_{\text{dil}}}), \quad (4.44)$$

onde

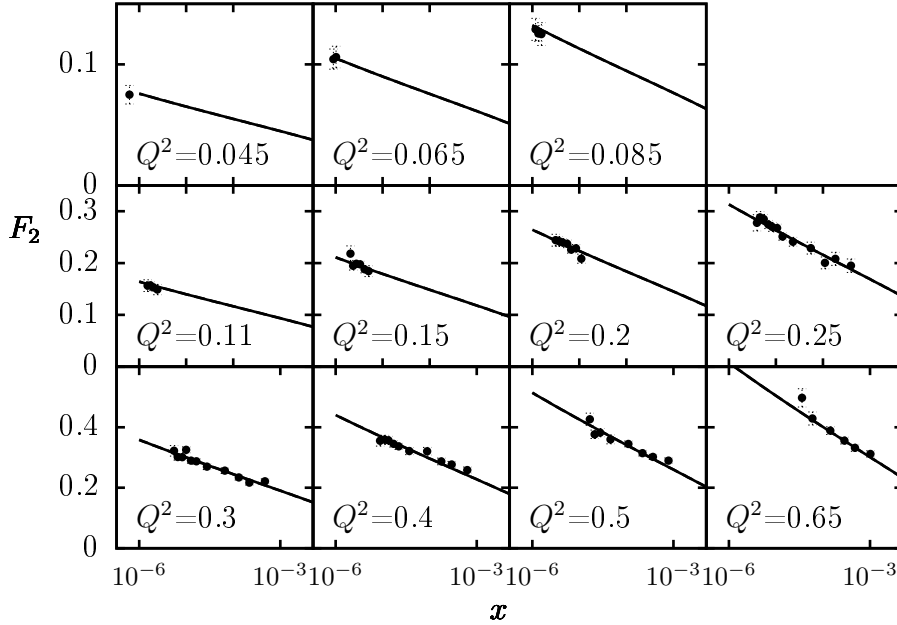
$$T_{\text{dil}} = \exp \left[ -\gamma_c (\rho - \rho_s) - \frac{\mathcal{L}^2 - \log^2(2)}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right], \quad (4.45)$$

$$\mathcal{L} = \ln [1 + e^{(\rho - \rho_s)}] \quad \text{com} \quad Q_s^2(Y) = k_0^2 e^{\lambda Y}, \quad (4.46)$$

e

$$L_F = 1 + \ln \left[ e^{\frac{1}{2}(\rho - \rho_s)} + e^{-\frac{1}{2}(\rho - \rho_s)} \right]. \quad (4.47)$$





**Fig. 4.5:** *Predições para os dados de H1 [51] e ZEUS [52, 53] para a função de estrutura do próton em função de  $x$  para pequenos valores de  $Q^2$ , dados em  $\text{GeV}^2$ . O ajuste foi realizado para massas  $m_{u,d,s} = 140 \text{ MeV}$  [70].*

Esta amplitude deve ser usada como amplitude de frentes individuais na expressão para a amplitude média, a qual é dada por (veja 4.41)

$$\left\langle \tilde{T}^{\text{AGBS}}(\rho) \right\rangle_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho_s P(\rho_s, Y) \tilde{T}_Y^{\text{AGBS}}(\rho, \rho_s). \quad (4.48)$$

Devido a forma complicada da amplitude AGBS se torna difícil a obtenção de uma solução analítica para a amplitude média (4.48), de forma que tal amplitude foi resolvida numericamente no decorrer do trabalho. Esta expressão deve ser substituída na expressão para a função de estrutura do próton [42]

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 \tilde{T}(k, Y), \quad (4.49)$$

a fim de reproduzir os as medidas de DIS no acelerador HERA para a função de estrutura  $F_2$ , com os efeitos de flutuações incluídos.

#### 4.4.1 Ajuste aos dados e resultados

Na análise que realizamos [70], todos os últimos dados do colisor HERA para a função de estrutura do próton  $F_2$ , advindos das colaborações H1 e ZEUS [51–53], foram usados

para o procedimento de ajuste, dentro do seguinte regime cinemático:

$$x \leq 0.01, \quad (4.50)$$

$$0.045 \leq Q^2 \leq 150 \text{ GeV}^2, \quad (4.51)$$

o qual corresponde a um total de 279 pontos de dados. Ambos regimes permitem valores da variável de Bjorken  $x$  pequenos o suficiente para garantirmos um análise no limite de altas energias, e valores de virtualidade  $Q^2$  tais que não são necessárias inclusões de correções à equação DGLAP no modelo. Por outro lado, consideramos apenas a contribuição de quarks leves para o ajuste, com duas possibilidades de massas:  $m_{u,d,s} = 50$  e  $140$  MeV. Além disso, como é usual na literatura, os dados de H1 foram reescalados por um fator que varia de 1 até 1.05, o que está dentro da incerteza de normalização de 5% dos dados desta colaboração.

Em relação aos parâmetros temos de tomar alguns cuidados. Como mencionado na seção anterior, as quantidades  $\lambda^*$  e  $D$ , que descrevem respectivamente a velocidade assintótica de propagação das frentes individuais e o coeficiente de difusão das mesmas, são conhecidas apenas no limite não físico  $\alpha_s^2 \rightarrow 0$ , de forma que devem ser deixados livres no procedimento de ajuste aos dados. De fato é esperado um valor menor do que o obtido via aproximação de campo médio, devido a presença de flutuações, como previsto pela equação (4.38). Além dos já citados, os parâmetros  $k_0^2$ ,  $\chi''(\gamma_c)$  descrevendo a escala macia (do regime diluto) e a derivada segunda do núcleo BFKL, respectivamente, foram deixados livres, juntamente com o raio do próton  $R_p$  que fixa a normalização da função de estrutura do próton. Foram mantidos fixos os parâmetros  $\bar{\alpha} = 0.2$ , que entra na amplitude — e principalmente na escala de saturação — através da expressão para  $\lambda$ , e  $\gamma_c = 0.6275$ , valor obtido do núcleo da equação BFKL em ordem dominante.

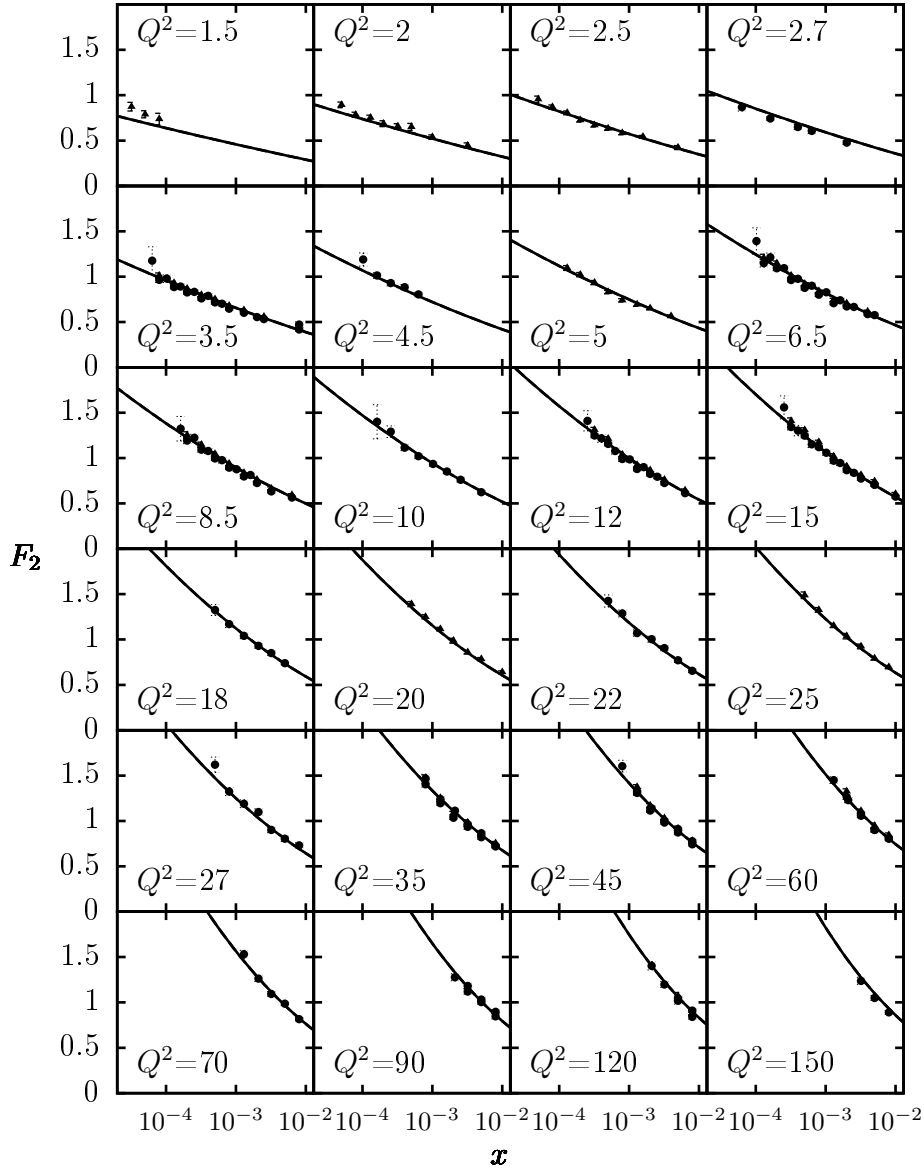
	$\chi^2/\text{n.o.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	$\lambda$	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	$D (\times 10^{-2})$
$\tilde{T}_Y^{\text{AGBS}}$	0.949	$3.79 \pm 0.30$	$0.213 \pm 0.003$	$3.576 \pm 0.059$	$4.69 \pm 0.23$	0
$\langle \tilde{T}_Y^{\text{AGBS}} \rangle$	0.949	$3.79 \pm 0.30$	$0.213 \pm 0.003$	$3.576 \pm 0.059$	$4.69 \pm 0.23$	$0.0 \pm 1.1$

**Tab. 4.1:** Parâmetros obtidos do ajuste aos dados de H1 e ZEUS [51–53] para  $F_2$  no caso onde  $m_{u,d,s} = 50$  MeV.

	$\chi^2/\text{n.o.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	$\lambda$	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	$D (\times 10^{-3})$
$\tilde{T}_Y^{\text{AGBS}}$	0.942	$1.69 \pm 0.16$	$0.176 \pm 0.004$	$4.83 \pm 0.12$	$6.43 \pm 0.29$	0
$\langle \tilde{T}_Y^{\text{AGBS}} \rangle$	0.942	$1.69 \pm 0.16$	$0.176 \pm 0.004$	$4.83 \pm 0.12$	$6.43 \pm 0.29$	$0.0 \pm 9.6$

**Tab. 4.2:** Parâmetros obtidos do ajuste aos dados de H1 e ZEUS [51–53] para  $F_2$  no caso onde  $m_{u,d,s} = 140$  MeV.

As figuras 4.5 e 4.6 mostram a função de estrutura do próton  $F_2$ , para valores pequenos e moderados de virtualidade  $Q^2$ , respectivamente. As tabelas 4.1 e 4.2 mostram os parâmetros obtidos do ajuste para diferentes massas dos quarks e nos casos com e sem flutuações incluídas, para fins de comparação. O caso sem flutuações corresponde à linha superior de cada tabela, quando  $D = 0$ . O ajuste obtido é considerado muito bom, como podemos notar pelo valor de  $\chi^2/\text{n.o.p}$  nas tabelas 4.1 e 4.2 e também pelas figuras 4.5 e 4.6.



**Fig. 4.6:** *Predições para os dados de H1 [51] e ZEUS [52, 53] para a função de estrutura do próton em função de  $x$  para valores moderados de  $Q^2$ , dados em  $\text{GeV}^2$ . O ajuste foi realizado para massas  $m_{u,d,s} = 140 \text{ MeV}$  [70].*

Comparando os ajustes, nos casos com e sem flutuações incluídas no modelo, vemos que nem os valores de  $\chi^2/\text{n.o.p}$  tampouco os valores dos parâmetros mudam. Especialmente no caso do coeficiente de difusão  $D$ , que é o indício da presença de flutuações, encontramos um valor  $D = 0$  no modelo com flutuações, quando este foi deixado livre para variar. Desta forma, podemos concluir que não existem evidências da presença de flutuações nos

experimentos de DIS para as energias de HERA, no referencial do modelo AGBS.

	$\chi^2/\text{n.o.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	$\lambda$	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	$D$
$\tilde{T}_Y^{\text{AGBS}}$	0.788	$4.26 \pm 0.43$	$0.214 \pm 0.005$	$3.497 \pm 0.068$	$4.34 \pm 0.28$	0
$\langle \tilde{T}_Y^{\text{AGBS}} \rangle$	0.782	$4.02 \pm 0.56$	$0.190 \pm 0.030$	$3.64 \pm 0.21$	$3.84 \pm 0.21$	$0.9 \pm 1.2$

**Tab. 4.3:** Parâmetros extraídos do ajuste aos dados de ZEUS [52, 53] para  $F_2$  no caso onde  $m_{u,d,s} = 50 \text{ MeV}$ .

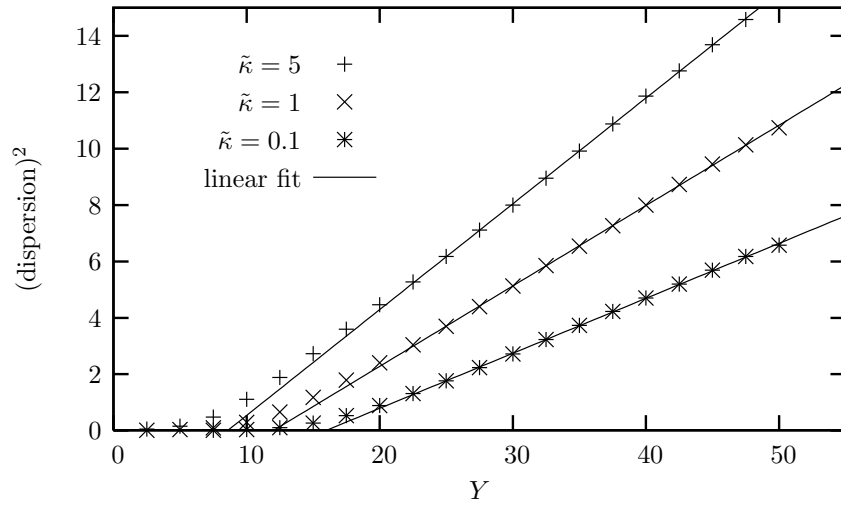
	$\chi^2/\text{n.o.p}$	$k_0^2 (\times 10^{-3})$	$\lambda$	$R(\text{GeV}^{-1})$	$\chi''(\gamma_c)$	$D$
$\tilde{T}_Y^{\text{AGBS}}$	0.778	$1.97 \pm 0.22$	$0.177 \pm 0.006$	$4.68 \pm 0.14$	$5.95 \pm 0.94$	0
$\langle \tilde{T}_Y^{\text{AGBS}} \rangle$	0.768	$1.38 \pm 0.12$	$0.120 \pm 0.010$	$5.459 \pm 0.043$	$5.46 \pm 0.55$	$1.78 \pm 0.38$

**Tab. 4.4:** Parâmetros extraídos do ajuste aos dados de ZEUS [52, 53] para  $F_2$  no caso onde  $m_{u,d,s} = 140 \text{ MeV}$ .

É interessante comparar nossos resultados com um trabalho realizado por Kozlov, Shoshi e Xiang [71], no qual os conhecidos modelos GBW e IIM foram usados para parametrizar a amplitude de espalhamento dipolo-próton, nas descrições evento-por-evento e na aproximação de campo médio desta amplitude. O valor do coeficiente de difusão encontrado foi de ordem  $\mathcal{O}(1)$ , concordando com os valores preditos por outros modelos na literatura [72, 73], o que poderia indicar a presença de flutuações nas energias atingidas em HERA. Entretanto, devemos notar que tal ajuste foi realizado somente com os dados da colaboração ZEUS [52, 53], sem incluir os dados de H1 [51], como é usual neste tipo de ajuste. Além disto, a análise foi restrita a um regime cinemático menor, com valores de virtualidades  $Q^2$  que atingem no máximo  $50 \text{ GeV}^2$ .

Por outro lado, quando realizamos a mesma análise de [71], *i.e.*, somente dados de ZEUS [52, 53] e no regime cinemático tal que  $Q_{\text{max}}^2 = 50 \text{ GeV}^2$ , usando o modelo AGBS, obtemos resultados muito similares aos de [71], e com um valor de  $\chi^2/\text{n.o.p}$  melhor. Estes resultados estão ilustrados nas tabelas 4.3 e 4.4, onde percebe-se o valor de ordem  $\mathcal{O}(1)$  obtido para o coeficiente de difusão  $D$ .

Por fim, mencionamos que a análise feita com o conjunto completo de dados de HERA — H1 e ZEUS [51–53] — concorda com o resultado de simulações numéricas para a equação de Langevin (4.28) [72]. Podemos ver isso observando a Fig.4.7, a qual foi tomada de [72] e que mostra o resultado obtido para a dispersão  $\sigma^2$  das frentes de onda como função da rapidez  $Y$ . Os valores de  $\tilde{\kappa} \propto \kappa$  mostrados indicam quão intenso o termo de flutuações foi tomado na realização das simulações. Além de confirmar o comportamento  $\sigma^2 \propto Y$  para grande  $Y$ , esta figura mostra que nos primeiros estágios da evolução — valores de rapidez  $Y \leq 10$ , os efeitos difusivos são desprezíveis, de forma que o coeficiente de difusão  $D$  deve tender à zero nesta região. Como as energias atingidas em HERA fornecem uma rapidez máxima  $Y \lesssim 9$ , vemos que o comportamento difusivo da evolução, que leva à substituição do escalamento geométrico pelo escalamento difusivo, não é esperado para ocorrer nos processos de DIS em HERA, mas sim em colisões com energias bem maiores.



**Fig. 4.7:** *Dispersão das frentes de onda como função da rapidez para conjuntos de 10000 eventos e diferentes valores de  $\tilde{\kappa}$ . Os pontos representam a dispersão dos eventos como função da rapidez, enquanto que as linhas são ajustes lineares destes pontos [72].*

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo vimos como o formalismo de dipolos fornece naturalmente um referencial ideal para a descrição de flutuações no número de partículas (glúon ou dipolos) quando da evolução em energia do mesmo. O surgimento de termos de flutuações — que nada mais são que termos de desdobramento de glúons — adicionado aos termos de saturação conhecidos da evolução de Balitsky e Kovchegov e que correspondem à fusão de glúons resulta no desenvolvimento das equações de evolução de laços de pomerons, como são chamadas na literatura. Este desenvolvimento foi mostrado, além da sua interpretação em termos de uma equação de Langevin estocástica para a evolução, onde o termo de ruído estocástico introduz os efeitos de flutuações na evolução. A equação de Langevin obtida após algumas aproximações pode ser vista como a equação BK adicionada de um termo de ruído com função já especificada. Neste sentido mostra-se que a evolução é equivalente ao processo de reação–difusão descrito pela versão estocástica da equação FKPP vista anteriormente, ou seja, a equação de Langevin obtida é equivalente à equação sFKPP, que nada mais é do que a equação FKPP determinística adicionada de um termo de ruído. Daí já notamos as semelhanças com o formalismo desenvolvido no capítulo 3 para a evolução BK. Toda a interpretação estocástica da dinâmica das amplitudes em altas energias foi apresentada, bem como as conseqüências para a QCD de altas energias. Por fim usou-se este formalismo para introduzir ao modelo AGBS os efeitos de flutuações supra–citados e então investigar com este novo formalismo como tais efeitos se manifestam nas energias de HERA para os dados da função de estrutura do próton. Os resultados obtidos foram apresentados e estes levam a conclusão de que, sob o ponto de vista do modelo AGBS, os efeitos de flutuações não são observados nas energias atingidas em HERA. Sendo assim, uma descrição de campo

médio — sem a inclusão de flutuações, é suficiente para a descrição dos dados nas energias de HERA.

# Conclusões

A evolução da QCD perturbativa em altas energias é um tema de grande destaque na literatura. Os efeitos de saturação presentes nesta evolução foram confirmados com a observação do escalamento geométrico das seções de choque para o espalhamento profundamente inelástico (DIS) no colisor HERA, visto que este escalamento mostrou-se relacionado à presença de saturação na evolução. Neste trabalho investigamos as conseqüências geradas sobre a evolução da QCD em altas energias, quando incluídos, além da saturação, efeitos de flutuações no número de partículas. Como vimos, estes efeitos mudam consideravelmente o panorama da evolução em altas energias, a qual é vista agora como um processo estocástico em relação às amplitudes de espalhamento, sendo que a principal conseqüência para a evolução é a substituição do escalamento geométrico pelo chamado escalamento difusivo, a ser alcançado em energias muito altas. Ao final de cada capítulo apresentamos conclusões parciais, que aqui vamos resumir, além de apresentar e comentar os resultados obtidos e traçar perspectivas futuras.

No capítulo 1 vimos aspectos básicos da QCD perturbativa. Além disto, apresentamos o DIS, bem como sua interpretação em termos do modelo de pártons e em relação ao referencial de dipolos de cor. Esse foi o processo utilizado para a investigação das flutuações. Por último apresentamos as dinâmicas lineares para a evolução, DGLAP e BFKL, bem como sua incapacidade de descrever os dados na região de altas densidades partônicas.

No capítulo 2, vimos como os efeitos de saturação são necessários para suavizar o forte crescimento das seções de choque no limite de altas energias, quando as equações de evolução lineares DGLAP e BFKL deixam de ser válidas. A inclusão desses efeitos na evolução é descrita pelas equações de evolução não lineares, dentre as quais destacamos, para o presente trabalho, equações de evolução construídas no referencial de dipolos de cor: a equação de Balitsky e Kovchegov (BK), que pode ser vista como uma aproximação de campo médio na densidade de glúons para a chamada hierarquia de Balitsky. Estas equações incluem termos de emissão de partículas — do tipo BFKL, e termos de recombinação de partículas, de forma que unitarizam a evolução BFKL para a densidade de dipolos.

No capítulo 3 apresentamos um modelo para a seção de choque de dipolos — modelo AGBS, o qual foi construído com base nas soluções assintóticas da equação de evolução BK no espaço de momentum, e que descreve muito bem os dados de DIS em HERA, usando acoplamento  $\alpha_s$  fixo. A construção do modelo se baseia no desenvolvimento atual de uma conexão entre a evolução da QCD em altas energias com processos de reação–difusão conhecidos da física estatística. Para tanto, mostrou-se que a equação BK está em classe de equivalência com a equação FKPP para processos de reação–difusão, de forma que as amplitudes de espalhamento apresentam o escalamento geométrico esperado pelas soluções numéricas da equação BK. O modelo AGBS, como foi chamado, se mostra muito bom em

comparação com outros modelos para a seção de choque de dipolos como os modelos GBW e IIM, que também apresentam o escalamento geométrico, mas que possuem alguns problemas quando transformados para o espaço de momentum.

A introdução dos chamados efeitos de flutuações faz-se necessária ao modelo AGBS, pois a hierarquia de Balitsky, e portanto a equação BK, não leva em conta os múltiplos espalhamentos no projétil responsáveis pelos efeitos de flutuações na evolução do alvo. No capítulo 4 vimos como a evolução de dipolos de cor fornece um referencial satisfatório para a descrição de flutuações, visto que em poucos passos de evolução estes efeitos já se manifestam. Adicionando efeitos de saturação à essa evolução, construímos as chamadas equações de laços de pomerons, as quais formam uma hierarquia infinita de equações para a amplitude de dipolos levando em conta tanto efeitos de saturação como de flutuações. Mostramos ainda que esta hierarquia pode ser reescrita como uma equação de Langevin estocástica, onde o termo de ruído estocástico é o responsável pelo surgimento das flutuações no decorrer da evolução. Neste tipo de evolução, as amplitudes de espalhamento se tornam amplitudes evento–por–evento, sendo que para um dado momento da evolução — um dado valor de rapidez, terão origem diversas amplitudes distribuídas de forma aproximadamente gaussiana em relação ao momento transversal. Uma das principais conseqüências para a evolução em altas energias é que a amplitude física, tomada como a média sobre a distribuição das amplitudes individuais, não preserva o escalamento geométrico, embora as amplitudes individuais o preservem, como visto no capítulo 3. O novo escalamento, que depende do coeficiente de difusão associado às flutuações, é chamado escalamento difusivo, significando que em energias muito altas a forma das amplitudes deve ser dispersa com o passar da evolução.

Nesta análise estocástica da evolução, a conexão com processos de reação–difusão é válida novamente, pois a equação de Langevin mencionada pode ser escrita como uma forma estocástica da equação FKPP — a chamada equação sFKPP. Esta equação é igual a equação FKPP adicionada de um termo de ruído responsável pelas flutuações. Neste sentido, a inclusão de flutuações no modelo AGBS é feita considerando a amplitude AGBS como sendo uma amplitude evento–por–evento, sendo que a amplitude física que inclui ao modelo as flutuações é obtida como a média em relação à variável estocástica  $\rho_s = \ln(k_0^2/Q_s^2(Y))$ , onde  $Q_s(Y)$  é a escala de saturação dependente da rapidez  $Y$ , que define as amplitudes individuais.

Partimos então para a descrição dos dados de DIS em HERA. Como mencionado, a amplitude AGBS é tratada como individual e estocástica em  $\rho_s$  e deve ser integrada nesta variável, que apresenta uma distribuição de probabilidades gaussiana. Esta integração foi feita e o resultado usado para parametrizar a função de estrutura do próton  $F_2$  que então é ajustada globalmente aos dados mais recentes das colaborações H1 e ZEUS do colisor HERA. Como resultado obtivemos que o coeficiente de difusão  $D$ , que caracteriza a presença de flutuações e foi tratado como parâmetro livre, tendeu a valores muito próximos de zero, confirmando — sob o ponto de vista do modelo AGBS — que os efeitos de flutuações são irrelevantes na descrição de processos nas energias atingidas em HERA. Este resultado está de acordo com simulações da equação de Langevin, as quais prevêem que as flutuações são importantes para energias maiores do que as atingidas em HERA. Entretanto, realizamos o mesmo ajuste levando em conta somente os dados de H1, inspirados por alguns desenvolvimentos na literatura, e encontramos um valor de  $D$  que confirma a presença de flutuações



---

mesmo em HERA, sendo este valor semelhante ao que advém de modelos unidimensionais para a QCD.

Para o futuro, cabe buscar observáveis onde sejam possíveis verificar o escalamento difusivo em energias muito altas, como as alcançadas no Large Hadron Collider (LHC). Uma análise do modelo AGBS com acoplamento dinâmico seria interessante para verificarmos se os efeitos de flutuações realmente são suprimidos da evolução quando o acoplamento é dinâmico, como sugerem as simulações com o modelo unidimensional para a QCD.

## Apêndice A

# A função de estrutura do próton no espaço de momentum

Vamos mostrar aqui que a função de estrutura do próton é dada, no espaço de momentum, por

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y), \quad (\text{A.1})$$

onde a função de onda do fóton é agora expressa no espaço de momentum

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 = & \sum_q \left( \frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \\ & \times \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \left[ \frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[ \frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{4\bar{Q}_q^4 + 2\bar{Q}_q^2 k^2 + k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

com  $\bar{Q}_q^2 = z(1-z)Q^2 + m_q^2$ .

A função de estrutura do próton pode ser escrita, em termos das seções de choque longitudinal e transversal, como

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \left[ \sigma_T^{\gamma^* p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^* p}(x, Q^2) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde os índices  $T, L$  indicam as componentes transversais e longitudinais, respectivamente, da seção de choque fóton-próton. Trabalhando no formalismo de dipolos estas seções de choque assumem formas fatorizadas

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(Q^2, Y) = \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{\text{dip}}^{\gamma^* p}(r, Y), \quad (\text{A.4})$$

onde  $r$  é a separação transversal do par  $q\bar{q}$ ,  $z$  é a fração de momento do fóton portada pelo quark e  $\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)$  são as componentes transversais e longitudinais, respectivamente, da

função de onda do fóton. A quantidade  $\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y)$  é a seção de choque dipolo-próton, a qual pode ser escrita em função da amplitude de espalhamento dipolo-próton através de

$$\sigma_{\text{dip}}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 T(r, Y), \quad (\text{A.5})$$

com  $R_p$  designando o raio do próton, assumido como homogêneo.

As funções de onda do fóton  $\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)$ , que descrevem a configuração do par  $q\bar{q}$ , são dadas por [14]

$$|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \quad (\text{A.6})$$

$$|\Psi_L(r, z; Q^2)|^2 = \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $m_q$  é a massa dos quarks e  $K_{0,1}$  são as funções de McDonald de ordem zero e um, respectivamente. Com tudo isto escrevemos:

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi \alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz [|\Psi_T(r, z; Q^2)|^2 + |\Psi_L(r, z; Q^2)|^2] T(r, Y). \quad (\text{A.8})$$

Definindo

$$\phi(r, z) = \phi_T(r, z) + \phi_L(r, z) \quad \text{com} \quad \phi_{T,L}(r, z) = |\Psi_{T,L}(r, z)|^2 \quad (\text{A.9})$$

para facilitar a notação, temos

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi \alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz \phi(r, z) T(r, Y), \quad (\text{A.10})$$

onde não explicitamos a dependência em  $Q^2$  nas funções de onda do fóton, embora ela esteja presente.

Seja agora a seguinte Transformada de Fourier

$$T(r, Y) = r^2 \int \frac{d^2k}{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{T}(k, Y) = r^2 \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{T}(k, Y), \quad (\text{A.11})$$

a qual tem por inversa

$$\tilde{T}(k, Y) = \int \frac{d^2r}{2\pi r^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) = \int \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y). \quad (\text{A.12})$$

Da mesma forma, para  $\phi(r, z)$  definimos a Transformada de Fourier

$$\phi(r, z) = \frac{1}{r^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(k, z) = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{\phi}(k, z), \quad (\text{A.13})$$

para a qual vale

$$\tilde{\phi}(k, z) = \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} r^2 \phi(r, z) = \int_0^\infty \frac{dr}{2\pi} r^3 J_0(kr) \phi(r, z). \quad (\text{A.14})$$

Com estas transformadas,  $F_2$  se torna

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2}{2\pi\alpha_{em}} \int d^2r \int_0^1 dz \frac{1}{r^2} \int d^2k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\phi}(k, z) r^2 \int \frac{d^2k'}{2\pi} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \tilde{T}(k', Y) \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{(2\pi)^2\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2k \int d^2k' \tilde{\phi}(k, z) \tilde{T}(k', Y) \int d^2r e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{(2\pi)^2\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2k \int d^2k' \tilde{\phi}(k, z) \tilde{T}(k', Y) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2k \tilde{\phi}(k, z) \tilde{T}(k, Y).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Mas de (A.14) resulta que

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \phi(r, z) \tilde{T}(k, Y) \\
&= \frac{Q^2 R_p^2}{\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \phi(r, z).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

substituindo (A.6) e (A.7) nesta relação, temos uma expressão para  $F_2$  no espaço de momentum. Assim,

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c \alpha_{em}}{\alpha_{em} 2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) \\
&\quad \times \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 K_1^2(\bar{Q}_q r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) + 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_q r) \} \\
&= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_q^2 \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_1^2(\bar{Q}_q r) \right. \\
&\quad \left. + [Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \int_0^\infty dr r^3 J_0(kr) K_0^2(\bar{Q}_q r) \right\}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

As integrais em  $r$  acima são tabeladas e temos como resultado

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \frac{2}{3\bar{Q}_q^2} {}_2F_1 \left( 2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + [Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2] \left[ \frac{1}{3\bar{Q}_q^4} {}_2F_1 \left( 2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) - \frac{2k^2}{15\bar{Q}_q^6} {}_2F_1 \left( 3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{A.18}$$

onde  ${}_2F_1$  são as funções hypergeométricas. Estas funções podem ser simplificadas se expres-

sas em termos de funções elementares, fornecendo as relações

$${}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{4z(1-z)} \left[ 1 - \frac{1-2z}{\sqrt{z(1-z)}} \arcsin(\sqrt{z}) \right] \quad (\text{A.19})$$

$${}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; z\right) = \frac{3}{16z(1-z)^2} \left[ 1 + 2z - \frac{1-4z}{\sqrt{z(1-z)}} \arcsin(\sqrt{z}) \right] \quad (\text{A.20})$$

$${}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; z\right) = \frac{15}{64z^2(1-z)^2} \left[ \frac{3-8z+8z^2}{\sqrt{z(1-z)}} \arcsin(\sqrt{z}) - 3(1-2z) \right]. \quad (\text{A.21})$$

No caso,  $z = -k^2/4\bar{Q}_q^2$ . Vamos resolver termo a termo as expressões acima, quando será útil a relação  $\arcsin ix = i \operatorname{arcsinh} x$ .

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{3}{16 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[ 1 + 2 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) - \frac{1-4\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} \right. \\ &\quad \left. \times \arcsin\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}}\right) \right] \\ &= \frac{-3\bar{Q}_q^2}{4k^2 \left(\frac{k^2+4\bar{Q}_q^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[ 1 - \frac{k^2}{2\bar{Q}_q^2} - \frac{\frac{k^2+\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2}}{\frac{i}{4\bar{Q}_q^2} \sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} i \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \\ &= \frac{48\bar{Q}_q^6}{4k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{4(k^2+\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2-2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right]. \end{aligned}$$

Isto implica em

$$\frac{2}{3\bar{Q}_q^2} {}_2F_1\left(2, 3; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) = \frac{16\bar{Q}_q^4}{2k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{4(k^2+\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2-2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right], \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{3}{4 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)} \left[ 1 - \frac{1-2\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} \arcsin\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}}\right) \right] \\ &= \frac{-3\bar{Q}_q^2}{k^2 \left(\frac{4\bar{Q}_q^2+k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)} \left[ 1 - \frac{1+\frac{k^2}{2\bar{Q}_q^2}}{i \sqrt{\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2} \left(\frac{4\bar{Q}_q^2+k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} i \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \\ &= \frac{12\bar{Q}_q^4}{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)} \left[ \frac{2(k^2+2\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2+4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3\bar{Q}_q^4} {}_2F_1\left(2, 2; \frac{5}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{4\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^4 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{2(k^2 + 2\bar{Q}_q^2)(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - (k^2 + 4\bar{Q}_q^2) \right] \\
&= \frac{8\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{k^4 + 6\bar{Q}_q^2 k^2 + 8\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2 + 4\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \tag{A.23} \\
&= \frac{8\bar{Q}_q^4}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{2k^4 + 12\bar{Q}_q^2 k^2 + 16\bar{Q}_q^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{k^2 + 4\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{15}{64 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2 \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[ \frac{3 + 8 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) + 8 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2}{\sqrt{\left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)}} \operatorname{arcsin}\left(\sqrt{-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(1 - 2 \left(-\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)\right) \right] \\
&= \frac{15\bar{Q}_q^4}{4k^4 \left(\frac{k^2 + 4\bar{Q}_q^2}{4\bar{Q}_q^2}\right)^2} \left[ \frac{\frac{3 \cdot 16\bar{Q}_q^4 + 8 \cdot 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 8k^4}{16\bar{Q}_q^4}}{\frac{1}{4\bar{Q}_q^2} \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsin}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(1 + \left(\frac{k^2}{2\bar{Q}_q^2}\right)\right) \right] \\
&= \frac{15\bar{Q}_q^8}{\frac{k^4}{4} (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{12\bar{Q}_q^4 + 8\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(\frac{k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2}\right) \right].
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{2k^2}{15\bar{Q}_q^6} {}_2F_1\left(3, 3; \frac{7}{2}; -\frac{k^2}{4\bar{Q}_q^2}\right) &= \frac{8\bar{Q}_q^2}{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{12\bar{Q}_q^4 + 8\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - 3\left(\frac{k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2}\right) \right] \\
&= \frac{8\bar{Q}_q^4}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{24\bar{Q}_q^4 + 16\bar{Q}_q^2 k^2 + 4k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3k^2 + 6\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} \right]. \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Subtraindo (A.23) e (A.24) obtemos como resultado

$$\begin{aligned}
&\frac{8\bar{Q}_q^4}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \\
&\frac{16\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2 k^2 (k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} \left[ \frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right]. \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado, juntamente com (A.22) na expressão (A.18) para a função de estrutura do próton, esta se torna

$$\begin{aligned}
F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{2\pi^2} \sum_q \frac{16\bar{Q}_q^4}{2k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)^2} e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty dk k \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
&\quad \times \left[ \frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \\
&\quad \left. + \frac{Q^2 z^2(1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[ \frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \right\} \\
&= \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \sum_q \left( \frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \int_0^1 dz \int_0^\infty \frac{dk}{k} \tilde{T}(k, Y) \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
&\quad \times \left[ \frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \\
&\quad \left. + \frac{Q^2 z^2(1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[ \frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{2\bar{Q}_q}\right) \right] \right\}. \tag{A.26}
\end{aligned}$$

Comparando esta última com (A.1), vemos que são idênticas e visualizamos a função de onda do fóton no espaço de momentum como

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 = & \sum_q \left( \frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \right. \\
& \times \left[ \frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] \\
& \left. + \frac{Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[ \frac{2k^2 + 2\bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{8\bar{Q}_q^4 + 4\bar{Q}_q^2 k^2 + 2k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{A.27}$$

a qual é igual a expressão (A.2), o que completa a prova.



## Apêndice B

# A distribuição de probabilidade para a escala de saturação estocástica

Seja  $P(\rho_s)$  a distribuição de probabilidade para a variável  $\rho_s = \log(Q_s^2(Y)/k_0^2)$ . Vamos calcular  $P(\rho_s)$  através dos cumulantes desta distribuição. Sabemos, da física estatística, que o primeiro e o segundo cumulante são iguais a média e a variância da variável considerada, respectivamente. No caso de uma distribuição gaussiana, os cumulantes de mais alta ordem são nulos, mas este não é o caso de  $P(\rho_s)$ . Recentemente, Brunet, Derrida, Mueller e Munier [74] mostraram que os cumulantes de ordens mais altas são proporcionais ao segundo cumulante. Assim, temos

$$\kappa_1 = \langle \rho_s \rangle = \bar{\alpha}vY, \quad \kappa_2 = \sigma^2 = \bar{\alpha}DY, \quad \kappa_n = \frac{3\gamma_c^2}{\pi^2} \frac{n! \zeta(n)}{\gamma_c^n} \sigma^2, \quad (\text{B.1})$$

onde  $v$  e  $D$  são coeficientes caracterizando a velocidade e a dispersão das frentes de onda propagantes,  $\zeta(n)$  é a função zeta de Riemann

Partimos da função geratriz para os momentos de  $P(\rho_s)$

$$\langle e^{\lambda \rho_s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho_s e^{\lambda \rho_s} P(\rho_s). \quad (\text{B.2})$$

A função geratriz para os cumulantes de  $P(\rho_s)$  é dada por

$$\begin{aligned} \log \langle e^{\lambda \rho_s} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n \lambda^n}{n!} = \kappa_1 \lambda + \frac{\kappa_2 \lambda^2}{2} + \dots \\ &= \langle \rho_s \rangle \lambda + \frac{3\gamma_c^2}{\pi^2} \sigma^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n) \lambda^n}{\gamma_c^n}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde usamos (B.1). Usando a seguinte representação integral para a função zeta de Riemann

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{e^u - 1}, \quad (\text{B.4})$$

temos que

$$\begin{aligned} \log \langle e^{\lambda \rho_s} \rangle &= \langle \rho_s \rangle \lambda + \frac{3\gamma_c^2}{\pi^2} \sigma^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} du \frac{u^{n-1}}{e^u - 1} \frac{\lambda^n}{\gamma_c^n} \\ &= \langle \rho_s \rangle \lambda + \frac{3\gamma_c^2}{\pi^2} \sigma^2 \underbrace{\left[ \int_0^{\infty} du \frac{1}{u(e^u - 1)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} \left( \frac{u\lambda}{\gamma_c} \right)^n \right]}_A. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Mas, com  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , resulta

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} du \frac{1}{u(e^u - 1)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{u\lambda}{\gamma_c} \right)^n = \int_0^{\infty} du \frac{1}{u(e^u - 1)} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{u\lambda}{\gamma_c} \right)^{n-1} \right] \frac{u\lambda}{\gamma_c} \\ &= \int_0^{\infty} du \frac{1}{u(e^u - 1)} \underbrace{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{u\lambda}{\gamma_c} \right)^n \right]}_{\frac{e^{\frac{u\lambda}{\gamma_c}} - 1}{\frac{u\lambda}{\gamma_c}}} \frac{u\lambda}{\gamma_c} = \frac{\lambda}{\gamma_c} \int_0^{\infty} du \frac{e^{\frac{u\lambda}{\gamma_c}} - 1}{e^u - 1}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

A integral à direita da expressão acima pode ser calculada com ajuda da expressão 6.3.22 do Abramowitz & Stegun [75],

$$\psi(z) + \gamma_E = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} dt, \quad (\text{B.7})$$

onde  $\gamma_E$  é a constante de Euler-Mascheroni. Com  $z = 1 - s$ , esta se torna

$$\begin{aligned} \psi(1-s) + \gamma_E &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(1-s)t}}{1 - e^{-t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}(1 - e^{st})}{1 - e^{-t}} dt \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{e^{st} - 1}{e^t - 1} dt. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Logo, com  $s = \lambda/\gamma_c$ , a expressão para  $A$  se torna

$$A = -\frac{\lambda}{\gamma_c} \left[ \gamma_E + \psi \left( 1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right]. \quad (\text{B.9})$$

Com isso, temos que a função geratriz para os cumulantes de  $P(\rho_s)$  é

$$\log \langle e^{\lambda \rho_s} \rangle = \langle \rho_s \rangle \lambda - \frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2} \lambda \left[ \gamma_E + \psi \left( 1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right], \quad (\text{B.10})$$

ou,

$$\langle e^{\lambda \rho_s} \rangle = \exp \left\{ \langle \rho_s \rangle \lambda - \frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2} \lambda \left[ \gamma_E + \psi \left( 1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Tomando a inversa da transformada de Laplace (B.2) e usando a expressão (B.11) para  $\langle e^{\lambda \rho_s} \rangle$ , resulta que:

$$\begin{aligned} P(\rho_s) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\lambda}{2i\pi} \exp \left\{ -(\rho_s - \langle \rho_s \rangle) \lambda - \frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2} \lambda \left[ \gamma_E + \psi \left( 1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right] \right\} \\ &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\lambda}{2i\pi} \exp \left\{ -z\lambda - b\lambda \left[ \gamma_E + \psi \left( 1 - \frac{\lambda}{\gamma_c} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde

$$z = \rho_s - \langle \rho_s \rangle, \quad \text{e} \quad b = \frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2}. \quad (\text{B.13})$$

Vamos resolver (B.12) na aproximação de ponto de sela. Assim, seja

$$f(\lambda) = -z\lambda - b\lambda [\gamma_E + \psi(\varepsilon)], \quad (\text{B.14})$$

onde  $\varepsilon = 1 - \lambda/\gamma_c$ . A derivada desta última em relação à  $\lambda$  é:

$$\begin{aligned} \frac{df(\lambda)}{d\lambda} &= -z - b[\gamma_E + \psi(\varepsilon)] - b\lambda \psi^{(1)}(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \lambda} \\ &= -z - b \left[ \gamma_E + \psi(\varepsilon) - \frac{\lambda}{\gamma_c} \psi^{(1)}(\varepsilon) \right] \\ &= -z - b [\gamma_E + \psi(\varepsilon) - (1 - \varepsilon) \psi^{(1)}(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

A condição de ponto de sela implica nesta derivada ser nula para  $\lambda = \tilde{\lambda}$ , onde  $\tilde{\lambda}$  é o valor que extremiza a função  $f(\lambda)$ . (No caso, que minimiza.) Desta forma,

$$\left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\tilde{\lambda}} = -z - b [\gamma_E + \psi(\tilde{\varepsilon}) - (1 - \tilde{\varepsilon}) \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon})] = 0, \quad (\text{B.16})$$

ou seja,

$$z + b [\gamma_E + \psi(\tilde{\varepsilon}) - (1 - \tilde{\varepsilon}) \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon})] = 0, \quad (\text{B.17})$$

onde  $\tilde{\varepsilon} = 1 - \tilde{\lambda}/\gamma_c$ . No ponto de sela,  $\tilde{\lambda}$ , a função  $f(\lambda)$  é dada por

$$f(\tilde{\lambda}) = -z\tilde{\lambda} - b\tilde{\lambda} [\gamma_E + \psi(\tilde{\varepsilon})] = -b\tilde{\lambda}(1 - \tilde{\varepsilon}) \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}), \quad (\text{B.18})$$

onde usamos a condição (B.17) na última igualdade. Sendo  $b = 3\gamma_c \sigma^2 / \pi^2$  e  $\tilde{\lambda} = \gamma_c(1 - \tilde{\varepsilon})$ , temos que

$$f(\tilde{\lambda}) = -\frac{3\gamma_c^2 \sigma^2}{\pi^2} (1 - \tilde{\varepsilon})^2 \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}). \quad (\text{B.19})$$

A derivada segunda de  $f(\lambda)$  no ponto de sela é obtida como

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^{(2)}f(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\tilde{\lambda}} &= -b \left[ \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) \left( -\frac{-1}{\gamma_c} \right) - \left( 1 - 1 + \frac{1}{\gamma_c} \right) \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) - (1 - \tilde{\varepsilon}) \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}) \left( -\frac{-1}{\gamma_c} \right) \right] \\
&= -b \left[ \frac{2}{\gamma_c} \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) + \frac{1 - \tilde{\varepsilon}}{\gamma_c} \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}) \right] \\
&= \frac{2b}{\gamma_c} \left[ \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) - \frac{1 - \tilde{\varepsilon}}{2} \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}) \right] \\
&= \frac{6\sigma^2}{\pi^2} \left[ \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) - \frac{1 - \tilde{\varepsilon}}{2} \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}) \right].
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Para proceder com a aproximação, expandimos  $f(\lambda)$  em série de Taylor em torno do mínimo  $\tilde{\lambda}$ , ou seja,

$$f(\lambda) = f(\tilde{\lambda}) + f^{(1)}(\tilde{\lambda})(\lambda - \tilde{\lambda}) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\tilde{\lambda})(\lambda - \tilde{\lambda})^2 + \mathcal{O}[(\lambda - \tilde{\lambda})^3]. \tag{B.21}$$

A condição de extremo da função  $f(\lambda)$  implica  $f^{(1)}(\tilde{\lambda}) = 0$ . Assim, até segunda ordem aproximamos esta função por

$$f(\lambda) \approx f(\tilde{\lambda}) + \frac{1}{2}f^{(2)}(\tilde{\lambda})(\lambda - \tilde{\lambda})^2. \tag{B.22}$$

Substituindo esta na expressão (B.12), resulta

$$P(\rho_s) = \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\lambda e^{\frac{f^{(2)}}{2}(\lambda - \tilde{\lambda})^2}. \tag{B.23}$$

Na integral acima, a constante  $c = \text{Re}(\lambda)$  é escolhida de tal forma que mantenha à esquerda da região de integração os possíveis pólos do integrando, tornando o caminho de integração paralelo ao eixo imaginário. No caso, os pólos apareceriam nas funções poligamas  $\psi^{(m)}(\tilde{\varepsilon})$ , com  $\tilde{\varepsilon} = 1 - \lambda/\gamma_c$ . Assim, escolhemos esta constante tal que  $c < \gamma_c$ . Para realizar a integração fazemos uma mudança de variáveis que translade o caminho de integração para a origem do plano complexo, deixando este sobre o eixo imaginário, seguida de uma rotação deste caminho para que corra sobre o eixo real de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Ou seja, com  $\lambda = c + iu$  temos que:

$$\begin{aligned}
P(\rho_s) &= \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i du e^{\frac{f^{(2)}}{2}(c+iu-\tilde{\lambda})^2} \\
&= \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{\frac{f^{(2)}}{2}[(c-\tilde{\lambda})^2 + 2i(c-\tilde{\lambda})u - u^2]} \\
&= \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{2\pi} e^{A(c-\tilde{\lambda})^2} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-Au^2 + 2iA(c-\tilde{\lambda})u}.
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Na última igualdade, fizemos  $A = f^{(2)}/2$ . A integral restante é justamente uma integral gaussiana, de forma que

$$\begin{aligned}
 P(\rho_s) &= \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{2\pi} e^{A(c-\tilde{\lambda})^2} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp \left\{ \frac{[2iA(c-\tilde{\lambda})]^2}{4A} \right\} \\
 &= \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{2\pi} e^{A(c-\tilde{\lambda})^2} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp \left\{ \frac{-4A^2(c-\tilde{\lambda})^2}{4A} \right\} \\
 &= \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{2\pi} e^{A(c-\tilde{\lambda})^2} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-A(c-\tilde{\lambda})^2} \\
 &= \frac{e^{f(\tilde{\lambda})}}{\sqrt{4\pi A}}.
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Usando as expressões (B.19) e (B.20) para  $f(\tilde{\lambda})$  e  $A$ , respectivamente, resulta que:

$$P(\rho_s) = \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) - \frac{1-\tilde{\varepsilon}}{2} \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}) \right] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 (1-\tilde{\varepsilon})^2 \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) \right\}. \tag{B.26}$$

Nesta expressão, não sabemos o valor exato de  $\tilde{\varepsilon}$ , pois a expressão (B.17) não possui solução exata. Podemos, no entanto, analisar alguns limites interessantes:

(i)  $z/b \rightarrow 0$ , ou seja,  $|z| \ll \gamma_c \sigma^2$ .

O que domina a expressão (B.17) são as funções poligamas  $\Psi^{(m)}(\tilde{\varepsilon})$ . Assim, como  $\psi(1) = -\gamma_E$  e  $\psi^{(1)}(1) = \pi^2/6$ , temos que o limite acima vale para  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 -\frac{z}{b} &= \gamma_E + \psi(1) - 2(1-\tilde{\varepsilon})\psi^{(1)}(1) \\
 &= \gamma_E - \gamma_E - 2(1-\tilde{\varepsilon})\frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

ou

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - \frac{3z}{\pi^2 b}. \tag{B.28}$$

Nesta análise, (B.26) se torna

$$\begin{aligned}
P(\rho_s) &= \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \psi^{(1)}(1) - \frac{3z}{2\pi^2 b} \psi^{(2)}(1) \right] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \left( \frac{3z}{\pi^2 b} \right)^2 \psi^{(1)}(1) \right\} \\
&= \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{6} - \frac{3z}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{3\gamma_c \sigma^2} (-2\zeta(3)) \right] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \frac{9z^2}{\pi^4 b^2} \frac{\pi^2}{6} \right\} \\
&= \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{6\zeta(3)z}{\pi^2 \gamma_c \sigma^2} \right) \right] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} \gamma_c^2 \frac{9z^2}{\pi^4} \frac{\pi^4}{9\gamma_c^2 \sigma^4} \right\} \\
&= \left\{ 2\pi\sigma^2 \left[ 1 + \frac{6\zeta(3)z}{\pi^2 \gamma_c \sigma^2} \right] \right\}^{-1/2} \exp \left( -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\left[ 1 + \frac{6\zeta(3)z}{\pi^2 \gamma_c \sigma^2} \right]^{-1/2}}_{(1+x)^{-1/2} \approx 1-x/2} \exp \left( -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[ 1 - \frac{3\zeta(3)z}{\pi^2 \gamma_c \sigma^2} \right] \exp \left( -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right).
\end{aligned} \tag{B.29}$$

No limite em questão, vale que  $z \ll \gamma_c \sigma^2 = \gamma_c \bar{\alpha} DY$ . Assim, para altas energias, a distribuição é aproximadamente uma gaussiana dada por

$$P(\rho_s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left( -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right). \tag{B.30}$$

(ii)  $z/b \rightarrow \infty$ , ou seja,  $z \gg \gamma_c \sigma^2$ .

Agora, de acordo com (B.17), para atingir o limite acima temos que tomar o limite  $\psi(\tilde{\varepsilon}) \rightarrow \infty$ , o que vale para  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$ . Tomamos então a expansão em séries das funções poligamas até segunda ordem

$$\begin{aligned}
\psi(\tilde{\varepsilon}) &\approx -\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} - \gamma_E, \\
\psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) &\approx \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{\pi^2}{6}, \\
\psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}) &\approx -\frac{2}{\tilde{\varepsilon}^3} - 2\zeta(3).
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Substituindo estas expressões em (B.17), obtemos

$$\begin{aligned}
-\frac{z}{b} &= \gamma_E - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} - \gamma_E - (1 - \tilde{\varepsilon}) \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \\
&= -\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{(1 - \tilde{\varepsilon})}{\tilde{\varepsilon}^2} - \underbrace{(1 - \tilde{\varepsilon})}_{\approx 1, \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{6} \\
&= -\frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} - \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} = \frac{z}{b} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{6z - \pi^2 b}{6b}.
\end{aligned} \tag{B.32}$$

Logo

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}^2 &= \frac{6b}{6z - \pi^2 b} = \frac{b}{z} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 b}{6z}} \\ \Rightarrow \tilde{\varepsilon} &= \sqrt{\frac{b}{z}} \left(1 - \frac{\pi^2 b}{6z}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{b}{z}} \left(1 + \frac{\pi^2 b}{12z}\right).\end{aligned}\quad (\text{B.33})$$

Com  $b = 3\gamma_c \sigma^2 / \pi^2$ , resulta

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}} \left(1 + \frac{\gamma_c \sigma^2}{4z}\right).\quad (\text{B.34})$$

Antes de mais nada, notemos que estamos no caso em que  $z \gg \gamma_c \sigma^2$ , de forma que o termo mais à direita da relação acima tende a zero. Assim, substituindo tal valor de  $\tilde{\varepsilon}$  nas funções poligamas e na distribuição de probabilidade (B.26), esta última toma a forma

$$\begin{aligned}P(\rho_s) &\approx \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \left(1 + \frac{\gamma_c \sigma^2}{4z}\right)^{-2} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}} \left(1 + \frac{\gamma_c \sigma^2}{4z}\right)\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (-2) \left( \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{\gamma_c \sigma^2}{4z}\right)^{-3/2} + \zeta(3) \right) \right] \right\}^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \left(1 - \sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}} \left(1 + \frac{\gamma_c \sigma^2}{4z}\right)\right)^2 \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \left(1 + \frac{\gamma_c \sigma^2}{4z}\right)^{-2} + \frac{\pi^2}{6} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (\text{B.35})$$

Desprezando os termos onde  $z \gg \gamma_c \sigma^2$  e notando que neste limite as constantes não contribuem, resulta

$$\begin{aligned}P(\rho_s) &\approx \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} + \left(1 - \sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}}\right) \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/2} \right] \right\}^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \left(1 - \sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}}\right)^2 \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right\} \\ &\approx \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} + \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/2} - \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right) \sqrt{\frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2}} \sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}} \right] \right\}^{-1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\gamma_c z \left(1 - 2\sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}} + \frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}\right) \right\} \\ &\approx \underbrace{\left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/2} \right\}^{-1/2}}_A \exp \left\{ -\gamma_c z \left(1 - 2\sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}}\right) \right\}.\end{aligned}\quad (\text{B.36})$$

Para  $A$ , temos que

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right) \left( \frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} \right)^{1/2} \right]^{-1/2} = \left[ \frac{3 \cdot 4\pi^2 \sigma^2}{3^{3/2}} \left( \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/2} \right]^{-1/2} \\ &= \left[ 3^{-1/2} \cdot 4\pi^2 \sigma^2 \left( \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/2} \right]^{-1/2} = \frac{3^{1/4}}{2\pi\sigma} \left( \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/4}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Com isto temos que:

$$P(\rho_s) \approx \frac{3^{1/4}}{2\pi\sigma} \left( \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} \right)^{3/4} \exp \left\{ -\gamma_c z \left( 1 - 2\sqrt{\frac{3\gamma_c \sigma^2}{\pi^2 z}} \right) \right\}. \quad (\text{B.38})$$

(iii)  $z/b \rightarrow -\infty$ , ou seja,  $z \ll \gamma_c \sigma^2$ .

Agora, queremos  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow \infty$ , o que nos leva a tomar as expansões assintóticas das funções poligamas, as quais, até segunda ordem são dadas por

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{\varepsilon}) &\approx \ln(\tilde{\varepsilon}) - \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}}, \\ \psi^{(1)}(\tilde{\varepsilon}) &\approx \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2}, \\ \psi^{(2)}(\tilde{\varepsilon}) &\approx -\frac{2}{\tilde{\varepsilon}^2} - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^3}. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Substituindo estas até primeira ordem em (B.17), resulta

$$\begin{aligned} -\frac{z}{b} &= \gamma_E + \ln(\tilde{\varepsilon}) - (1 - \tilde{\varepsilon})\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} = \gamma_E + \ln(\tilde{\varepsilon}) - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} + 1 \\ \Rightarrow \exp \left\{ \ln(\tilde{\varepsilon}) - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right\} &= \exp \left\{ -\frac{z}{b} - \gamma_E - 1 \right\} \\ \tilde{\varepsilon} \underbrace{e^{-1/\tilde{\varepsilon}}}_{\approx 1-1/\tilde{\varepsilon}} &= \tilde{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right) = \exp \left\{ -\frac{z}{b} - \gamma_E - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

logo,

$$\tilde{\varepsilon} = \exp \left\{ -\frac{z}{b} - \gamma_E - 1 \right\} + 1. \quad (\text{B.41})$$

Desta forma, mantendo termos até ordem  $\mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}^{-2})$  nas expansões das funções poligamas, a distribuição (B.26) toma a forma

$$\begin{aligned} P(\rho_s) &= \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{1}{2}(1 - \tilde{\varepsilon})\frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} \right] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 (1 - \tilde{\varepsilon})^2 \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}^2} \right) \right\} \\ &= \left\{ \frac{12\sigma^2}{\pi} \left[ \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}} + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} \right] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \left( \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^2} + \tilde{\varepsilon} - 1 - \frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$



Desprezando os termos de ordem  $\mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}^{-2})$ , resulta:

$$\begin{aligned}
P(\rho_s) &= \left\{ \frac{6\sigma^2}{\pi} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \left( (\tilde{\varepsilon} - 1) - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma} \left\{ \exp \left( -\frac{z}{b} - \gamma_E - 1 \right) + 1 \right\}^{1/2} \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \left[ \exp \left( -\frac{z}{b} - \gamma_E - 1 \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi^2}{3} \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} - \gamma_E - 1 \right) + 1 \right\}^{1/2} \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{3\sigma^2}{\pi^2} \gamma_c^2 \left[ \exp \left( -\frac{\pi^2}{3} \frac{z}{\gamma_c \sigma^2} - \gamma_E - 1 \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.43}$$

Como, neste caso, vale que  $z \ll -\gamma_c \sigma^2$ , temos que o termo na raiz quadrada na expressão acima é dominado pela exponencial. Assim, obtemos como resultado uma distribuição de Gumbel, a qual vai a zero rapidamente no limite  $z \ll -\gamma_c \sigma^2$ , ou seja,

$$P(\rho_s) \approx \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{\pi^2 z}{6\gamma_c \sigma^2} - \frac{1 + \gamma_E}{2} - \frac{3\sigma^2 \gamma_c^2}{\pi^2} \left[ \exp \left( -\frac{\pi^2 z}{3\gamma_c \sigma^2} - \gamma_E - 1 \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} \tag{B.44}$$

Analisando a distribuição como uma função de  $z$ , partindo de  $z = -\infty$ , a transição entre o regime (B.44) e o regime (B.30) ocorre para  $z = -\gamma_c \sigma^2$  ao passo que a transição entre os regimes (B.30) e (B.38) ocorre para  $z = \gamma_c \sigma^2$ . Para estes pontos temos que  $\rho_s = \langle \rho_s \rangle \pm \gamma_c \sigma^2$  com probabilidade da ordem de  $\exp(-\gamma_c^2 \sigma^2)/\sigma$ , a qual é muito pequena. Com isso, vemos que a distribuição de probabilidade não gaussiana apenas como pequenas flutuações, sendo que a expressão (B.30) para descrever a maioria dos eventos.

# Bibliografia

- [1] MUTA, T. *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories*. 2. ed. Singapore: World Scientific, 1997.
- [2] FADEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills fields. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 25, n. 1, p. 29-30, Jul. 1967.
- [3] FADEEV, L. D.; SLAVNOV, A. A. *Gauge fields: introduction to quantum theory*. 2. ed. Redwood City: Addison-Wesley, 1991.
- [4] HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*. New York: John Wiley, 1984.
- [5] CANAL, C. A.; GAY DUCATI, M. B.; SIMÕES, J. A. M. *Notes in deep inelastic scattering*. Strasbourg: Centre de Recherches Nucléaires, Université Louis Pasteur, 1979. 93p. (Séries des cours et conférences sur la physique des hautes énergies, 15).
- [6] BARONE, V.; PREDAZZI, E. *High-Energy particle diffraction*. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [7] SLAC-MIT COLLABORATION (MILLER, G.; *et al.*) Inelastic electron-proton scattering at large momentum transfers and the inelastic structure functions of the proton. *Phys. Rev. D*, New York, v. 5, n. 3, p. 528-544, Fev. 1972.
- [8] BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. *Phys. Rev.*, New York, v. 179, n. 5, p. 1547-1553, Mar. 1969.
- [9] BJORKEN, J. D.; PASCHOS, E. A. Inelastic electron-proton and gamma-proton scattering and structure of nucleon. *Phys. Rev.*, New York, v. 185, n. 5, p. 1975-1982, Set. 1969.
- [10] ROBERTS, R. G. *The structure of the proton*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [11] CALLAN, C. G.; GROSS, D. J. High-energy electroproduction and constitution of the electric current. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 22, n. 1, p. 156-159, Jan. 1969.
- [12] GREINER, W.; SCHÄFER, A. *Quantum chromodynamics*. New York: Springer-Verlag, 1994.

- [13] GELL-MANN, M. A. Schematic model of baryons and mesons. *Phys. Lett.*, Amsterdam, v. 8, n. 3, p. 214-215, Fev. 1964.
- [14] NIKOLAEV, N. N.; ZAKHAROV, B. G. Colour transparency and scaling properties of nuclear shadowing in deep inelastic scattering. *Z. Phys. C*, Berlin, v. 49, n. 4, p. 607-618, Mar. 1991.
- [15] NIKOLAEV, N. N.; ZAKHAROV, B. G. Pomeron structure function and diffraction dissociation of virtual photons in perturbative QCD. *Z. Phys. C*, Berlin, v. 53, n. 2, p. 331-345, Fev. 1992.
- [16] GOLEC-BIERNAT, K. WÜSTHOFF, M. Saturation effects in deep inelastic scattering at low  $Q^2$  and its implications on diffraction. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 59, n. 1, 014017 10p., Nov. 1998.
- [17] IANCU, E.; ITAKURA, K.; MUNIER, S. Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small-x. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 590, n. 3-4, p. 199-208, Jun. 2004.
- [18] DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and  $e^+e^-$  annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, New York, v. 46, n. 4, p. 641-653, Oct. 1977.
- [19] ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic freedom in parton language. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 126, n. 2, p. 298-318, Aug. 1977.
- [20] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic  $ep$  scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, New York, v. 15, n. 4, p. 438-450, Oct. 1978.
- [21] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. Pomeron singularity in asymptotically free theories. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 60, n. 1, p. 50-52, Dec. 1975.
- [22] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. Multi Reggeon processes in the Yang-Mills theory. *Sov. Phys. JETP*, New York, v. 44, n. 3, p. 443-451, Sept. 1976.
- [23] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. The Pomeron singularity in nonAbelian gauge theories. *Sov. Phys. JETP*, New York, v. 45, n. 2, p. 199-204, Feb. 1977.
- [24] BALITSKY, Y.; LIPATOV, L. N. Pomeron singularity in quantum chromodynamics. *Sov. J. Nucl. Phys.*, New York, v. 28, n. 6, p. 822-829, Dec. 1978.
- [25] 'T HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 72, n. 3, p. 461-473, Abr. 1974.
- [26] GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M.; RYSKIN, M. G. Semihard process in QCD. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 100, n. 1/2, p. 1-150, Nov. 1983.

- [27] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B.; LEVIN, E. M. QCD evolution of the gluon density in a nucleus. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 493, n. 1/2, p. 305-353, Mai 1997.
- [28] AYALA, A. L.; GAY DUCATI, M. B.; LEVIN, E. M. Parton densities in a nucleon. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 511, n. 1/2, p. 355-395, Fev. 1998.
- [29] GLAUBER, R. J. Cross sections in deuterium at high energies. *Phys. Rev.*, New York, v. 100, n. 1, p. 242-248, Out. 1955.
- [30] MUELLER, A. H. Soft gluons in the finite momentum wave function and the BFKL Pomeron. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 415, n. 2, p. 373-385, Mar. 1994.
- [31] KOVCHEGOV, Y. V. Small-x  $F_2$  structure function of a nucleus including multiple Pomeron exchanges. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 60, n. 3, 034008 8p., jun. 1999.
- [32] KOVCHEGOV, Y. V. Unitarization of the BFKL Pomeron on a nucleus. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 61, n. 7, 074018 15p., Mar. 2000.
- [33] BALITSKY, I. Operator expansion for high-energy scattering. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 463, n. 1, p. 99-157, Mar 1996.
- [34] BALITSKY, I. Factorization for high-energy scattering. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 81, n. 10, p. 2024-2027, Set. 1998.
- [35] BALITSKY, I. Effective field theory for the small-x evolution. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 518, n. 3-4, p. 235-242, Out. 2001.
- [36] JALILIAN-MARIAN, J.; KOVNER, A.; LEONIDOV, A.; WEIGERT, H. The BFKL equation from the Wilson renormalization group. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 504, n. 1-2, p. 415-431, Out. 1997.
- [37] JALILIAN-MARIAN, J.; KOVNER, A.; LEONIDOV, A.; WEIGERT, H. Wilson renormalization group for low  $x$  physics: Towards the high density regime. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 59, n. 1, 014014 6p., Nov. 1998.
- [38] IANCU, E.; LEONIDOV, A.; MCLERRAN, D. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 692, n. 3-4, p. 583-645, Set. 2001.
- [39] IANCU, E.; LEONIDOV, A.; MCLERRAN, D. The Renormalization group equation for the color glass condensate. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 510, n. 1-4, p. 133-144, Jun. 2001.
- [40] FERREIRO, E.; IANCU, E.; LEONIDOV, A.; MCLERRAN, D. The Renormalization group equation for the color glass condensate. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 703, n. 1-2, p. 489-538, Mai. 2002.
- [41] WEIGERT, H. Unitarity at small Bjorken  $x$ . *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 730, n. 3-4, p. 823-860, Jun. 2002.

- [42] J. T. DE SANTANA AMARAL; M. B. GAY DUCATI; M. A. BETEMPS; G. SOYEZ.  $\gamma^*p$  cross section from the dipole model in momentum space. *Phys. Rev. D*, Melville, v.76, n. 9, 094018 7p., Nov. 2007.
- [43] STASTO, A. M.; GOLEC-BIERNAT, K.; KWIECINSKY, J. Geometric scaling for the total  $\gamma^*p$  cross section in the low  $x$  region. *Phys. Rev. Lett.*, Melville, v.86, n. 4, p. 596-599, Jan. 2001.
- [44] LIPATOV, L. N. Reggeization of the vector meson and the vacuum singularity in nonabelian gauge theories. *Sov. J. Nucl. Phys.*, New York, v. 23, p. 338-345, 1976.
- [45] FISHER, R. A. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics.*, v.7, p. 355-369, 1937.
- [46] KOLMOGOROV, A.; PETROVSKY, I.; PISCOUNOV, N. Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem. *Moscou Univ. Bull. Math.*, v.1, seção A, 1937.
- [47] BRAMSON, M. Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves. *Memoirs Am. Math. Soc.*, Rhode Island, v.4, n.285, julho de 1983.
- [48] MUNIER, S.; PESCHANSKY, R. Traveling wave fronts and the transition to saturation. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 69, n. 3, 034008 7p., Feb. 2004.
- [49] MUNIER, S.; PESCHANSKY, R. Universality and tree structure of high-energy QCD. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 70, n. 7, 077503 4p., Out. 2004.
- [50] BRUNET, E.; DERRIDA, B. Shift in the velocity of a front due to a cutoff. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 56, n. 3, p. 2597-2604, Set. 1997.
- [51] ADLOFF, C *et al.* [H1 Collaboration]. Deep-inelastic inclusive  $ep$  scattering at low  $x$  and a determination of  $\alpha_s$ . *Eur. Phys. J. C*, Heidelberg, v. 21, n. 1, p. 33-61, Jun. 2001.
- [52] BREITWEG, J. *et al.* [ZEUS Collaboration]. Measurement of exclusive  $\omega$  electroproduction at HERA. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 487, n. 3-4, p. 273-288, Ago. 2000.
- [53] CHEKANOV, S. *et al.* [ZEUS Collaboration]. Measurement of the neutral current cross section and  $F_2$  structure function for deep inelastic  $e^+p$  scattering at HERA. *Eur. Phys. J. C*, Heidelberg, v. 21, n. 3, p. 443-471, Jul. 2001.
- [54] ENBERG, R.; GOLEC-BIERNAT, K.; MUNIER, S. High energy asymptotics of scattering processes in QCD. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 72, n. 7, 074021 20p., Out. 2005.
- [55] BETEMPS, M. A.; GAY DUCATI, M. B. Dilepton low  $pT$  suppression as an evidence of the color glass condensate. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 70, n. 11, 116005 10p., Dez. 2004.

- [56] BARTELS, J.; GOLEC-BIERNAT, K.; KOWALSKI, H. Modification of the saturation model: Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi evolution. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 66, n. 1, 014001 9p., Jun. 2002.
- [57] GOLEC-BIERNAT, K.; SAPETA, S. Heavy flavor production in DGLAP improved saturation model. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 74, n. 5, 054032 8p., Set. 2006.
- [58] IANCU, E.; TRIANTAFYLLOPOULOS, D. N. A Langevin equation for high-energy evolution with pomeron loops. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 756, n. 3-4, p. 419-467, Jul. 2005.
- [59] IANCU, E.; TRIANTAFYLLOPOULOS, D. N. Non-linear QCD evolution with improved triple-pomeron vertices. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 610, n. 3-4, p. 253-261, Mar. 2005.
- [60] IANCU, E.; MUELLER, A. H. Rare fluctuations and the high-energy limit of the S-matrix in QCD. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 730, n. 3-4, p. 494-513, Jan. 2004.
- [61] GARDINER, C. W. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry, and the natural sciences. 3. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [62] SCHERER, C. Métodos computacionais da Física. São Paulo : Editora Livraria da Física, 2005.
- [63] IANCU, E.; MUELLER, A. H. From color glass to color dipoles in high-energy onium-onium scattering. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 730, n. 3-4, p. 460-493, Jan. 2004.
- [64] SAARLOOS, W. V. Front propagation into unstable states. *Phys. Rep*, Amsterdam, v. 386, n. 2-6, p. 29-222, Nov. 2003.
- [65] PANJA, D. Effects of fluctuations on propagating fronts. *Phys. Rep*, Amsterdam, v. 393, n. 2, p. 87-174, Mar. 2004.
- [66] BRUNET, E.; DERRIDA, B. Microscopic models of traveling wave equations. *Comp. Phys. Comm.*, Amsterdam, v. 121-122, p. 376-381, Set-Out. 1999.
- [67] BRUNET, E.; DERRIDA, B. Effect of microscopic noise on front propagation. *J. Stat. Phys.*, Heidelberg, v. 103, n. 1-2, p. 269-282, Abr. 2001.
- [68] MUELLER, A. H; SHOSHI, A. I. Small-x physics beyond the Kovchegov equation. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 692, n. 1-2, p. 175-208, Ago. 2004.
- [69] IANCU, E.; MUELLER, A. H; MUNIER, S. Universal behavior of QCD amplitudes at high energy from general tools of statistical physics. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 606, n. 3-4, p. 342-350, Jan. 2005.
- [70] BASSO, E.; GAY DUCATI, M. B.; de OLIVEIRA, E. G.; de SANTANA AMARAL, J. T. DIS and the effects of fluctuations: a momentum space analysis. *Eur. Phys. J. C*, Heidelberg, v. 58, n. 1, p. 9-15, Set. 2008.

- 
- [71] KOZLOV, M.; SHOSHI, A.; XIANG, W. On possible implications of gluon number fluctuations in DIS data. *J. High Energy Phys.*, Bristol, v. 0710, 020, Out. 2007.
- [72] SOYEZ, G. Fluctuation effects in high-energy evolution of QCD. *Phys. Rev. D*, Melville, v. 72, n. 1, 016007 10p., Jul. 2005.
- [73] IANCU, E.; de SANTANA AMARAL, J. T.; SOYEZ, G.; TRIANTAFYLLOPOULOS, D. N. One-dimensional model for QCD at high energy. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 786, n. 1-4, p. 131-163, Abr. 2007.
- [74] BRUNET, E.; DERRIDA, B.; MUELLER, A. H.; MUNIER, S. Phenomenological theory giving the full statistics of the position of fluctuating pulled fronts. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 73, n. 5, 056126 9p., Mai 2006.
- [75] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1964.