Efeitos de flutuações nas amplitudes de espalhamento em altas energias

Eduardo André Flach Basso
andre.basso@ufrgs.br

Dissertação de mestrado

Orientação: Maria Beatriz Gay

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Trabalho financiado pelo CNPq

Sumário

- A Cromodinâmica Quântica
- Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS)
- O referencial de dipolos
- A QCD em altas energias
- Evolução não linear das amplitudes de dipolos
- O modelo AGBS
- Flutuações no número de partículas e suas consequências para a QCD em altas energias
  - Evolução de dipolos com flutuações
  - Equações de evolução de laços de Pomerons
  - Equação de Langevin e sua conexão com processos de reação–difusão
  - Flutuações no modelo AGBS
- Resultados
- Conclusões e perspectivas

Cromodinâmica Quântica

- A QCD é uma teoria de calibre que descreve as interações fortes entre quarks (spin 1/2 - q) e glúons (spin 1 - A_μ^A) – pártons.
- Grupo de simetria SU(N_c), $N_c = 3$, onde a carga de cor é introduzida como novo grau de liberdade

$$\left[t^A, t^B\right] = \imath f^{ABC} t^C$$

- A Lagrangiana da teoria pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \sum_{\text{sabores}} \bar{q}_a (\imath\gamma^\mu D_\mu - m)_{ab} q_b + \mathcal{L}_{\text{fix. calibre}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}$$

onde $F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C$

- Propriedades peculiares da QCD:

  Confinamento

  Liberdade assintótica

Cromodinâmica Quântica

- A QCD é uma teoria de calibre que descreve as interações fortes entre quarks (spin 1/2 - q) e glúons (spin 1 - A_μ^A) – pártons.
- Grupo de simetria SU(N_c), $N_c = 3$, onde a carga de cor é introduzida como novo grau de liberdade

$$\left[t^A, t^B\right] = \imath f^{ABC} t^C$$

- A Lagrangiana da teoria pode ser escrita como

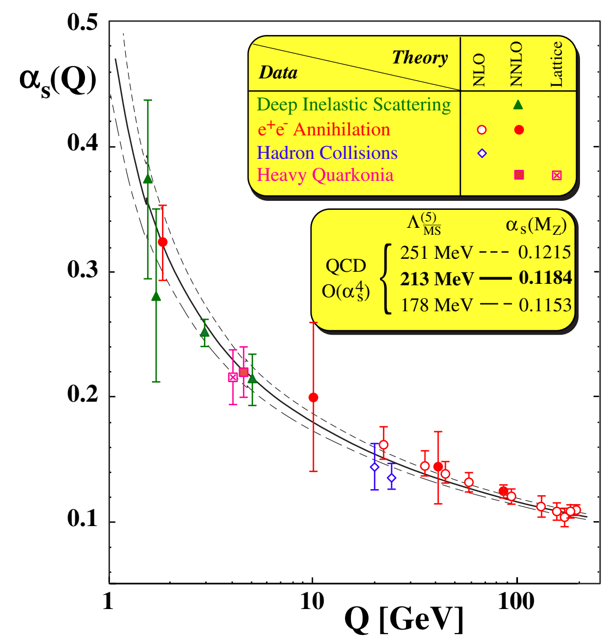
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} + \sum_{\text{sabores}} \bar{q}_a (\imath\gamma^\mu D_\mu - m)_{ab} q_b + \mathcal{L}_{\text{fix. calibre}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}$$

onde $F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - g_s f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C$

- Propriedades peculiares da QCD:

  Confinamento

  Liberdade assintótica



Cromodinâmica Quântica

- A QCD é uma teoria de calibre que descreve as interações fortes entre quarks (spin 1/2 - q) e glúons (spin 1 - A^A_μ) – pártons.
- Grupo de simetria SU(N_c), $N_c = 3$, onde a carga de cor é introduzida como novo grau de liberdade

$$\left[t^A, t^B\right] = \imath f^{ABC} t^C$$

- A Lagrangiana da teoria pode ser escrita como

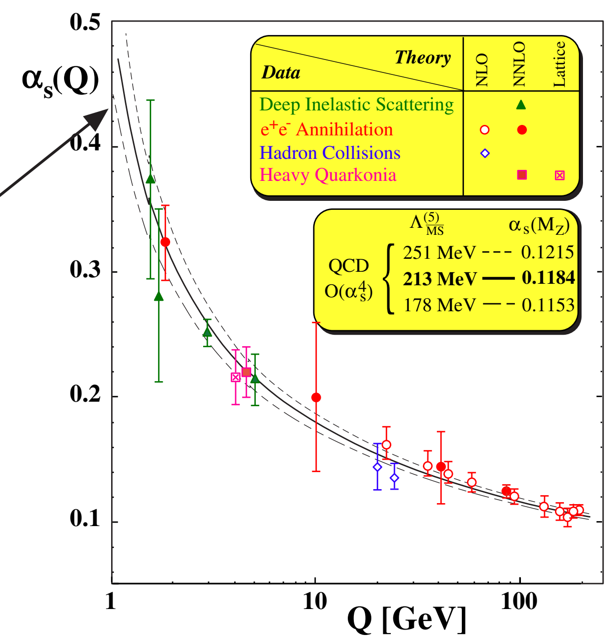
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^A_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_A + \sum_{\text{sabores}} \bar{q}_a (\imath\gamma^\mu D_\mu - m)_{ab} q_b + \mathcal{L}_{\text{fix. calibre}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}$$

onde $F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - g_s f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu$

- Propriedades peculiares da QCD:

  Confinamento

  Liberdade assintótica



Cromodinâmica Quântica

- A QCD é uma teoria de calibre que descreve as interações fortes entre quarks (spin 1/2 - q) e glúons (spin 1 - A^A_μ) – pártons.
- Grupo de simetria SU(N_c), $N_c = 3$, onde a carga de cor é introduzida como novo grau de liberdade

$$\left[t^A, t^B\right] = \imath f^{ABC} t^C$$

- A Lagrangiana da teoria pode ser escrita como

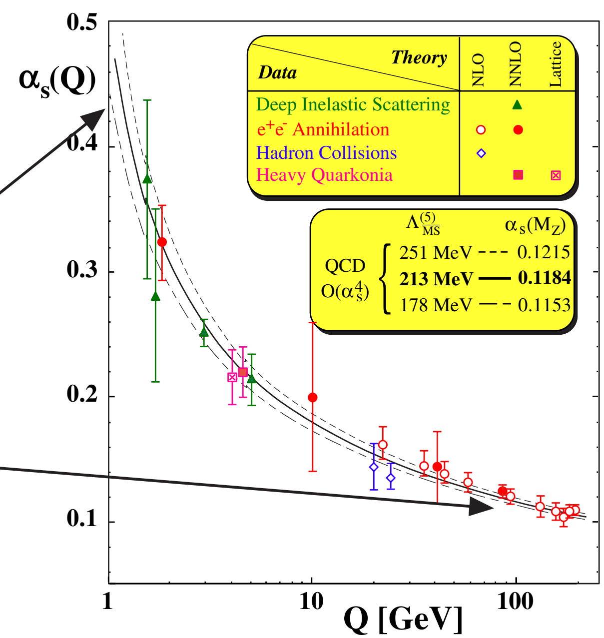
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^A_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_A + \sum_{\text{sabores}} \bar{q}_a (\imath\gamma^\mu D_\mu - m)_{ab} q_b + \mathcal{L}_{\text{fix. calibre}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}$$

onde $F^A_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu - g_s f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu$

- Propriedades peculiares da QCD:

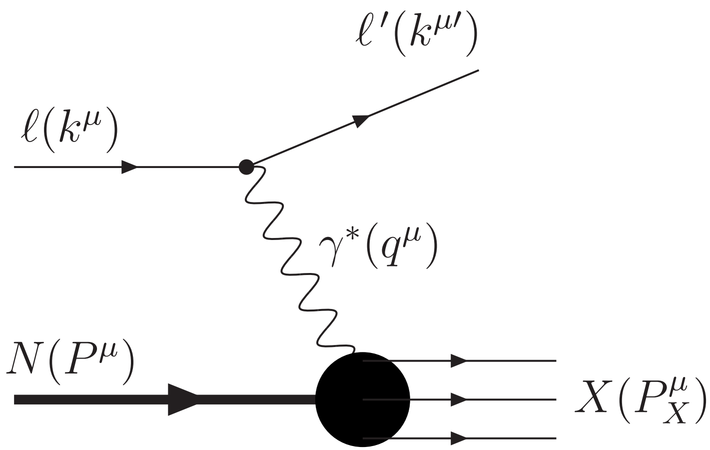
  Confinamento

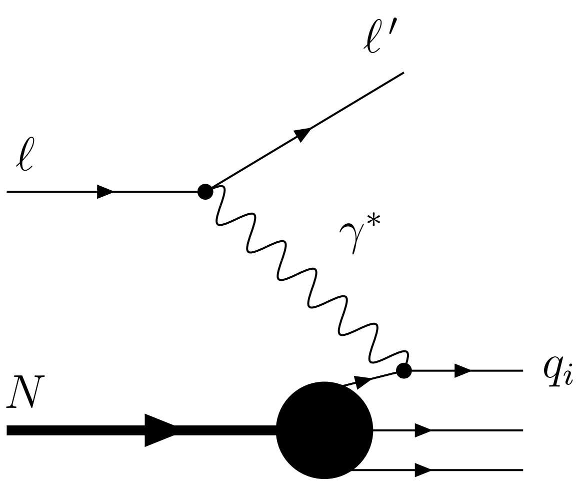
  Liberdade assintótica



DIS

Variáveis cinemáticas





- Quadrado da energia total do sistema $\gamma^* N$

$$W^2 = (P+q)^2$$

- Virtualidade do fóton

$$q^2 = (k-k')^2 = -Q^2 < 0$$

- Variável de Bjorken

$$x \equiv x_{Bj} = \frac{Q^2}{2P\cdot q} = \frac{Q^2}{Q^2+W^2}$$

- Rapidez

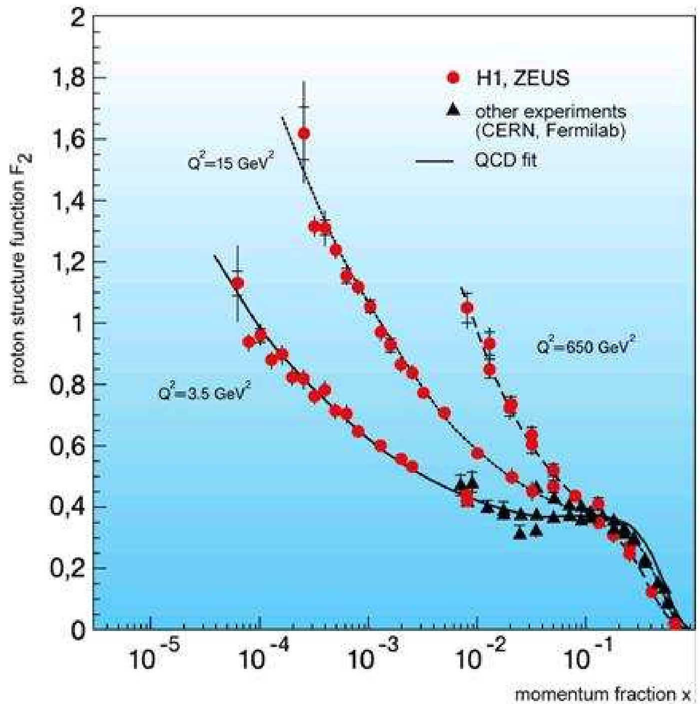
$$Y \equiv \ln(1/x)$$

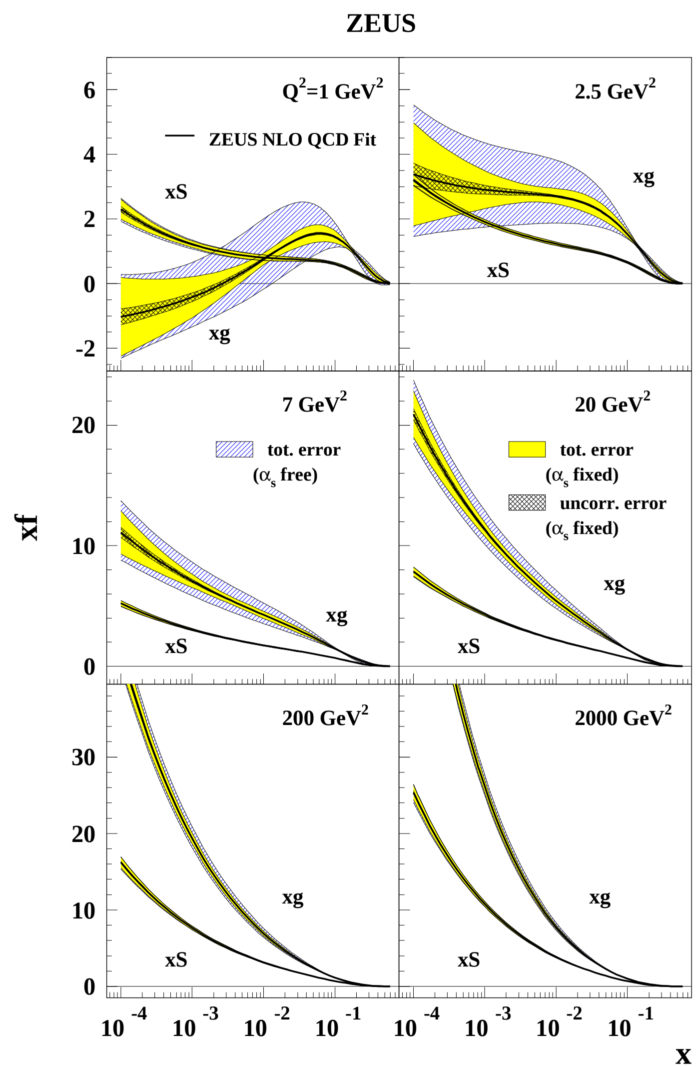
- Limite de altas energias:

$$W^2 \to \infty, \quad x \approx \frac{Q^2}{W^2} \to 0$$

DIS em HERA

Foster 2003

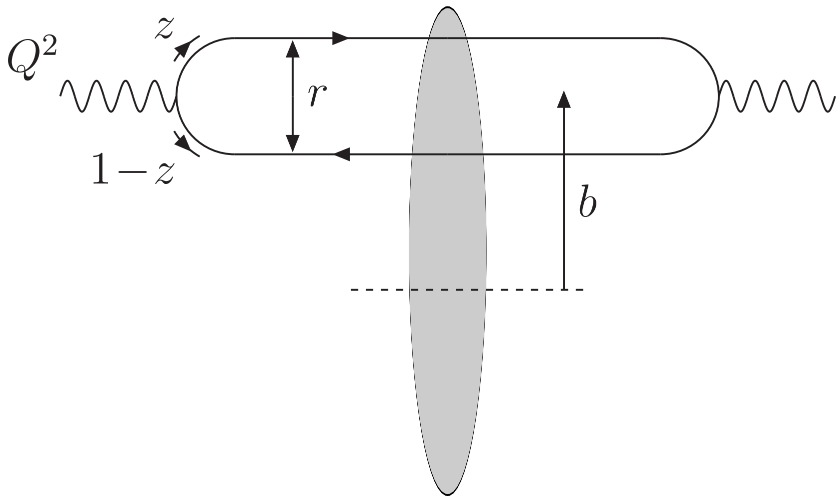




$$F_2 = x \sum_i e_i^2 \, f_i(x)$$

$$\sigma^{\gamma^* N}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2)$$

DIS no referencial de dipolos



Alvo com maior parte do momentum do processo

$$|\gamma^*\rangle = \sum |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle$$

r : tamanho do dipolo

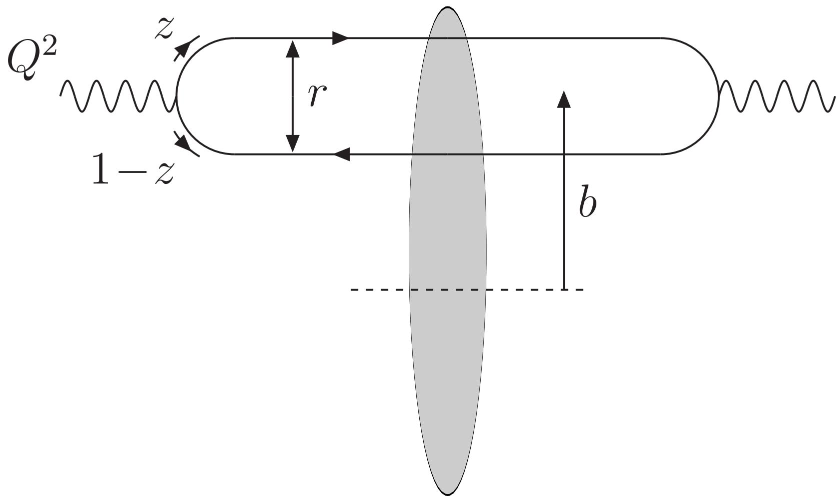
b : parâmetro de impacto

z : fração de momentum portada pelo quark

- A seção de choque assume a forma fatorizada, para pequeno x

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(Y, Q^2) = \int d^2r \int_0^1 dz \, \left|\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)\right|^2 \sigma_{dip}(r, Y)$$

DIS no referencial de dipolos



Alvo com maior parte do momentum do processo

$$|\gamma^*\rangle = \sum |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle$$

r : tamanho do dipolo

b : parâmetro de impacto

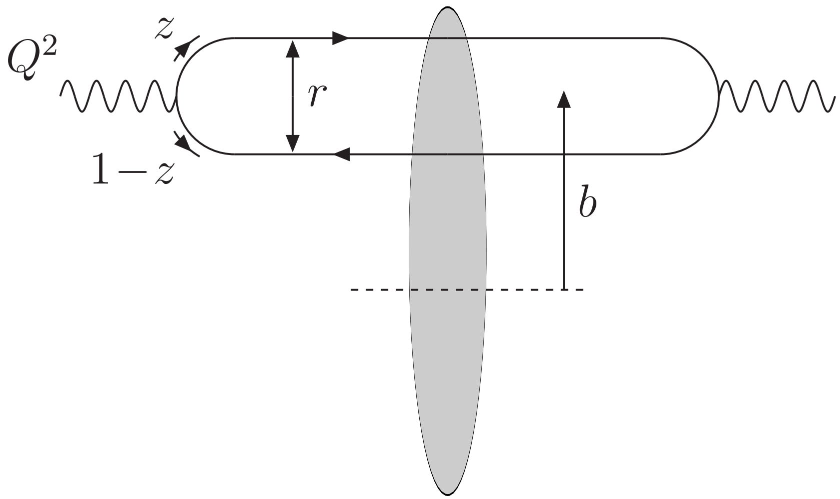
z : fração de momentum portada pelo quark

- A seção de choque assume a forma fatorizada, para pequeno x

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(Y,Q^2) = \int d^2r \int_0^1 dz\, \left|\Psi_{T,L}(r,z;Q^2)\right|^2 \sigma_{dip}(r,Y)$$

Fenomenologia: GBW, IIM, AGBS

DIS no referencial de dipolos



Alvo com maior parte do momentum do processo

$$|\gamma^*\rangle = \sum |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle$$

r : tamanho do dipolo

b : parâmetro de impacto

z : fração de momentum portada pelo quark

- A seção de choque assume a forma fatorizada, para pequeno x

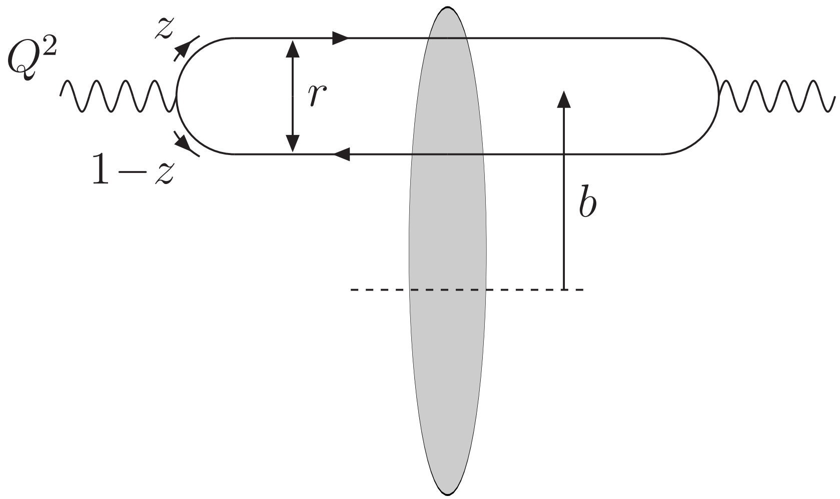
$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(Y,Q^2) = \int d^2r \int_0^1 dz\, \left|\Psi_{T,L}(r,z;Q^2)\right|^2 \sigma_{dip}(r,Y)$$

Fenomenologia: GBW, IIM, AGBS

- Assumindo independência sobre o parâmetro de impacto, a seção de choque dipolo-próton é dada por

$$\sigma_{dip}(r,Y) = 2\pi R_p^2\, T(r,Y)$$

DIS no referencial de dipolos



Alvo com maior parte do momentum do processo

$$|\gamma^*\rangle = \sum |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle$$

r : tamanho do dipolo

b : parâmetro de impacto

z : fração de momentum portada pelo quark

- A seção de choque assume a forma fatorizada, para pequeno x

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(Y, Q^2) = \int d^2r \int_0^1 dz \, \left|\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)\right|^2 \sigma_{dip}(r, Y)$$

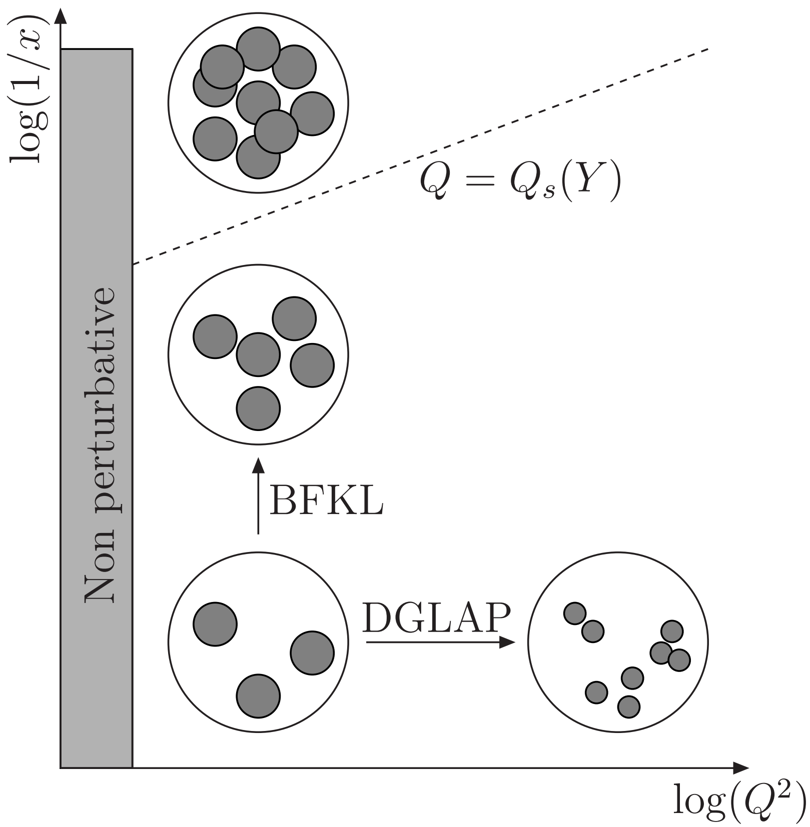
Fenomenologia: GBW, IIM, AGBS

- Assumindo independência sobre o parâmetro de impacto, a seção de choque dipolo-próton é dada por

$$\sigma_{dip}(r, Y) = 2\pi R_p^2 \, T(r, Y)$$

- Evolução de $T(r, Y)$ no **formalismo de dipolos**: limite de grande N_c, glúon $\equiv$ dipolo

QCD em altas energias



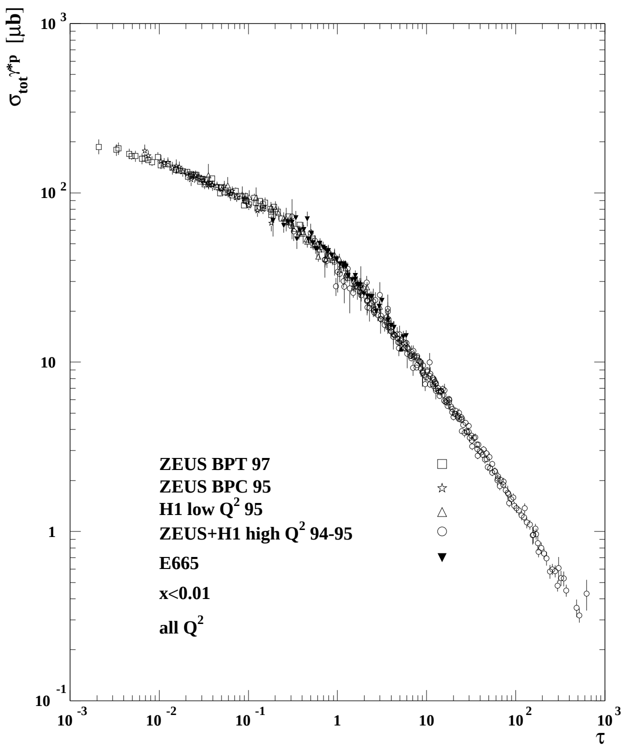
- Equações de evolução lineares DGLAP e BFKL
- Ambas falham na região de $x \to 0$: violam unitariedade de σ_{tot}
- Para $x \to 0$, devem ser considerados efeitos de recombinação de glúons e múltiplos espalhamentos $\Rightarrow$ saturação
- $Q_s^2(Y) \equiv$ escala de saturação
- saturação $\Rightarrow$ evolução não linear

- Dinâmicas de QCD pura: GLR , AGL
- No formalismo de dipolos: hierarquia de Balitsky , BK
- Teoria de campo efetiva: CGC $\Rightarrow$ JIMWLK

Evolução para $T(r, Y)$

Escalamento geométrico e Saturação

Stasto, Golec-Biernat, Kwiecinsky 2001



$$\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}$$

- Escalamento geométrico observado em HERA:

$$\sigma^{\gamma^* p}(Y, Q^2) = \sigma^{\gamma^* p}\left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)}\right)$$

- No referencial de dipolos

$$\sigma_{dip}(r, Y) = \sigma_{dip}\left(r^2 Q_s^2(Y)\right) \propto T\left(r^2 Q_s^2(Y)\right)$$

- Somente modelos fenomenológicos de saturação descrevem o escalamento das seções de choque em HERA
- $Q_s^2(Y) \equiv$ escala de saturação marca um limite superior aproximado para a região onde efeitos de saturação devem ser importantes

Evolução não linear de dipolos

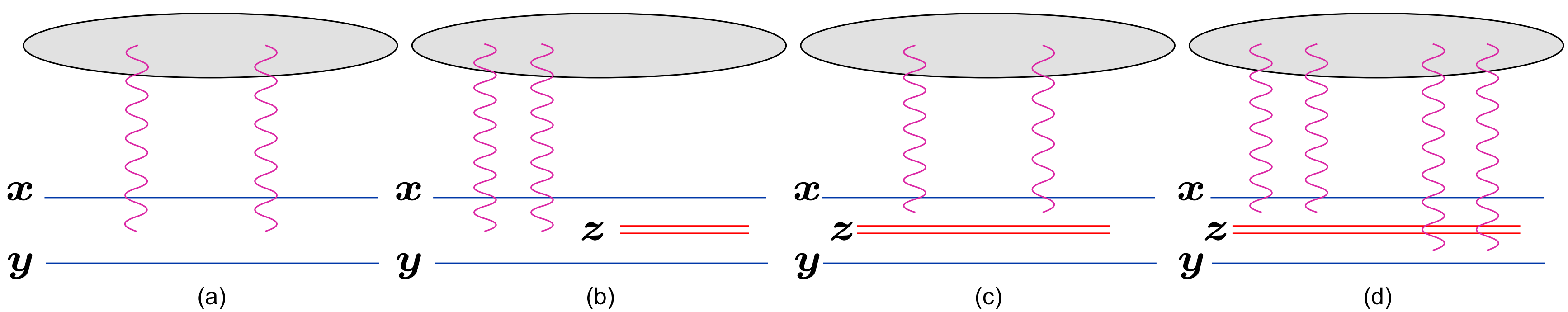
- Hierarquia de Balitsky $\mathcal{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})^2}$ $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c/\pi$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\int d^2\boldsymbol{z}\,\mathcal{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \times \Big\{ -\langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle_Y + \langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\rangle_Y + \langle T(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\rangle_Y - \langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})T(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\rangle_Y \Big\}$$

$$\vdots$$

- Campo médio: $\langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\rangle_Y \approx \langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\rangle_Y \langle T(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\rangle_Y \Rightarrow$ equação BK

$$\frac{\partial}{\partial Y}\langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\int d^2\boldsymbol{z}\,\mathcal{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \times \Big\{ -\langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle_Y + \langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\rangle_Y + \langle T(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\rangle_Y - \langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\rangle_Y \langle T(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\rangle_Y \Big\}$$



Propriedades das amplitudes

- O comportamento analítico das amplitudes BK pode ser obtido na analogia entre a QCD e processos de reação–difusão
- Analogia originalmente obtida no espaço de momentum. Por meio da transformada de Fourier

$$\tilde{T}(k,Y) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d^2r}{r^2} e^{\imath \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{r}} T(r,Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r,Y)$$

a equação BK toma a forma $\left(\tilde{T}(k,Y)\right.$ independente de $\left.\boldsymbol{b}\right)$

$$\partial_Y \tilde{T} = \bar{\alpha}\chi(-\partial_L)\tilde{T} - \bar{\alpha}\tilde{T}^2$$

onde

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma)$$

é a função característica no núcleo da equação BFKL em ordem dominante e $L = \log(k^2/k_0^2)$

- Na aproximação difusiva para $\chi(\gamma)$

$$\chi(-\partial_L) = \chi(\gamma_c) + (-\partial_L - \gamma_c 1)\chi'(\gamma_c) + \frac{1}{2}(-\partial_L - \gamma_c 1)^2\chi''(\gamma_c)$$

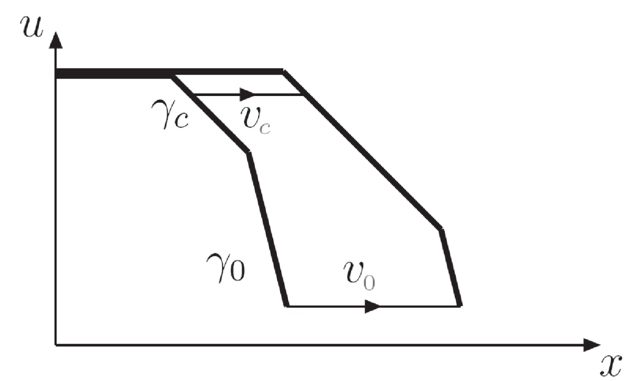
e sob as transformações $t = \bar{\alpha}Y$, $x \propto L$ e $u = \tilde{T}$ temos que BK $\equiv$ FKPP (Munier e Peschansky - 2004)

$$\partial_t\, u(x,t) = \partial_x^2\, u(x,t) + u(x,t) - u^2(x,t)$$

Propriedades das amplitudes

- FKPP admite as chamadas *soluções de ondas propagantes*: $u(x,t) \overset{t\to\infty}{\sim} u(x - v_c t)$
  - $u = 0$ instável e $u = 1$ estável.
  - $\gamma_0 > \gamma_c$
  - $u(x,t) = \int_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty} \frac{d\gamma}{2\imath\pi} u_0(\gamma) e^{-\gamma(x_{wf}+vt)+\omega(\gamma)t}$

$$v_c = \frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c} = \partial_\gamma \omega(\gamma)|_{\gamma_c}$$



- Nas variáveis da QCD : $\omega(\gamma_c) = \chi(\gamma_c) \Rightarrow \gamma_c = 0.6275$
- Resultado: escalamento geométrico das amplitudes: $\tilde{T}(k,Y) \overset{Y\gg1}{\cong} \tilde{T}\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)$, onde $Q_s^2(Y)$ mede a posição da frente de onda
- A expressão para a cauda da amplitude (regime diluto) é dada por

$$\tilde{T}(k,Y) \overset{k\gg Q_s}{\approx} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)^{-\gamma_c} \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right) \exp\left[-\frac{\log^2\left(k^2/Q_s^2(Y)\right)}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y}\right]$$

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp\left(v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c}\log Y\right)$$

O modelo AGBS

Amaral, Gay Ducati, Betemps, Soyez - 2007

- Na região de saturação, mostra-se que a amplitude se comporta como

$$\tilde{T}\left(\frac{k}{Q_s(Y)}, Y\right) \stackrel{k \ll Q_s}{=} c - \log\left(\frac{k}{Q_s(Y)}\right)$$

- O modelo AGBS interpola analiticamente os comportamentos diluto e saturado:

$$\tilde{T}(k, Y) = \left[\log\left(\frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k}\right) + 1\right]\left(1 - e^{-T_{\text{dil}}}\right)$$

onde

$$T_{\text{dil}} = \exp\left[-\gamma_c \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right) - \frac{L_{\text{red}}^2 - \log^2(2)}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y}\right]$$

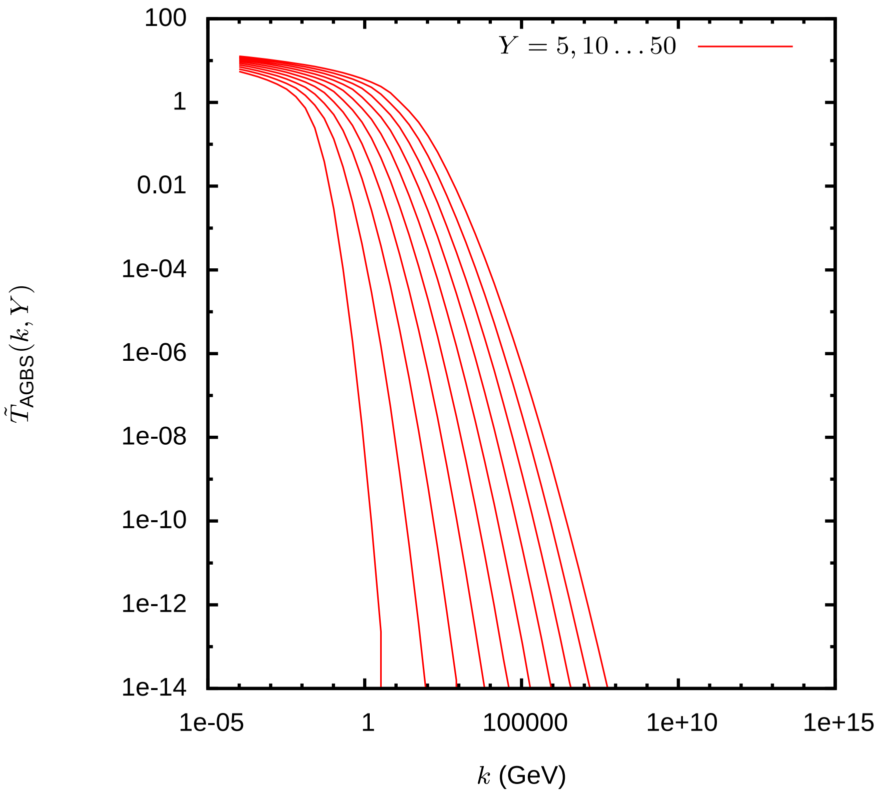
e

$$L_{\text{red}} = \log\left[1 + \frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right] \qquad \text{com} \quad Q_s^2(Y) = k_0^2\, e^{\lambda Y}$$

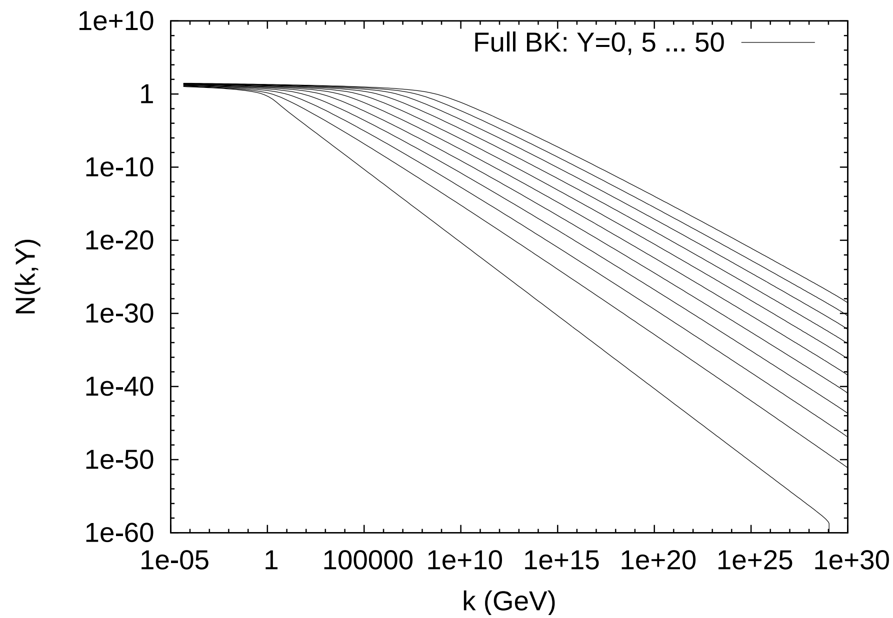
- Ajuste à F_2 no espaço de momentum

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz\, |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y)$$

O modelo AGBS



Enberg, Golec-Biernat, Munier - 2005



- O modelo AGBS ajusta bem os dados de HERA, incluindo a contribuição de quarks charm

Evolução dipolar com flutuações

- Ensemble estocástico de configurações de dipolos (Iancu, Mueller - 2004)

$$\partial_Y P_N(\{z_i\};Y) = -\frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{N}\int d^2\boldsymbol{z}\mathcal{M}(\boldsymbol{z}_{i-1},\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z})\right]P_N(\{\boldsymbol{z}_i\};Y)$$
$$+\frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\sum_{i=1}^{N-1}\mathcal{M}(\boldsymbol{z}_{i-1},\boldsymbol{z}_{i+1},\boldsymbol{z})P_{N-1}(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_{i-1},\boldsymbol{z}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{z}_{N-1};Y) \tag{1}$$

- C.I.: $P_N(Y=0)=\delta_{N1}$. Valor esperado de um operador $\mathcal{O}\equiv\mathcal{O}(r)$

$$\langle\mathcal{O}(Y)\rangle = \sum_{N=1}^{\infty}\int d\Gamma_N\, P_N(\{\boldsymbol{z}_i\};Y)\,\mathcal{O}_N(\{\boldsymbol{z}_i\})$$

com $d\Gamma_N = d^2\boldsymbol{z}_1 d^2\boldsymbol{z}_2\ldots d^2\boldsymbol{z}_{N-1}$. Usando a equação mestra (1) temos que

$$\partial_Y\langle\mathcal{O}_N(Y)\rangle = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\sum_{N=1}^{\infty}\int d\Gamma_N\, P_N(\{z_i\};Y)\sum_{i=1}^{N}\int d^2\boldsymbol{z}\mathcal{M}(\boldsymbol{z}_{i-1},\boldsymbol{z}_i,\boldsymbol{z})$$
$$\times\left[-\mathcal{O}_N(\{\boldsymbol{z}_i\})+\mathcal{O}_{N+1}(\{\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_{i-1},\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}_i,\ldots,\boldsymbol{z}_{N-1}\})\right]. \tag{2}$$

Evolução dipolar com flutuações

- densidade média do número de dipolos para uma configuração de N dipolos

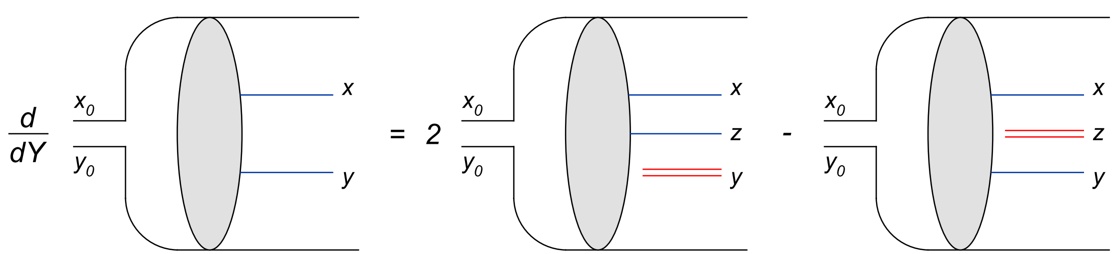
$$n_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{N} \delta^{(2)}(\boldsymbol{z}_{j-1} - \boldsymbol{x})\delta^{(2)}(\boldsymbol{z}_j - \boldsymbol{y})$$

- Para $n_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \langle n_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\rangle_Y$ a eq. (2) fornece

$$\frac{\partial n_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial_Y} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2\boldsymbol{z} \mathcal{M}_{\boldsymbol{xyz}} \otimes n_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

onde usamos a notação

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{xyz}} \otimes n_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \left[-n_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + n_Y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + n_Y(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})\right]$$



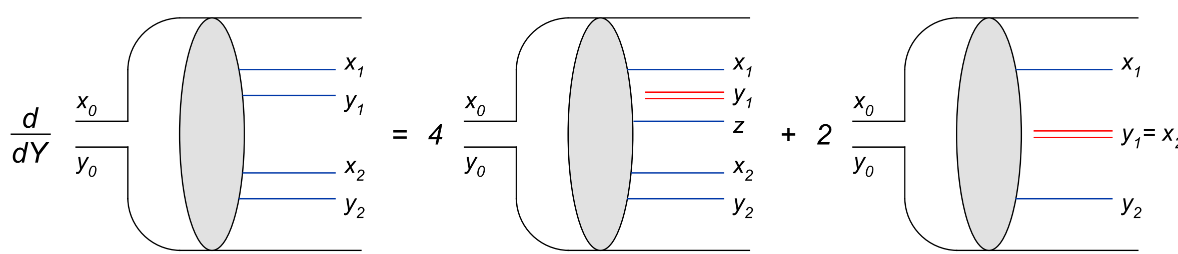
Evolução dipolar com flutuações

- Para a densidade de um par de dipolos

$$n_N^{(2)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2) = : n_N(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)n_N(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2) :$$
$$\equiv n_N(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)n_N(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2) - \delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\delta^{(2)}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2)n_N(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)$$

temos que

$$\frac{\partial n_Y^{(2)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)}{\partial Y} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\left[\int d^2\boldsymbol{z}\mathcal{M}_{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}} \otimes n_Y^{(2)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)\right.$$
$$\left. + \mathcal{M}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{x}_2)n_Y(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_2)\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_1)\right] + \{1 \leftrightarrow 2\}$$



Evolução com saturação e flutuações

- A hierarquia de Balitsky, e portanto a equação BK, não leva em conta os efeitos de flutuações no número de dipolos no alvo
- Seja o espalhamento de um dipolo externo com um alvo diluto . A amplitude de espalhamento para este processo é dada por

$$T_Y(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}) = \int d^2\boldsymbol{r}_1 \int d^2\boldsymbol{b}_1\, \mathcal{T}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_1) n_Y(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{b}_1)$$

- Na região diluta, a densidade de dipolos é descrita pela evolução BFKL:

$$n_Y(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{b}) \sim \frac{1}{\boldsymbol{r}_1^4}\left(\boldsymbol{r}_1^2 Q_c^2(\boldsymbol{b},Y)\right)^{\gamma_c}$$

Com isso

$$T_Y(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}) \simeq \alpha_s^2 r^4 n_Y(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})$$

- A amplitude para dois dipolos é

$$\begin{aligned} T_Y^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{b}_1;\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{b}_2) =& T_Y(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{b}_1) T_Y(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{b}_2) \\ \simeq& \alpha_s^4 r_1^4 r_2^4 : n_Y(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{b}_1) n_Y(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{b}_2) : \end{aligned}$$

Evolução com saturação e flutuações

- A evolução de tais amplitudes é obtida através das expressões para n_Y, $n_Y^{(2)}$.
- Estas evoluções são estendidas para o regime de saturação pela inclusão dos termos de correlação, como ocorre na hieraquia de Balitsky. Assim, para n_Y adicionamos $\langle -T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})T(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\rangle_Y \equiv -\left\langle T^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z};\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\right\rangle_Y$

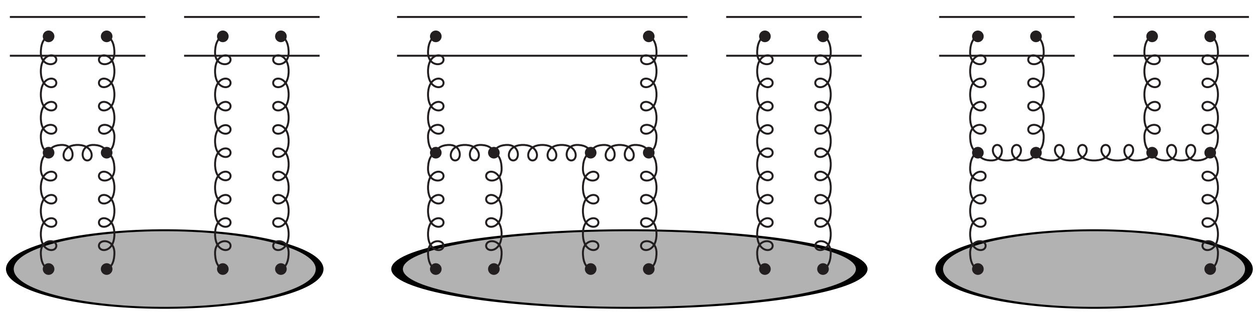
$$\frac{\partial \langle T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle_Y}{\partial Y} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\left\{\int d^2\boldsymbol{z}\mathcal{M}_{\boldsymbol{xyz}} \otimes \langle T_Y(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle_Y - \mathcal{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\left\langle T^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z};\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\right\rangle_Y\right\}$$

- Para o espalhamento de dois dipolos e o alvo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \left\langle T^{(2)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)\right\rangle_Y}{\partial Y} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi}\Bigg\{\int d^2\boldsymbol{z}\Big[&\mathcal{M}_{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}} \otimes \left\langle T^{(2)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)\right\rangle_Y \\ &- \mathcal{M}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{z})\left\langle T^{(3)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{z};\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}_1;\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)\right\rangle_Y\Big] \\ &+ \kappa\alpha_s^2\mathcal{M}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{x}_2)\langle T(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_2)\rangle_Y\,\delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_1)\Bigg\} + \{1 \leftrightarrow 2\}\end{aligned}$$

Evolução com saturação e flutuações

- Diagramaticamente



termo BFKL : $\partial_Y \left\langle T^2 \right\rangle \propto \left\langle T^2 \right\rangle$
termo de saturação (fusão de Pomerons): $\partial_Y \left\langle T^2 \right\rangle \propto \left\langle T^3 \right\rangle$
termo de flutuação (desdobramento de Pomerons): $\partial_Y \left\langle T^2 \right\rangle \propto \left\langle T \right\rangle$

- Fusão de Pomerons + desdobramento de Pomerons $=$ Equações de laços de Pomerons
- Dificuldade: A hieraquia de equações obtida é bastante complicada

Equação de Langevin

- Supõe-se quasi-localidade no parâmetro de impacto $\boldsymbol{b}$: Alvo quase homogêneno
- Todos os termos, exceto os termos de flutuações, se tornam locais em $\boldsymbol{b}$
- Trabalhando no espaço de momentum

$$\varphi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}) = \int \frac{d^2\boldsymbol{r}}{2\pi\boldsymbol{r}^2}\, e^{-\imath\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, T(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b})$$

os termos não lineares se tornam locais em $\boldsymbol{k}$

- A evolução para o espalhamento de um dipolo externo é dada no espaço de momentum por

$$\frac{\partial\left\langle\varphi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b})\right\rangle_Y}{\partial Y} = \bar{\alpha}\int\frac{d^2\boldsymbol{p}}{\pi}\frac{\boldsymbol{k}^2}{\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2}\left\langle\frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{k}^2}\varphi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b})\right\rangle_Y - \bar{\alpha}\left\langle\varphi^2(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b})\right\rangle_Y$$

- Para dois dipolos a evolução é similar, mas com um termo de flutuação, dado no espaço de momentum por

$$\left.\frac{\partial\left\langle\varphi(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{b}_1)\varphi(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{b}_2)\right\rangle_Y}{\partial Y}\right|_{\text{flut}} = \bar{\alpha}2\kappa\alpha_s^2\delta^{(2)}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\int\frac{d^2\boldsymbol{r}}{2\pi\boldsymbol{r}^2}e^{-\imath\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left\langle T(\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}_1)\right\rangle_Y \times\delta^{(2)}\left(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)$$

Equação de Langevin

- Problema! a função delta impede a localidade do termo de flutuações
- Solução: discretizar o espaço de parâmetro de impacto
- No espaço de momentum, discretiza-se o espaço em células de área $1/k^2$

$$\varphi_i(\boldsymbol{k}) \equiv k^2 \int_{\sum_i(\boldsymbol{k})} d^2\boldsymbol{b}\varphi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}), \qquad \varphi_i^2(\boldsymbol{k}) \equiv k^2 \int_{\sum_i(\boldsymbol{k})} d^2\boldsymbol{b}\varphi^2(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}), \qquad \ldots$$

- Isto equivale a tomar o valor das amplitudes no centro de cada célula: $\varphi_i(\boldsymbol{k}) \approx \varphi(\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}_i)$ e $\varphi_i^2(\boldsymbol{k}) \approx [\varphi_i(\boldsymbol{k})]^2$

$$\left.\frac{\partial \left\langle \varphi(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{b}_1)\varphi(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{b}_2)\right\rangle_Y}{\partial Y}\right|_{\text{flut}} = \bar{\alpha}2\kappa\alpha_s^2 k_1^2 \delta^{(2)}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\left\langle \varphi_i(\boldsymbol{k}_1)\right\rangle_Y$$

- A segunda equação da hierarquia é agora

$$\frac{\partial \left\langle \varphi_i(\boldsymbol{k}_1)\varphi_i(\boldsymbol{k}_2)\right\rangle_Y}{\partial Y} = \bar{\alpha}\left\{ \int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{2\pi}\frac{\boldsymbol{k}_1^2}{\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{p})^2}\left\langle \left(2\frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{k}_1^2}\varphi_i(\boldsymbol{p})-\varphi_i(\boldsymbol{k}_1)\right)\varphi_i(\boldsymbol{k}_2)\right\rangle_Y \right.$$
$$\left. -\left\langle \varphi_i^2(\boldsymbol{k}_1)\varphi_i(\boldsymbol{k}_2)\right\rangle_Y + \kappa\alpha_s^2\delta^{(2)}(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{k}_1^2\left\langle\varphi_i(\boldsymbol{k}_1)\right\rangle_Y\right\} + \{1\leftrightarrow 2\}$$

Equação de Langevin

- Toda a hieraquia de equações pode ser escrita em termos de uma equação de Langevin (Iancu, Triantafyllopoulos - 2005)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{k})}{\partial Y} =& \bar{\alpha} \int \frac{d^2 \boldsymbol{p}}{2\pi} \frac{\boldsymbol{k}^2}{\boldsymbol{p}^2 (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2} \left(2 \frac{\boldsymbol{p}^2}{\boldsymbol{k}^2} \varphi(\boldsymbol{p}) - \varphi(\boldsymbol{k}) \right) - \bar{\alpha} \varphi^2(\boldsymbol{k}) \\
&+ \bar{\alpha} \sqrt{2\kappa \alpha_s^2 \varphi(\boldsymbol{k})} \nu(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

onde $\nu(\boldsymbol{k}, Y)$ é um ruído branco gaussiano que satisfaz:

$$
\begin{aligned}
\langle \nu(\boldsymbol{k}, Y) \rangle =& 0 \\
\langle \nu(\boldsymbol{k}_1, Y_1), \nu(\boldsymbol{k}_2, Y_2) \rangle =& \frac{1}{\bar{\alpha}} \delta(Y_1 - Y_2) \delta^{(2)}(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \boldsymbol{k}_1^2 .
\end{aligned}
$$

- Esta equação pode ser escrita ainda como

$$
\partial_Y \varphi(\boldsymbol{k}) = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \varphi(\boldsymbol{k}) - \bar{\alpha} \varphi^2(\boldsymbol{k}) + \bar{\alpha} \sqrt{2\kappa \alpha_s^2 \varphi(\boldsymbol{k})} \nu(\boldsymbol{k})
$$

onde $L = \log(k^2/k_0^2)$, sendo k_0 uma escala de referência e $\chi(-\partial_L)$ é o núcleo da equação BFKL.

A equação sFKPP

- Expadindo $\chi(-\partial_L)$ até segunda ordem, temos que ($\tau = \bar{\alpha}Y$, $\rho \equiv L = \log(k^2/k_0^2)$):

$$\partial_\tau \varphi_\tau(\rho) = \left(-\lambda\partial_\rho + D(-\partial_\rho - \gamma_c)^2\right)\varphi_\tau(\rho) - \bar{\alpha}\varphi_\tau^2(\rho) + \sqrt{2\kappa\alpha_s^2\varphi_\tau(\rho)}\nu_\tau(\rho) \quad (3)$$

onde $\lambda \equiv \bar{\alpha}v_c = \bar{\alpha}\chi(\gamma_c)/\gamma_c$, $D = \chi''(\gamma_c)/2$. O ruído branco gaussiano agora obedece as relações

$$\langle \nu(\rho,\tau)\rangle = 0, \qquad \langle \nu(\rho_1,\tau_1), \nu(\rho_2,\tau_2)\rangle = \frac{1}{\pi}\delta(\tau_1 - \tau_2)\delta(\rho_1 - \rho_2)$$

- Perante as transformações

$$x \to \rho, \qquad t \to \bar{\alpha}\tau, \qquad N \to 1/\alpha_s^2, \qquad u(x,t) \to \varphi_\tau(\rho)$$

a equação de Langevin (3) se torna equivalente à equação FKPP estocástica

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) + u(x,t)(1 - u(x,t)) + \sqrt{\frac{2}{N}u(x,t)(1 - u(x,t))}\nu(x,t)$$

onde

$$\langle \nu(x,t)\rangle = 0, \qquad \langle \nu(x_1,t_1), \nu(x_2,t_2)\rangle = \delta(t_1 - t_2)\delta(x_1 - x_2)$$

A equação sFKPP

- A descrição de campo médio (BK e FKPP) é obtida quando $N \to \infty$ e $\alpha_s^2 \to 0$
- A dinâmica das frentes de onda estocásticas pode ser descrita por uma versão modificada da equação FKPP (Brunet, Derrida - 1997)

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) + u(x,t)\,(1 - u(x,t))\,\Theta\,(1 - \kappa/N)$$

- Analizando a versão linearizada desta equação obtém-se

$$v_N = v_c - \frac{\pi^2 \gamma_c^2 v''(\gamma_c)}{2 \ln^2 N} + \mathcal{O}(1/\ln^3 N)$$

- Em variáveis de QCD ($1/N \to \alpha_s^2$) e com $v(\gamma) \to \lambda(\gamma)$

$$\lambda^* = \lambda - \frac{\pi^2 \gamma_c \chi''(\gamma_c)}{2 \ln^2 (1/\alpha_s^2)}, \qquad \text{para} \qquad \alpha_s \ll 1$$

- $\mathcal{C} = \pi^2 \gamma_c \chi''(\gamma_c)/2 \approx 150$, logo λ^* só é conhecido no limite $\alpha_s \to 0$

A equação sFKPP

- Ruído implica na formação de um ensemble de frentes de onda para uma mesma rapidez
- A posição $\rho_s \equiv \ln(Q_s^2/k_0^2)$ da frente é uma variável aleatória caracterizada por um valor esperado

$$\langle \rho_s(\tau) \rangle \simeq \lambda^* \tau, \qquad \text{para} \qquad \tau \gg \ln^2(1/\alpha_s^2)$$

- ρ_s executa uma caminhada aleatória em relação ao seu valor médio, tal que

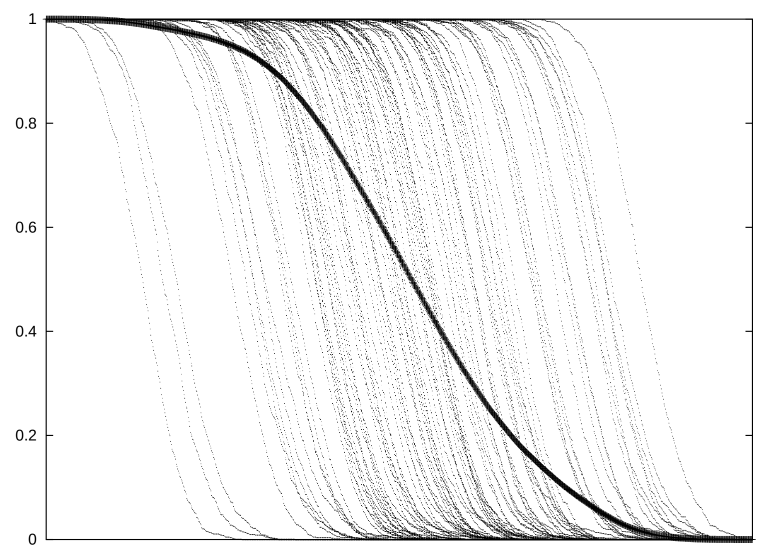
$$\sigma^2 = \langle \rho_s^2 \rangle - \langle \rho_s \rangle^2 \simeq D\tau$$

onde

$$D \simeq \frac{\mathcal{D}}{\ln^3(1/\alpha_s^2)}, \qquad \text{para} \qquad \alpha_s \ll 1$$

é o coeficiente de difusão das frentes e $\mathcal{D}$ é um coeficiente desconhecido.

Iancu, Mueller, Munier - 2005



O escalamento difusivo

- A cada evento $\rightarrow$ escalamento geométrico é preservado
- A amplitude média (física) é dada por

$$\langle \varphi(\rho) \rangle_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_s P(\rho_s, \tau) \varphi(\rho, \rho_s)$$

onde

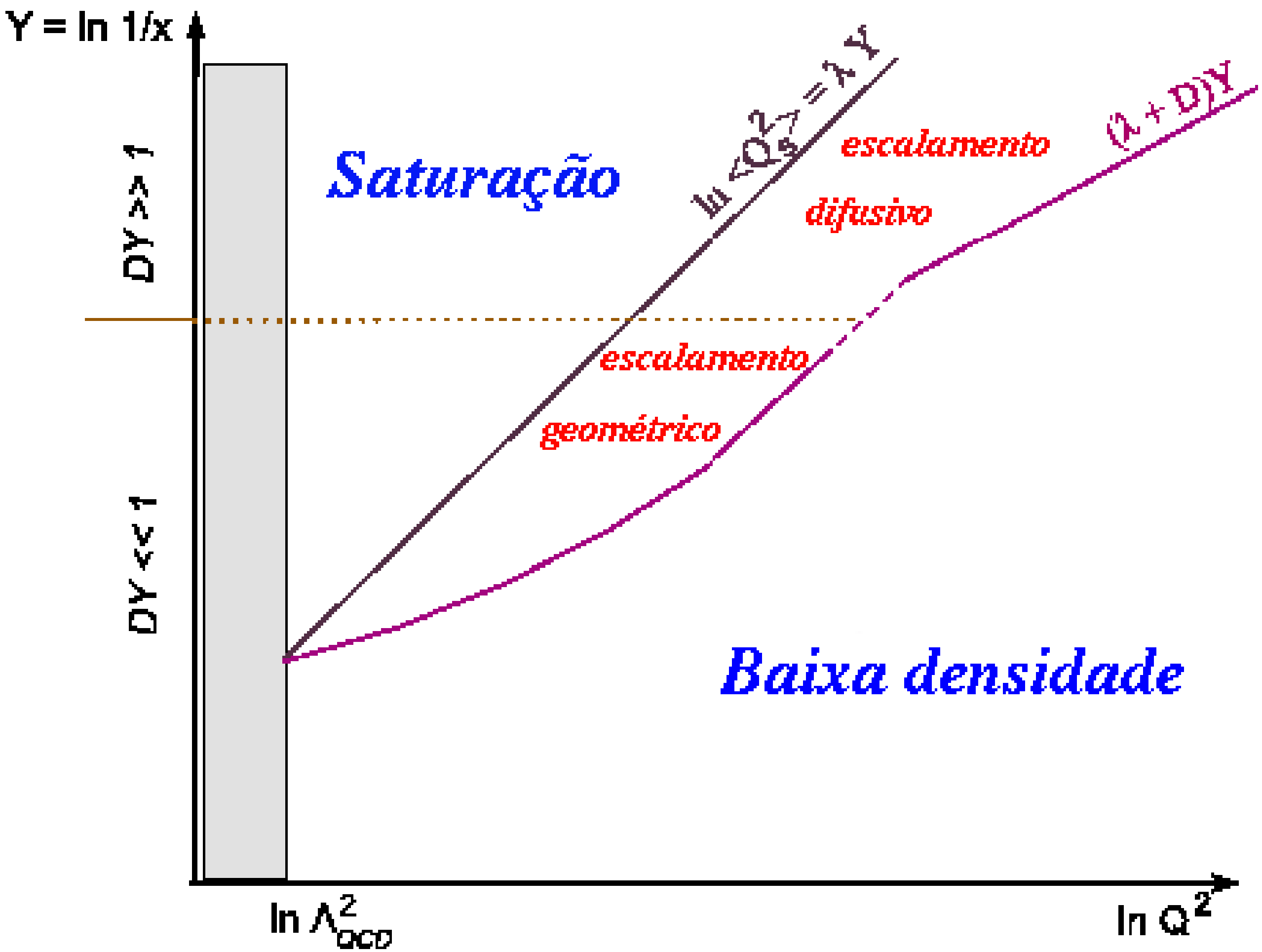
$$P(\rho_s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(\tau)} \exp\left[-\frac{(\rho_s - \langle \rho_s \rangle_\tau)^2}{\sigma^2(\tau)} \right]$$

é a distribuição de probabilidade para a escala de saturação ρ_s

- Em energias suficientemente altas, a amplitude física não preserva o escalamento geométrico.
- Dependências adicionais em Y via σ implicam na substituição do escalamento geométrico pelo chamado escalamento difusivo (Iancu, Mueller, Munier - 2005)

$$\langle \varphi(\rho) \rangle_\tau \simeq \varphi\left(\frac{\rho - \langle \rho_s \rangle_\tau}{\sqrt{\tau / \ln^3(1/\alpha_s^2)}} \right) \simeq \varphi\left(\frac{\rho - \langle \rho_s \rangle_\tau}{\sqrt{\tau D}} \right)$$

O escalamento difusivo



Modelo AGBS e as flutuações

- A amplitude do modelo AGBS entra como um único evento na expressão para a amplitude física ($\rho = \ln(k^2/k_0^2)$)

$$\left\langle T^{AGBS}(\rho, \rho_s) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho_s \, P_Y(\rho_s) T^{AGBS}(\rho, \rho_s).$$

que é usada na expressão para F_2

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \int_0^1 dz \, |\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 T(k, Y)$$

e então ajustada aos dados de HERA (H1 e ZEUS)

- Parâmetros
  livres: R_p, χ_c'', k_0^2, λ e D
  fixos: $\gamma_c = 0.6275$ e $\bar{\alpha} = 0.2$
- Regime cinemático:
  $$\begin{cases} x \leq 0.01, \\ 0.045 \leq Q^2 \leq 150 \text{ GeV}^2 \end{cases}$$

- Total de 279 pontos
- Somente quarks leves são considerados em dois casos: $m_{u,d,s} = 50$ MeV e $m_{u,d,s} = 140$ MeV
- Dados de H1 reescalados por um fator 1.0 - 1.05 como usual

Resultados

EB, Gay Ducati, de Oliveira, de Santana Amaral - 2008 [hep-ph/0807.1556]

Aceito para publicação na EPJ C

- $m_{u,d,s} = 50$ MeV

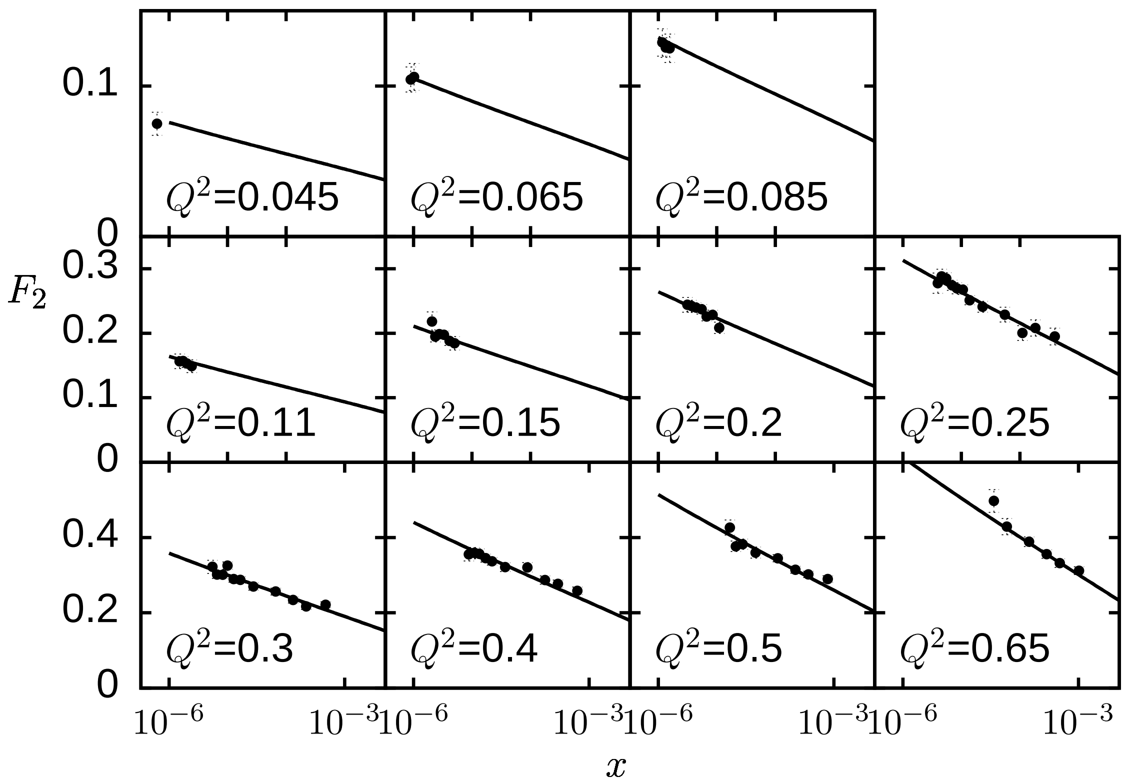
	χ^2/n.o.p	k_0^2 ($\times 10^{-3}$)	λ	R(GeV^{-1})	$\chi''(\gamma_c)$	D ($\times 10^{-2}$)
$\tilde{T}_Y^{\mathrm{AGBS}}$	0.949	3.79 ± 0.30	0.213 ± 0.003	3.576 ± 0.059	4.69 ± 0.23	0
$\left\langle \tilde{T}_Y^{\mathrm{AGBS}} \right\rangle$	0.949	3.79 ± 0.30	0.213 ± 0.003	3.576 ± 0.059	4.69 ± 0.23	0.0 ± 1.1

- $m_{u,d,s} = 140$ MeV

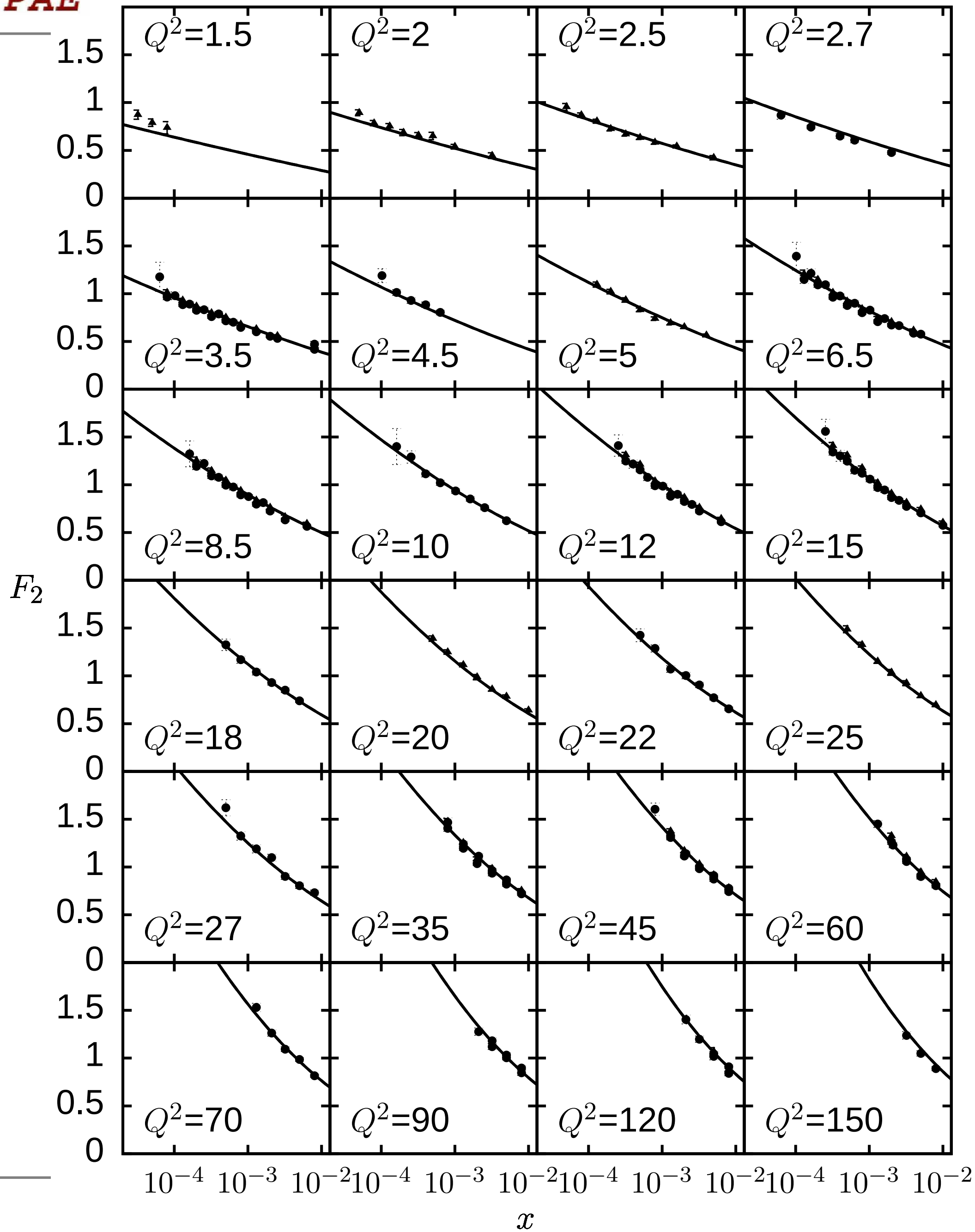
	χ^2/n.o.p	k_0^2 ($\times 10^{-3}$)	λ	R(GeV^{-1})	$\chi''(\gamma_c)$	D ($\times 10^{-3}$)
$\tilde{T}_Y^{\mathrm{AGBS}}$	0.942	1.69 ± 0.16	0.176 ± 0.004	4.83 ± 0.12	6.43 ± 0.29	0
$\left\langle \tilde{T}_Y^{\mathrm{AGBS}} \right\rangle$	0.942	1.69 ± 0.16	0.176 ± 0.004	4.83 ± 0.12	6.43 ± 0.29	0.0 ± 9.6

Resultados

- $m_{u,d,s} = 140$ MeV
- $\bullet \Rightarrow$ ZEUS
- $\blacktriangle \Rightarrow$ H1



Resultados



- $m_{u,d,s} = 140$ MeV
- ● ⇒ ZEUS
- ▲ ⇒ H1

Resultados

- Recentemete, os modelos GBW e IIM foram usados para investigar efeitos de flutuações em HERA: (Kozlov, Shoshi, Xiang - 2007)
  Regime cinemático $Q^2 < 50$ GeV^2 e massas $m_{u,d,s} = 140$ MeV
  Ajuste somente aos dados de ZEUS
- Como resultado: $D = \mathcal{O}(1)$. Porém inconclusivo em relação a flutuações

EB, Gay Ducati, de Oliveira, de Santana Amaral - 2008 [hep-ph/0807.1556]

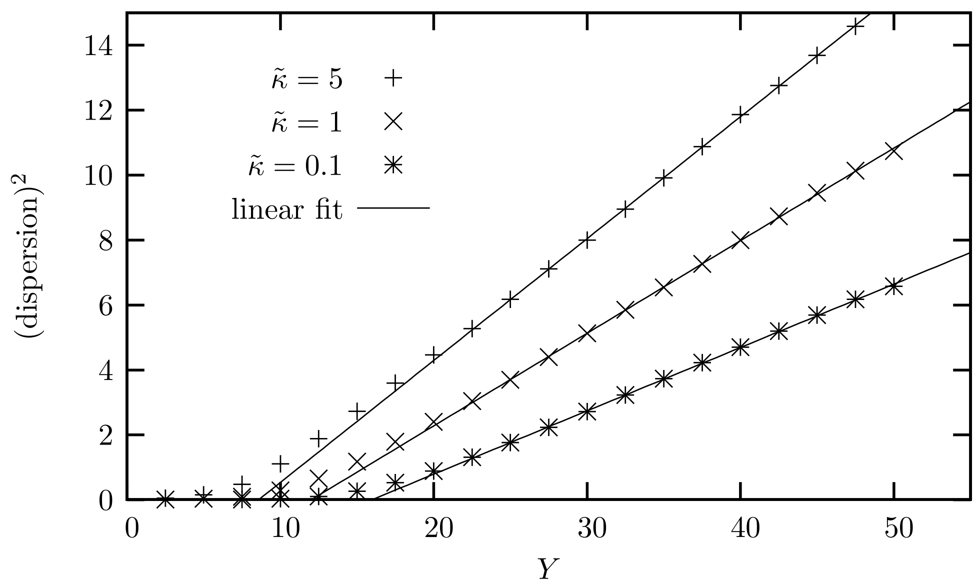
Aceito para publicação na EPJ C

- AGBS só com dados de ZEUS, no regime $Q^2 < 50$ GeV^2 e com $m_{u,d,s} = 140$ MeV

	χ^2/n.o.p	k_0^2 ($\times 10^{-3}$)	λ	R(GeV^{-1})	$\chi''(\gamma_c)$	D
$\tilde{T}_Y^{\mathrm{AGBS}}$	0.778	1.97 ± 0.22	0.177 ± 0.006	4.68 ± 0.14	5.95 ± 0.94	0
$\left\langle \tilde{T}_Y^{\mathrm{AGBS}} \right\rangle$	0.768	1.38 ± 0.12	0.120 ± 0.010	5.46 ± 0.04	5.46 ± 0.55	1.78 ± 0.38

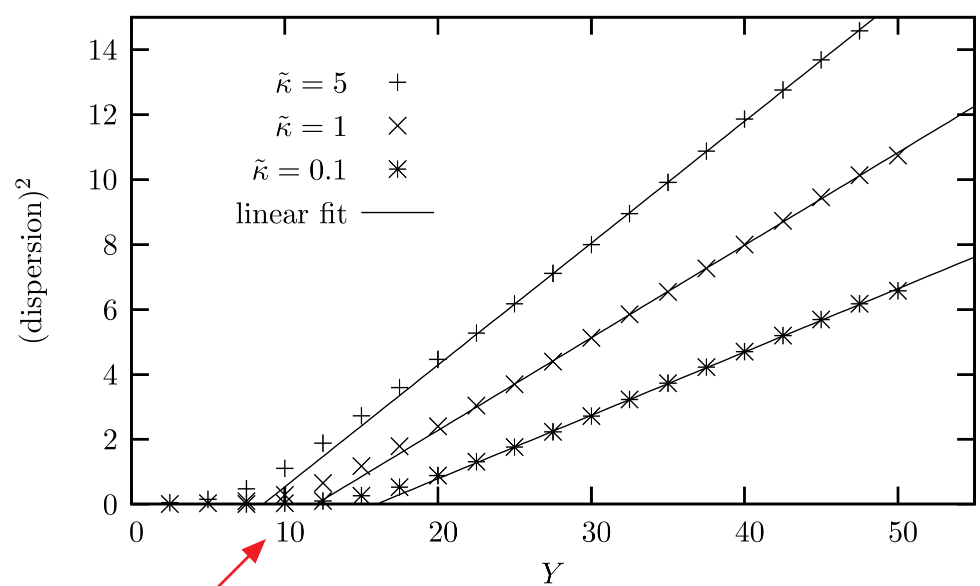
Conclusões

- Concluimos que, sob o ponto de vista do modelo AGBS , não há evidência de flutuações nas energias alcançadas em HERA :
  - Para H1 + ZEUS, $D \to 0$
  - Bom χ^2/n.o.p
- Campo médio (BK), com α_s fixo é suficiente para descrever os dados
- Este resultado concorda com simulações da equação de Langevin (Soyez - 2005)



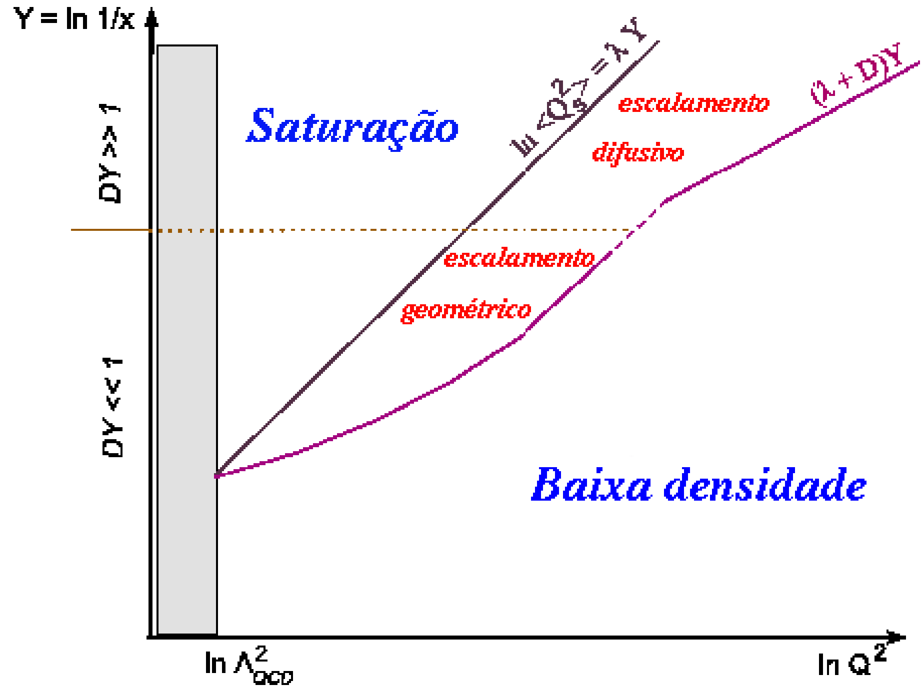
Conclusões

- Concluimos que, sob o ponto de vista do modelo AGBS , não há evidência de flutuações nas energias alcançadas em HERA :
  Para H1 + ZEUS, $D \to 0$
  Bom χ^2/n.o.p
- Campo médio (BK), com α_s fixo é suficiente para descrever os dados
- Este resultado concorda com simulações da equação de Langevin (Soyez - 2005)

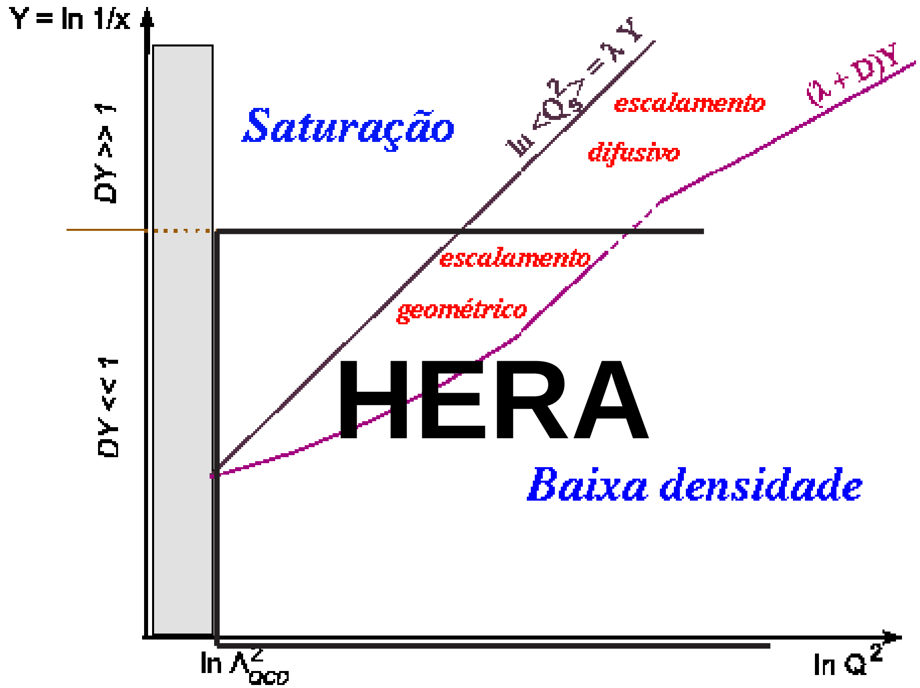


HERA: $Y < 9$

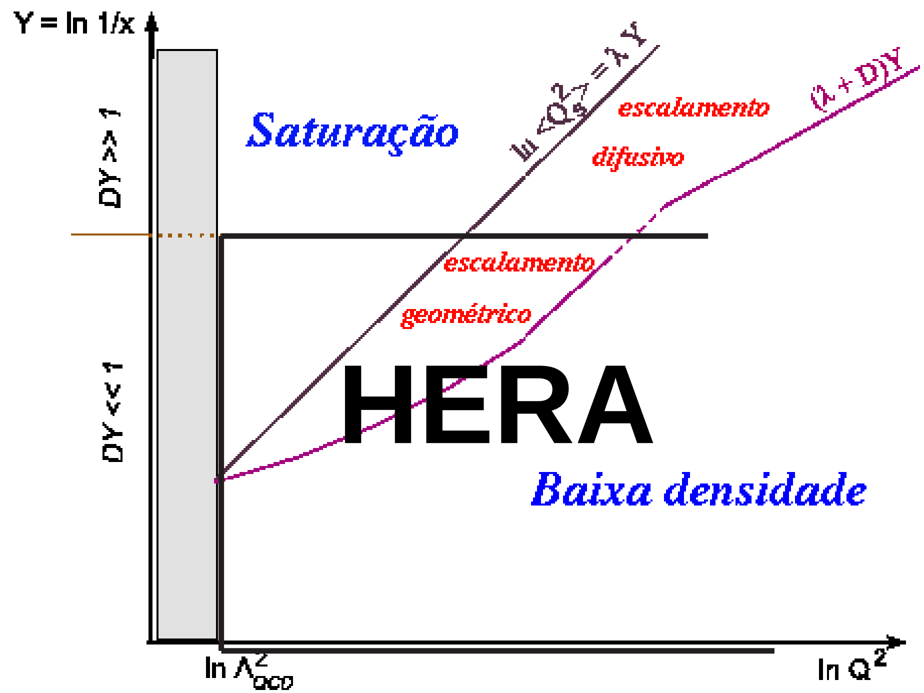
Perspectivas



Perspectivas



Perspectivas



- Em maiores energias (LHC): existem flutuações?
- Acoplamento (α_s) dinâmico suprime efeitos de flutuações?
- Adicionar quarks pesados
- Dependência no parâmetro de impacto