

Amplitudes de Espalhamento na QCD no Formalismo de Dipolos

João Thiago de Santana Amaral

thiago.amaral@ufrgs.br

Exame de doutorado

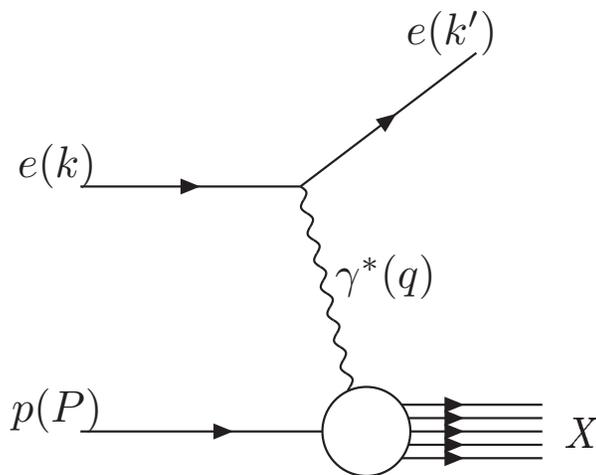
Orientadora: Maria Beatriz Gay Ducati

Sumário

- Introdução
 - QCD e o espalhamento profundamente inelástico
 - QCD em altas energias
 - Formalismo de dipolos
 - Evolução das amplitudes de espalhamento
- Equação BK
- Função de estrutura do próton F_2 : fenomenologia no espaço de momentum
- Modelando a QCD em altas energias

Cromodinâmica Quântica (QCD)

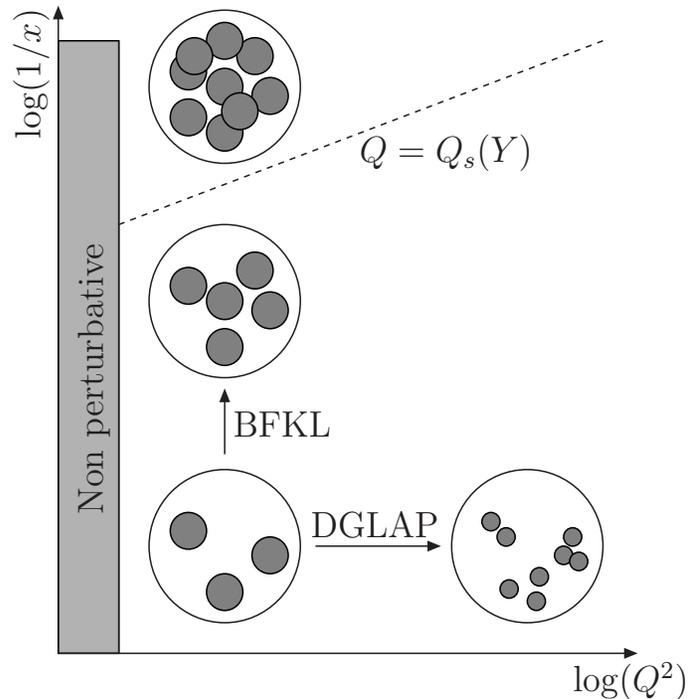
- Teoria que descreve as interações fortes em termos dos **quarks** e **glúons**: **pártons**
- Grupo de gauge: $SU(N_c)$, com $N_c = 3$ número de cores
- A investigação da interação forte e da estrutura hadrônica requer altas energias
 - A evolução em altas energias na QCD é uma evolução na direção de altas densidades partônicas
 - Primeira evidência experimental: **espalhamento profundamente inelástico** elétron-próton (DIS) em HERA



- Energia total: $s = (P + q)^2$
- Virtualidade do fóton:
 $q^2 = (k - k')^2 = -Q^2 < 0$
- A variável x de Bjorken $x \equiv \frac{Q^2}{Q^2 + s}$
- É usual utilizar a variável **rapidez**

$$Y \equiv \ln(1/x)$$

QCD em altas energias



- Equações de evolução lineares: BFKL e DGLAP
- Energia cresce \rightarrow densidade de glúons e seções de choque para interações hadrônicas crescem rapidamente
- A **recombinação gluônica** e os efeitos de **espalhamentos múltiplos** podem ser importantes: **equações não-lineares**

- $Q_s(Y)$ é chamada **escala de saturação**, função crescente da rapidez
- Os efeitos não-lineares são importantes para todo $Q \lesssim Q_s(Y)$: **região de saturação**

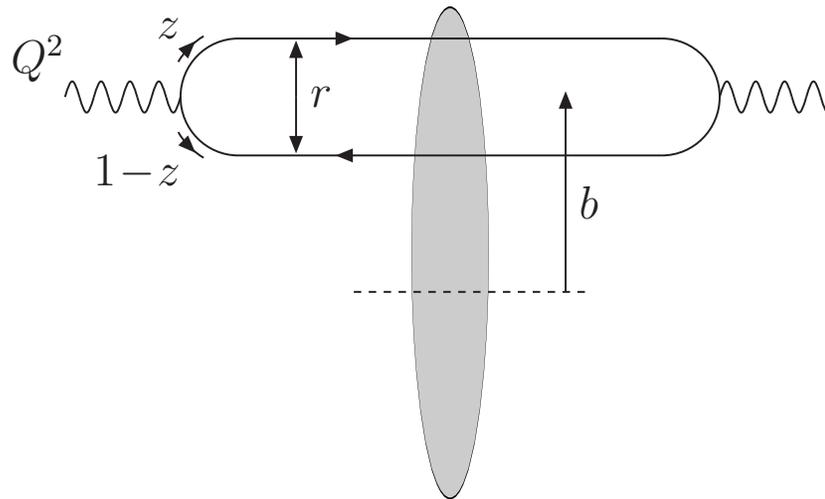
Saturação e evolução

- Muitos esforços têm sido voltados à descrição e compreensão da QCD no limite de altas energias correspondente à saturação
- Equações de evolução não-lineares:
 - GLR (Gribov-Levin-Ryskin)
 - AGL (Ayala-Gay Ducati-Levin)
 - BK (Balitsky-Kovchegov)
 - Teoria efetiva do Condensado de Vidros de Cor (CGC): equação JIMWLK (Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Leodinov, Kovner e Weigert)
- Correspondência com a física estatística:
 - Flutuações no número de glúons
 - Equações de laços de pomeron
- Fenomenologia: descoberta do **escalamento geométrico** no DIS em HERA

$$\sigma^{\gamma^* p}(Q, Y) = \sigma^{\gamma^* p} \left(\frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \right)$$

Referencial de dipolo

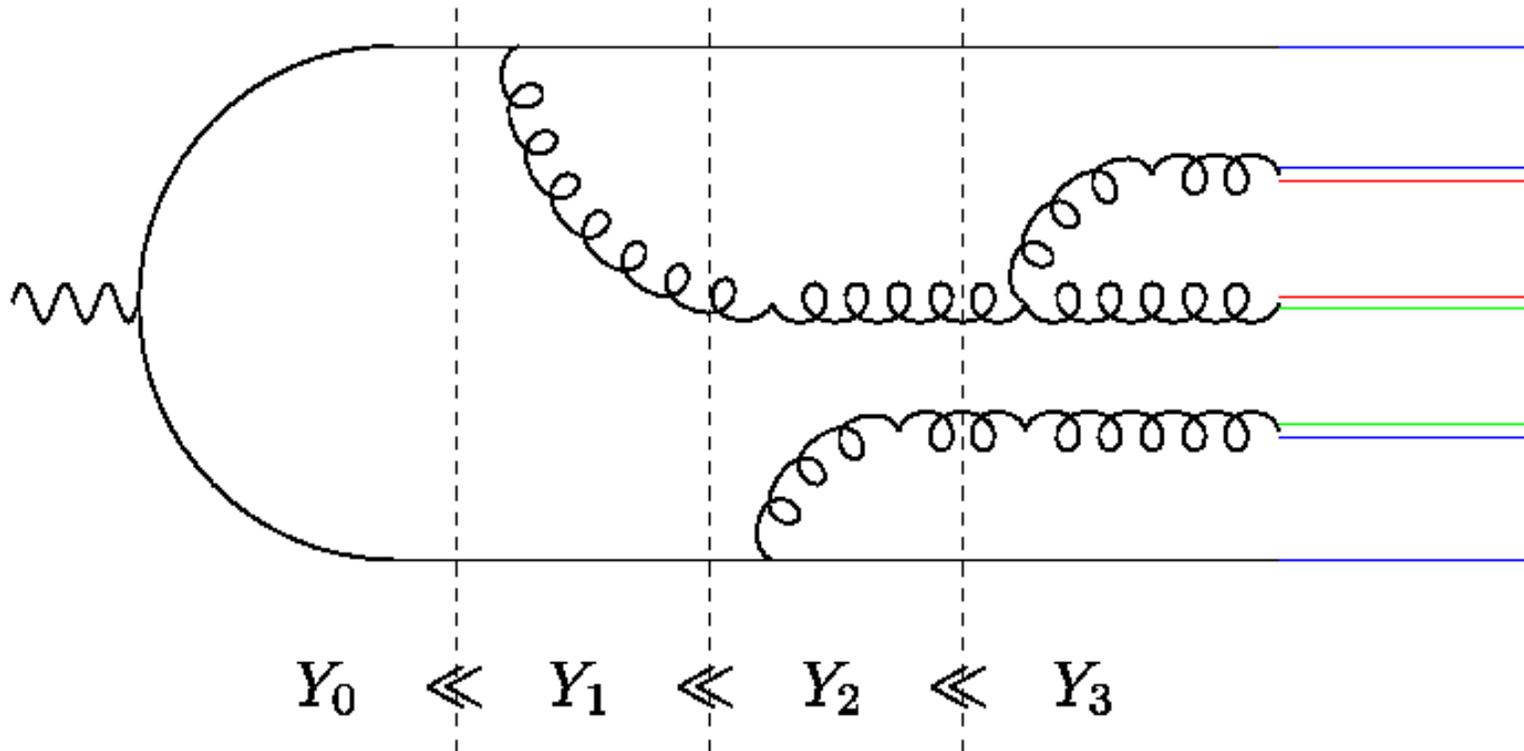
-  Neste referencial, o próton leva consigo maior parte da energia, porém o fóton possui energia suficiente para se separar em um par $q\bar{q}$, um dipolo, que então interage com o próton



-  z : fração de momentum carregada pelo quark
-  $1 - z$: fração de momentum carregada pelo antiquark
-  r : tamanho do dipolo
-  b : parâmetro de impacto

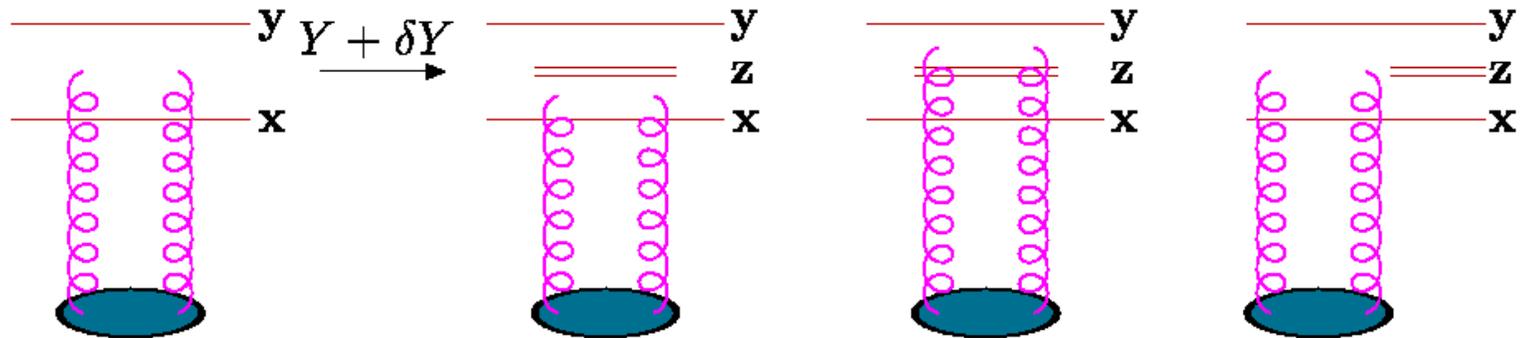
Formalismo de dipolos: evolução

[Mueller, 1994]



- No limite de grande N_c os glúons emitidos podem ser substituídos por pares quark-antiquark, que interagem com o alvo

Amplitudes de espalhamento: BFKL



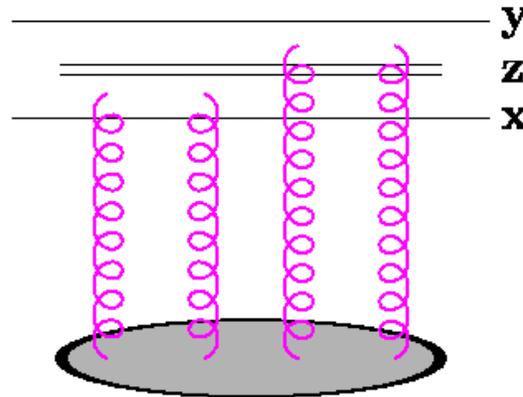
- Seja $\langle T_{xy} \rangle_Y$ a amplitude de espalhamento média dipolo-alvo
- Considerando a interação de apenas um dos dipolos com o alvo, obtém-se a chamada equação BFKL ($\bar{\alpha} = \alpha_s N_c / \pi$)

$$\partial_Y \langle T_{xy} \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 z \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \langle T_{xz} + T_{zy} - T_{xy} \rangle_Y \quad (1)$$

onde $\mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}$ é a probabilidade de separação do dipolo

- Violação da unitariedade
- Difusão para a região de infravermelho

Espalhamentos múltiplos



$$\partial_Y \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y = \bar{\alpha} \int d^2 z \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} + T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} - T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} - T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y \quad (2)$$

- Primeira equação da **hierarquia Balitsky-JIMWLK**
- Aproximação de campo médio $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle \approx \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle \rightarrow$ **equação BK**

$$\partial_Y \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y = \bar{\alpha} \int d^2 z \mathcal{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) [\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y] \quad (3)$$

- Consistente com unitariedade $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle \leq 1$

Equação BK no espaço de momentum

- Realizando a transformada de Fourier da amplitude

$$\tilde{T}(k, Y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2r}{r^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} T(r, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) T(r, Y) \quad (4)$$

a amplitude $\tilde{T}(k, Y)$ obedece a equação BK no espaço de momentum

$$\partial_Y \tilde{T} = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \tilde{T} - \bar{\alpha} \tilde{T}^2 \quad (5)$$

e $L = \log(k^2/k_0^2)$, com k_0 sendo uma escala fixa

- O núcleo BFKL χ é um operador integro-diferencial que pode ser definido por

$$\begin{aligned} \chi(-\partial_L) &= \chi(\gamma_0) \mathbf{1} + \chi'(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \chi''(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \chi^{(3)}(\gamma_0) (-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

com γ_0 entre 0 e 1

Equações BK e FKPP

- Após a mudança de variáveis [Munier and Peschanski, 03]

$$t \sim \bar{\alpha}Y, \quad x \sim \log(k^2/k_0^2), \quad u \sim \tilde{T} \quad (7)$$

e a aproximação

$$\chi(-\partial_L) \approx \chi(\gamma_c)\mathbf{1} + \chi'(\gamma_c)(-\partial_L - \gamma_c\mathbf{1}) + \frac{1}{2}\chi''(\gamma_c)(-\partial_L - \gamma_c\mathbf{1})^2 \quad (8)$$

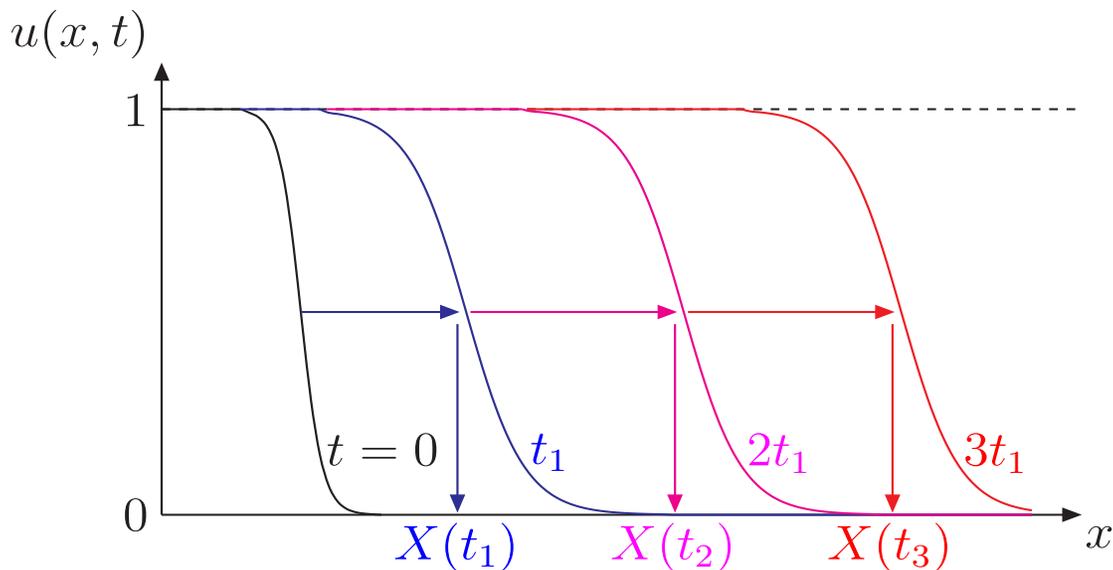
a equação BK é reduzida à equação de **Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov** (FKPP)

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u - u^2, \quad (9)$$

- A equação FKPP é conhecida na física estatística de não-equilíbrio e sua dinâmica é chamada **reação-difusão**

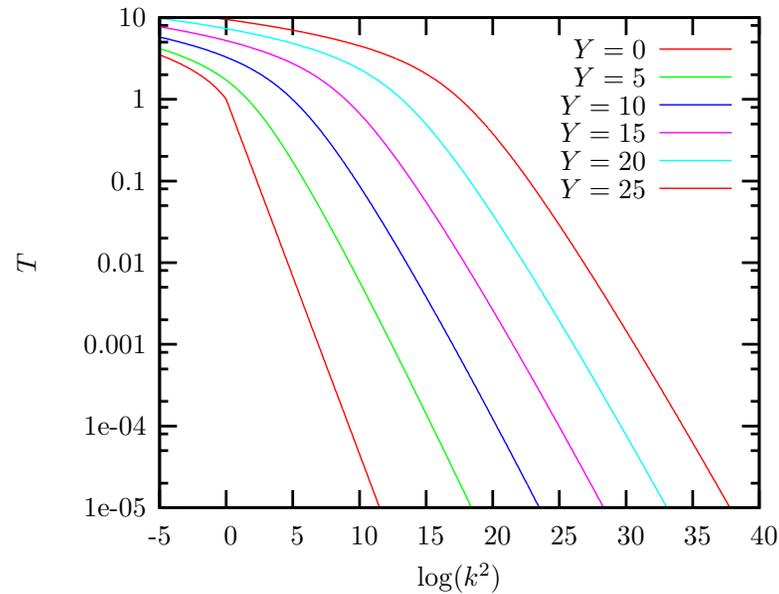
Soluções de ondas viajantes

- A equação FKPP admite as chamadas **soluções de ondas viajantes**
 - Após um certo tempo, a evolução de $u(x, t)$ esquece os traços da condição inicial e a função toma a forma $u(x - v_c t)$
 - Para tempos grandes a propagação da frente de onda é realizada apenas pela sua translação sendo sua forma mantida durante a propagação
 - A posição da frente de onda é dada por $v_c t$, para a qual $u(x = v_c t, t) \simeq \mathcal{O}(1)$



Ondas viajantes e saturação

Solução numérica da equação BK



- Na linguagem da física de saturação, a posição da frente de onda é a escala de saturação

$$v_c t \sim \ln Q_s^2(Y)$$

- O escalamento corresponde ao **escalamento geométrico**

$$x - v_c t \sim \ln k^2 / Q_s^2(Y)$$

Função de estrutura do próton F_2

- A função de estrutura do próton F_2 - que corresponde à distribuição de pártons no interior do próton - é expressa em termos da seção de choque γ^*p

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q^2) &= \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} \left[\sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q^2) \right] \\
 &= \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} \sigma^{\gamma^*p}(x, Q^2)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

- No referencial de dipolos, esta possui a seguinte forma fatorizada:

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(Y, Q) = \int d^2r \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z; Q^2)|^2 \sigma_{dip}^{\gamma^*p}(r, Y)
 \tag{11}$$

onde $\sigma_{dip}^{\gamma^*p}(Y, r)$ é a seção de choque de dipolo

- Se o próton é tratado como um disco homogêneo de raio R_p

$$\sigma_{dip}^{\gamma^*p}(r, Y) = 2\pi R_p^2 T(r, Y) = 2\pi R_p^2 r^2 \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{T}(k, Y)
 \tag{12}$$

Função de estrutura F_2

JTSA, M A Betemps, M B G Ducati e G Soyez, hep-ph/0612091

- Em termos de \tilde{T} temos

$$F_2(x, Q^2) = \frac{Q^2 R_p^2 N_c}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^1 dz |\tilde{\Psi}(k, z; Q^2)|^2 \tilde{T}(k, Y) \quad (13)$$

- A função de onda agora é expressa no espaço de momentum e possui a forma explícita

$$|\tilde{\Psi}(k^2, z; Q^2)|^2 = \sum_q \left(\frac{4\bar{Q}_q^2}{k^2 + 4\bar{Q}_q^2} \right)^2 e_q^2 \left\{ [z^2 + (1-z)^2] \left[\frac{4(k^2 + \bar{Q}_q^2)}{\sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k^2 - 2\bar{Q}_q^2}{2\bar{Q}_q^2} \right] + \frac{4Q^2 z^2 (1-z)^2 + m_q^2}{\bar{Q}_q^2} \left[\frac{k^2 + \bar{Q}_q^2}{\bar{Q}_q^2} - \frac{4\bar{Q}_q^4 + 2\bar{Q}_q^2 k^2 + k^4}{\bar{Q}_q^2 \sqrt{k^2(k^2 + 4\bar{Q}_q^2)}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2\bar{Q}_q} \right) \right] \right\}$$

onde $\bar{Q}_q = z(1-z)Q^2 + m_q^2$, m_q denota as massas dos quarks

Comportamento em $k \gg Q_s$

- A expressão para a cauda da amplitude de espalhamento é dada por [Munier e Peschanski, 03]

$$\tilde{T}(k, Y) \stackrel{k \gg Q_s}{\approx} \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right)^{-\gamma_c} \log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) \exp \left[-\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right] \quad (14)$$

onde

$$Q_s^2(Y) = k_0^2 \exp(v_c Y) \quad (15)$$

- O escalamento geométrico é obtido para

$$\log(k^2/Q_s^2(Y)) \lesssim \sqrt{2\chi''(\gamma_c)\bar{\alpha}Y}$$

- γ_c e v_c são obtidos a partir do conhecimento do núcleo BFKL

$$v_c = \min_{\gamma} \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma)}{\gamma} = \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c} = \bar{\alpha}\chi'(\gamma_c)$$

- Os valores obtidos são $\gamma_c = 0.6275\dots$, e $v_c = 4.88\bar{\alpha}$

Comportamento em $k \ll Q_s$

● A fim de completar a descrição da amplitude, são ainda necessárias expressões para \tilde{T} em torno da escala de saturação e na região de saturação

● Na região de **infravermelho**, pode-se mostrar que a amplitude comporta-se como

$$\tilde{T} \left(\frac{k}{Q_s(Y)}, Y \right) \stackrel{k \ll Q_s}{\approx} c - \log \left(\frac{k}{Q_s(Y)} \right) \quad (16)$$

onde c é uma constante a ser determinada

● Resta então obter a conexão entre as duas regiões assintóticas

● A maneira mais simples seria utilizar as expressões assintóticas da amplitude e, supondo uma distribuição contínua, obter a constante c

● Problema: possibilidade de oscilações na amplitude no espaço de coordenadas $T(r, Y)$

● Solução: **continuação analítica** entre os dois comportamentos assintóticos

Modelo

- O ponto de partida é uma expressão monotonicamente decrescente com L e que reproduz os comportamentos assintóticos requeridos

$$T_{\text{dil}} = \exp \left[-\gamma_c \log \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) - \frac{L_{\text{red}}^2 - \log^2(2)}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right] \quad (17)$$

com

$$L_{\text{red}} = \log \left[1 + \frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right] \quad \text{e} \quad Q_s^2(Y) = k_0^2 e^{\bar{\alpha}v_c Y} \quad (18)$$

- Expressão proposta

$$\tilde{T}(k, Y) = \left[\log \left(\frac{k}{Q_s} + \frac{Q_s}{k} \right) + 1 \right] \left(1 - e^{-T_{\text{dil}}} \right) \quad (19)$$

- As equações acima determinam o modelo para a amplitude de espalhamento
 - Substituir em F_2 e testar com os resultados experimentais

Dados

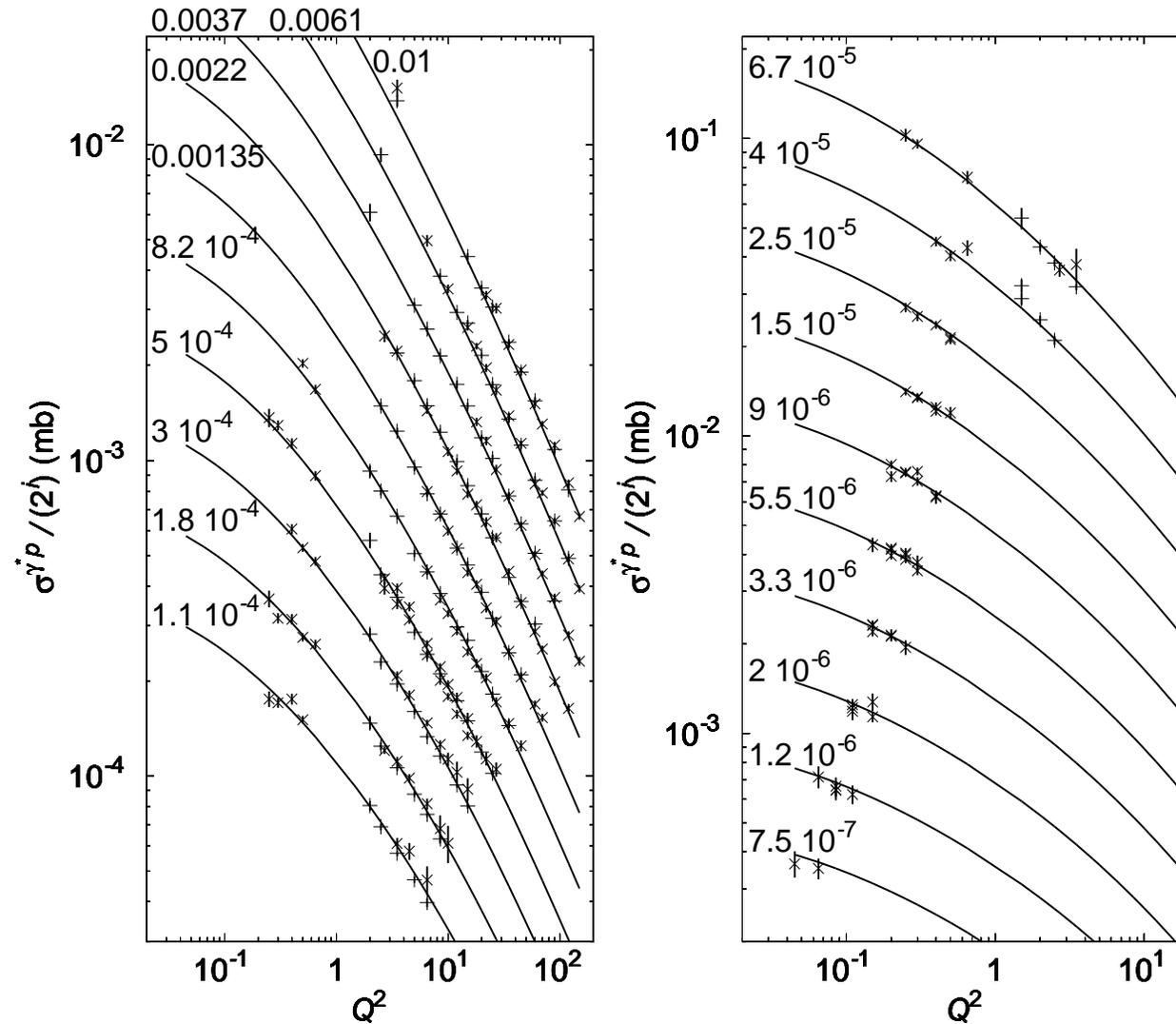
- Ajustamos as últimas medidas de HERA para a função de estrutura do próton F_2 , colaborações H1 e ZEUS
- Nossa análise é restrita ao regime cinemático:

$$\begin{cases} x \leq 0.01, \\ 0.045 \leq Q^2 \leq 150 \text{ GeV}^2 \end{cases}$$

- Número de pontos experimentais: 279
- Parâmetros fixos: $\gamma_c = 0.6275$ e $\bar{\alpha} = 0.2$
- Parâmetros livres v_c , χ_c'' , k_0^2 e R_p
- Massas dos quarks:
 - Quarks leves: $m_q = 0, 50$ ou 140 MeV
 - Para o quark charm, usamos $m_c = m_q$ e $m_c = 1.3 \text{ GeV}$

Resultados (I): seção de choque σ^{γ^*p}

$m_q = 50 \text{ MeV}$ e $m_c = 1.3 \text{ GeV}$



H1 [EPJC 21, 2002] e ZEUS [EPJC 12, 2000; EPJC 21, 2001]

Resultados (II): Parâmetros

- Os parâmetros obtidos a partir do ajuste aos resultados experimentais para F_2^p :

Massas	k_0^2 (10^{-3} GeV ²)	v_c	χ_c''	R_p (GeV ⁻¹)
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 50$ MeV	3.782 ± 0.293	1.065 ± 0.018	4.691 ± 0.221	2.770 ± 0.045
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	7.155 ± 0.624	0.965 ± 0.017	2.196 ± 0.161	3.215 ± 0.065
$m_q = 140$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	3.917 ± 0.577	0.807 ± 0.025	2.960 ± 0.279	4.142 ± 0.167

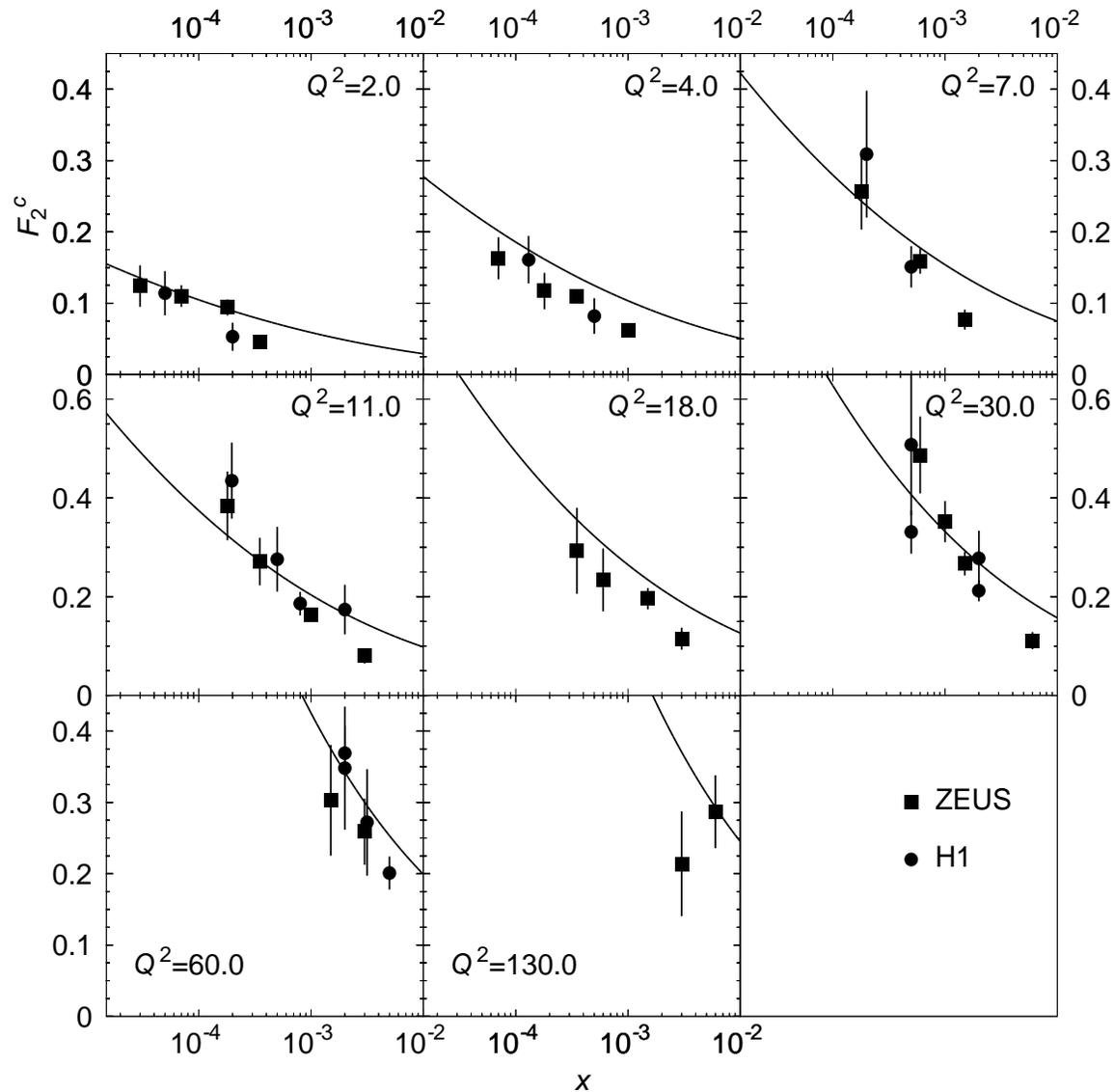
- O valor de χ^2 por ponto

Massas	χ^2/nop
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 50$ MeV	0.960
$m_q = 50$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	0.988
$m_q = 140$ MeV, $m_c = 1.3$ GeV	1.071

- Boa concordância com as medidas de F_2 devido ao χ^2 pequeno

Resultados (III): predição para F_2^c

$m_q = 50 \text{ MeV}$ e $m_c = 1.3 \text{ GeV}$



H1 [PLB 528, 2002; EPJC 45, 2006] e ZEUS [PRD 69, 2004]

Análise: outros modelos

- Modelo de saturação GBW [Golec-Biernat e Wüsthoff, 1999]
- Modelo IIM ou ajuste CGC [Iancu, Itakura e Munier, 2004]
- Desenvolvimentos recentes considerando o modelo de Bartels-Golec-Biernat-Kowalski (BGK) [Golec-Biernat e Sapeta, 2006]

Parametrização	Massas dos quarks	# pontos	$\chi^2 / \# \text{pontos}$
GBW	$m_q = 140 \text{ MeV}, m_c = 1.5 \text{ GeV}$	372	1.5
IIM	$m_q = 140 \text{ MeV}, \text{sem charm}$	156	0.81
BGK	$m_q = 0 \text{ MeV}, m_c = 1.3 \text{ GeV}$	288	1.06
Este trabalho	$m_q = 50 \text{ MeV}, m_c = 1.3 \text{ GeV}$	279	0.988

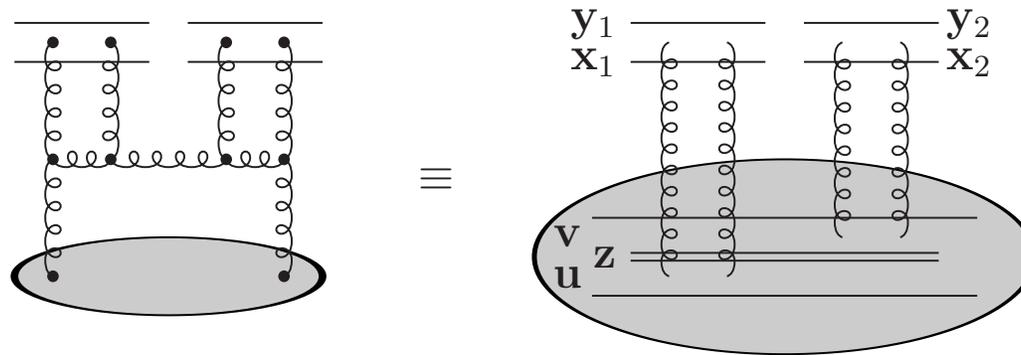
- Aperfeiçoamento do modelo IIM, incluindo charm
- Transformada de Fourier inversa entre 0 e 1

Conclusões e perspectivas

- Primeiro modelo fenomenológico para a seção de choque de dipolo no espaço de momentum
- Parametrização para a amplitude de espalhamento utilizando conhecimento sobre as soluções assintóticas da equação BK
- Cálculo da função de estrutura do próton F_2 (no formalismo de dipolos) e testada com resultados experimentais de HERA
- Boa concordância com as medidas de F_2 – pequeno valor de χ^2 fornecido pelo ajuste – e com as previsões para F_2^c
- Boa parametrização para investigar as propriedades dos observáveis em energias de RHIC e LHC, considerando o modelo de dipolos
 - Fator de modificação nuclear ou razão R_{pA} – fortes evidências de saturação gluônica nos dados de RHIC
 - Trabalho em andamento

Além das equações B-JIMWLK

- Correspondência entre QCD e processo reação-difusão: equações B-JIMWLK incompletas, não levam em conta as *flutuações no número de glúons (dipolos)*



- Novas equações: *equações de laços de Pomerons*
- O problema na QCD é muito complexo: investigação de modelos de partículas, dimensões menores
- Modelo estocástico de partículas (1+1)-dimensional:
 - Dimensão temporal: rapidez Y
 - Dimensão espacial: é a posição da partícula ao longo de um eixo unidimensional infinito: em QCD $\rho \equiv \log(r_0^2/r^2)$

Construção do modelo (I)

E Iancu, JTSA, G Soyez e D Triantafyllopoulos, hep-ph/0611105

- Sistema de partículas: especificação do número de ocupação n_i em todos os sítios da rede
- Quando a rapidez aumenta, a composição do sistema muda através da separação de partículas
- O estado do sistema é descrito pela probabilidade $P(\{n\}, Y)$ de uma dada configuração $\{n\} \equiv \{\dots, n_i, n_{i+1}, \dots\}$
- Problema de espalhamento:
 - Dois tipos de partículas, esquerda (L) e direita (R) que interagem entre si via interações não-locais
 - Assume-se que o elemento de matriz- S médio para o espalhamento é dado por

$$\langle S \rangle_Y = \sum_{\{n\}, \{m\}} P_R(\{n\}, Y - Y_0) P_L(\{m\}, Y_0) \mathcal{S}(\{n\}, \{m\}) \quad (20)$$

- O alvo (R) possui rapidez $Y - Y_0$ e o projétil (L) possui rapidez $-Y_0$

Construção do modelo (II)

- A matriz- S para o espalhamento elástico entre duas dadas configurações $\{n\}$ e $\{m\}$ do alvo e do projétil é

$$\mathcal{S}(\{n\}, \{m\}) = \prod_{i,j} \sigma_{ij}^{n_i m_j} \quad (21)$$

onde $\sigma_{ij} = 1 - \tau_{ij}$ é a matriz- S que descreve o espalhamento entre duas partículas elementares com posições i e j , e τ_{ij} é a matriz- T correspondente

- A matriz- S deve ser independente da escolha do referencial, ou seja, independente de Y_0 :

$$0 = \frac{d \langle S \rangle}{dY_0} = \sum_{\{n\}, \{m\}} \left(P_R(Y - Y_0) \frac{\partial P_L(Y_0)}{\partial Y_0} + \frac{\partial P_R(Y - Y_0)}{\partial Y_0} P_L(Y_0) \right) \mathcal{S}(\{n\}, \{m\})$$

- A cada passo na rapidez ($Y \rightarrow Y + dY$) emissão de uma única partícula
- A configuração do sistema muda apenas pela adição de uma nova partícula em um sítio arbitrário da rede

Construção do modelo (III)

- A probabilidade $P(\{n\}, Y)$ evolui

$$\frac{\partial P(\{n\}, Y)}{\partial Y} = \sum_i [f_i(\dots, n_i-1, \dots) P(\dots, n_i-1, \dots, Y) - f_i(\{n\}) P(\{n\}, Y)] \quad (22)$$

- $f_i(\{n\})$ é a 'taxa de depósito' – a probabilidade por unidade de rapidez de encontrar uma partícula extra no sítio i após um passo na evolução, partindo de uma configuração original $\{n\}$

$$\frac{f_i(\{n\})}{\Delta} = \frac{1 - \prod_j \sigma_{ij}^{n_j}}{\tau} = \frac{t_i(\{n\})}{\tau} \quad (23)$$

que é a amplitude de espalhamento para o espalhamento entre a partícula nova criada no sítio i e as partículas pré-existentes no sistema, a partir das quais a nova partícula foi emitida

- A quantidade $\tau \equiv \tau_{ii}$ é considerada pequena $\tau \ll 1$
 - τ quantidade análoga em QCD é de $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$

Limite contínuo

- O limite contínuo é obtido pela substituição $i \rightarrow x_i = i\Delta$ e então fazer $\Delta \rightarrow 0$, de modo que $x_i \rightarrow x$, com x sendo a variável espacial contínua
- Temos assim

$$\Delta \sum_i F_i \rightarrow \int dx F(x), \quad \sum_{\{n\}} \rightarrow \int [Dn(x)] \quad (24)$$

e

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{xy} = 1 - \tau_{xy} \quad (25)$$

- Se tomarmos, por exemplo, a *densidade* de partículas é dada por

$$n(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{n_i}{\Delta} \quad (26)$$

- A forma escolhida para a amplitude de espalhamento partícula-partícula τ_{xz} é

$$\tau_{xz} = \tau \exp(-|x - z|) \quad (27)$$

Evolução de amplitudes (I)

- Projétil composto apenas por uma partícula no sítio $i \rightarrow m_j = \delta_{ji}$ e a matriz- S de espalhamento deste projétil é dada por

$$\mathcal{S}(\{n\}, \{m\}) = s_i(\{n\}) = \prod_j \sigma_{ij}^{n_j} \quad (28)$$

- Realizando a média sobre todas as configurações do alvo, diferenciando em relação a Y e usando a equação de evolução para a probabilidade

$$\frac{\partial \langle s_x \rangle_Y}{\partial Y} = \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle s_x s_z - s_x \rangle_Y \quad (29)$$

- Em termos das amplitudes de espalhamento $t_x \equiv 1 - s_x$

$$\frac{\partial \langle t_x \rangle_Y}{\partial Y} = \int_z \frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle t_z - t_x t_z \rangle_Y \quad (30)$$

Evolução de amplitudes (II)

- A segunda equação da hierarquia é

$$\frac{\partial \langle t_x t_y \rangle}{\partial Y} = \int_z \left[\frac{\tau_{xz}}{\tau} \langle (t_z - t_x t_z) t_y \rangle + \frac{\tau_{yz}}{\tau} \langle (t_z - t_y t_z) t_x \rangle + \frac{\tau_{xz} \tau_{yz}}{\tau} \langle t_z (1 - t_x) (1 - t_y) \rangle \right] \quad (31)$$

- Presença de **termos de flutuações** quebra da aproximação de campo médio
- A importância desses termos pode ser verificada no regime no qual o alvo é diluído, $\langle t \rangle \lesssim \tau$
 - Este regime corresponde à cauda diluída da distribuição do alvo em grandes valores de x , onde $\langle n \rangle \lesssim 1$
 - O último termo pode ser aproximado como $(\tau_{xz} \tau_{yz} / \tau) \langle t_z \rangle$, que para $\langle t \rangle \lesssim \tau$ é comparável ou mesmo maior que os termos BFKL
- A amplitude de duas partículas $\langle tt \rangle$ é muito pequena, porém ela é construída a partir da amplitude de uma partícula $\langle t \rangle$

Evolução de amplitudes (III)

- A fim de compreender melhor o significado do termo de flutuação, observemos que no regime diluído, podemos escrever

$$\left. \frac{\partial \langle t_x t_y \rangle}{\partial Y} \right|_{\text{flut}} \simeq \int_z \frac{\tau_{xz} \tau_{yz}}{\tau} \langle t_z \rangle \simeq \int_z \frac{\tau_{xz} \tau_{yz}}{\tau} \int_w \tau_{zw} \langle n_w \rangle \simeq \int_z \tau_{xz} \tau_{yz} \frac{\partial \langle n_z \rangle}{\partial Y} \quad (32)$$

- Assim, a variação da amplitude de duas partículas $\langle t_x t_y \rangle$ em um passo da evolução pode ser interpretada como a seguinte evolução no alvo:
 - Uma partícula é criada em z por meio do processo de separação $w \rightarrow wz$, para qualquer w
 - A nova partícula do alvo em z espalha simultaneamente com as duas partículas do projétil em x e y
- As correlações de duas partículas são construídas através de múltiplos espalhamentos a partir de flutuações do alvo

Evolução BFKL e BK

- A análoga da equação BFKL neste modelo é obtida quando consideramos a versão linearizada da primeira equação da hierarquia, resultando em

$$\frac{\partial \langle t_x \rangle_Y}{\partial Y} = \int dz \exp(-|x - z|) \langle t_z \rangle_Y \quad (33)$$

- Solução geral

$$t(x, Y) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} \tilde{t}(\gamma, 0) \exp[\chi(\gamma)Y - \gamma x], \quad \text{com} \quad \chi(\gamma) = \frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{1 + \gamma} \quad (34)$$

- Comportamento em altas energias → inclusão dos termos não-lineares
- *Aproximação de campo médio* $\langle t_x t_y \rangle \approx \langle t_x \rangle \langle t_y \rangle$ resulta na análoga da equação BK

$$\frac{\partial \langle t_x \rangle}{\partial Y} = \int dz \exp(-|x - z|) (\langle t_z \rangle - \langle t_x \rangle \langle t_z \rangle) \quad (35)$$

- A equação encontra-se na classe de universalidade da equação FKPP, assim como a equação BK

Aproximação de campo médio

- Para valores suficientemente grandes de Y a solução $t(x, Y)$ é uma onda viajante:
 - Uma frente que interpola entre $t = 1$ quando $x \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$
 - Viaja para valores maiores de x quando Y cresce
- A posição $x_s(Y)$ desta frente define a *linha de saturação* ao longo da qual a amplitude de espalhamento é constante e de ordem $\mathcal{O}(1)$
- A posição desta linha pode ser inferida a partir da solução da equação linearizada (BFKL) $\rightarrow x_s(Y) \approx \lambda_s Y$ e

$$\chi'(\gamma_s) = \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} \Rightarrow \gamma_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \lambda_s = \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} = 3\sqrt{3} \quad (36)$$

- A amplitude na vizinhança da linha de saturação

$$t(x, Y) = c_1 \tau(x - x_s + c_2) \exp \left[-\gamma_s(x - x_s) - \frac{(x - x_s)^2}{2\chi''(\gamma_s)Y} \right] \quad (37)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de ordem 1 e $\chi''(\gamma_s) = 27$

- *Escalamento geométrico* na região $x - x_s \ll \sqrt{2\chi''(\gamma_s)Y}$

Efeitos das flutuações (I)

- Para uma dada condição inicial em $Y = 0$, a evolução estocástica até Y gera um *conjunto estatístico de frentes*:
 - As distintas frentes no conjunto diferem por suas respectivas posições de frente
 - $x_s(Y)$ torna-se agora uma *variável aleatória*
- Em uma boa aproximação, a distribuição de x_s em Y é uma *Gaussiana*, com um valor médio e dispersão tais que

$$\langle x_s \rangle = \lambda_s Y \quad \text{e} \quad \sigma^2(Y) = \langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2 = D_{\text{diff}} Y \quad (38)$$

- O valor assintótico da *velocidade média* λ_s é conhecido analiticamente [Brunet e Derrida, 97]

$$\lambda_s \simeq \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} - \frac{\pi^2 \gamma_s \chi''(\gamma_s)}{2 \ln^2 \tau} = 3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3} \pi^2}{2 \ln^2 \tau} \quad (39)$$

válido quando $\ln^2 \tau \gg 1$

- O *coeficiente de difusão da frente* $D_{\text{diff}} \sim 1/\ln^3(1/\tau)$ [Brunet et al, 06]
- Convergência lenta, *logarítmica* em τ , em relação aos resultados de campo médio \rightarrow forte sensibilidade às flutuações

Efeitos das flutuações (II)

- Quando Y cresce, o valor assintótico de λ_s é rapidamente alcançado (*exponencialmente* em Y), ao contrário da lenta convergência prevista pelo resultado de campo médio

$$\lambda_s \equiv \frac{dx_s(Y)}{dY} \approx \frac{\chi(\gamma_s)}{\gamma_s} - \frac{3}{2\gamma_s Y} = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2Y} \quad (40)$$

- As frentes individuais no conjunto exibem *escalamento geométrico*, mas apenas em uma região *compacta*:
 - Para cada frente, há apenas uma distância finita $x - x_s \leq \Delta x_g$, com $\Delta x_g \simeq (1/\gamma_s) \ln(1/\tau)$, além da frente, onde a amplitude escala como $t(x) \propto e^{-\gamma_s(x-x_s)}$
 - Em contraste, na amplitude de campo médio a janela de escalamento $x - x_s \propto \sqrt{Y}$ cresce com Y , e portanto pode tornar-se arbitrariamente grande
- O comprimento Δx_g na presença de flutuações é precisamente a distância na qual a amplitude decresce de seu valor na saturação $t \simeq 1$ até um valor de $\mathcal{O}(\tau)$

Efeitos das flutuações (III)

- Observáveis físicos, como $\langle t(x) \rangle_Y$, são obtidas realizando a média sobre o conjunto
- Nesta média, a propriedade de escalamento geométrico desaparece devido à dispersão nas posições das frentes e é eventualmente substituída, em valores de Y suficientemente grandes pelo *escalamento difusivo* [Hatta et al, 06]
- Especificamente, tem-se

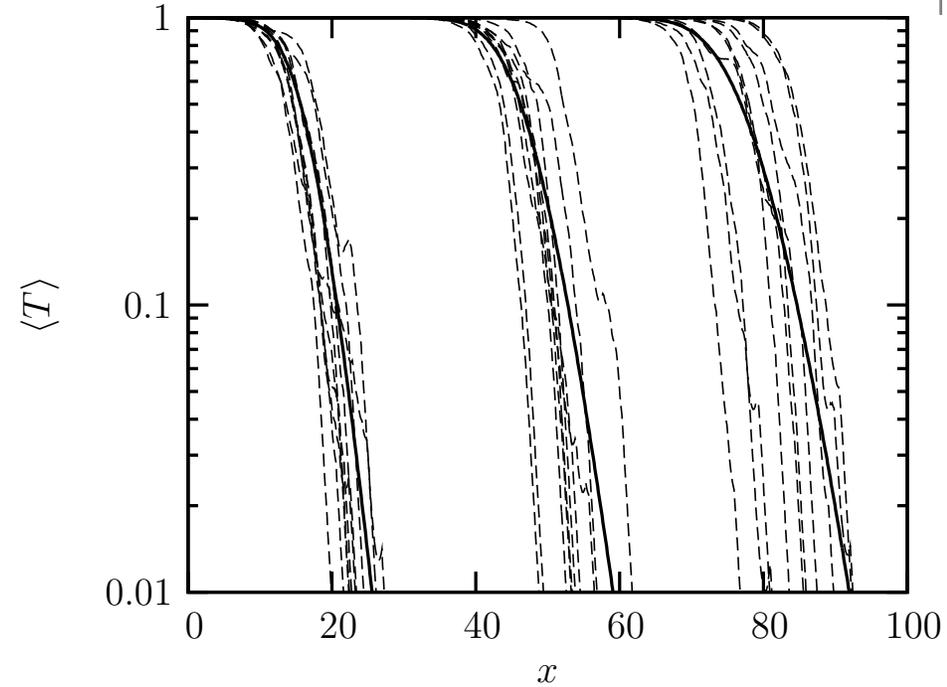
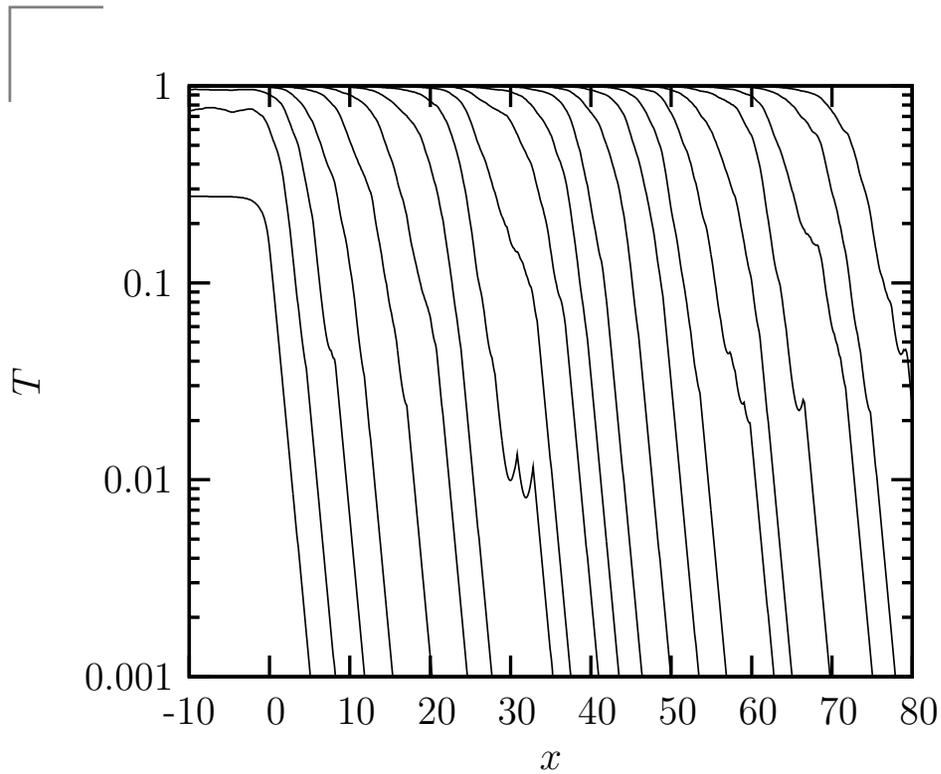
$$\langle t(x) \rangle_Y \simeq \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left[\frac{x - \langle x_s \rangle}{\sqrt{2D_{\text{diff}}Y}} \right], \quad (41)$$

onde $\operatorname{Erfc}(x)$ é a função erro complementar:

$$\operatorname{Erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt e^{-t^2} = \begin{cases} 2 - \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}|x|} & \text{para } x \ll -1 \\ 1 & \text{para } |x| \ll 1 \\ \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}x} & \text{para } x \gg 1 \end{cases}$$

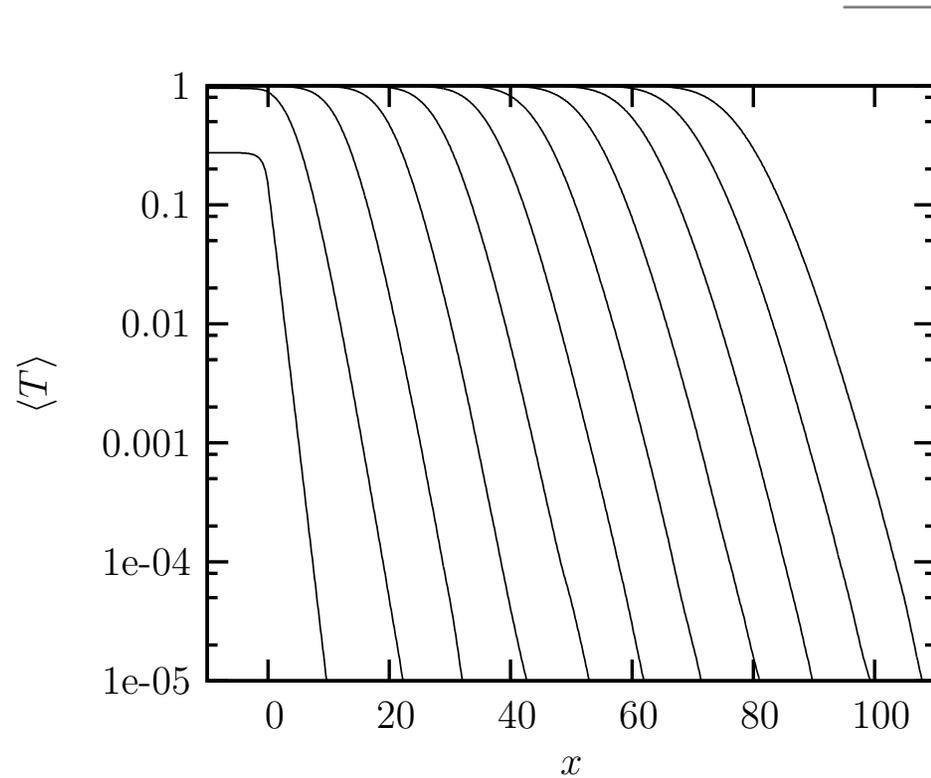
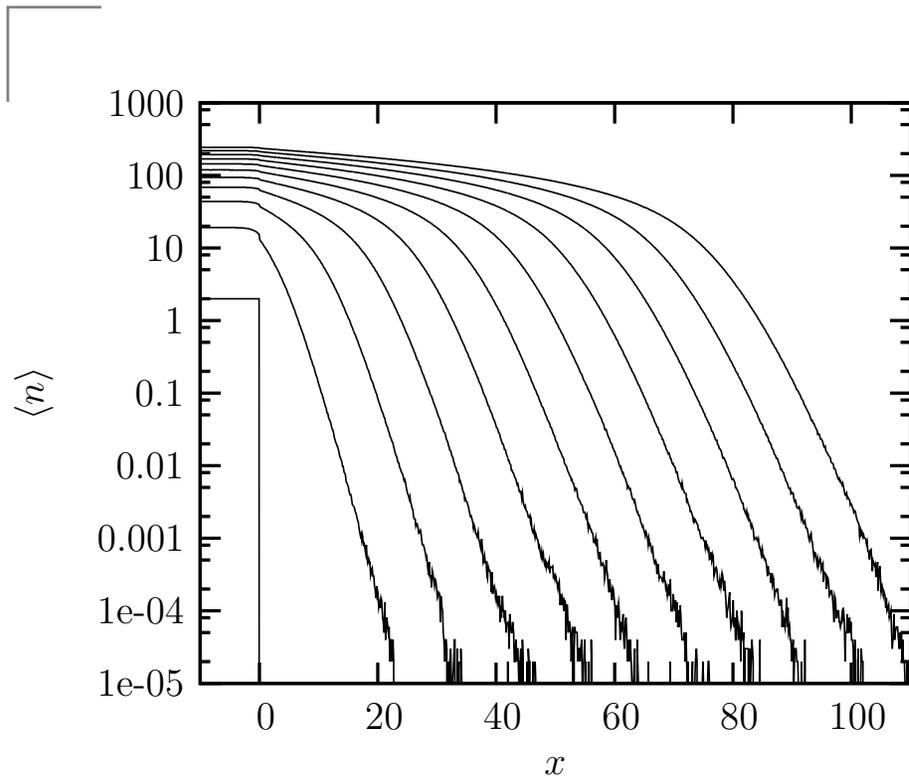
- A aproximação de escalamento difusivo é válida quando $D_{\text{diff}}Y \gg 1$ e na região $|x - \langle x_s \rangle| \ll \gamma_s D_{\text{diff}}Y$

Resultados numéricos (I)



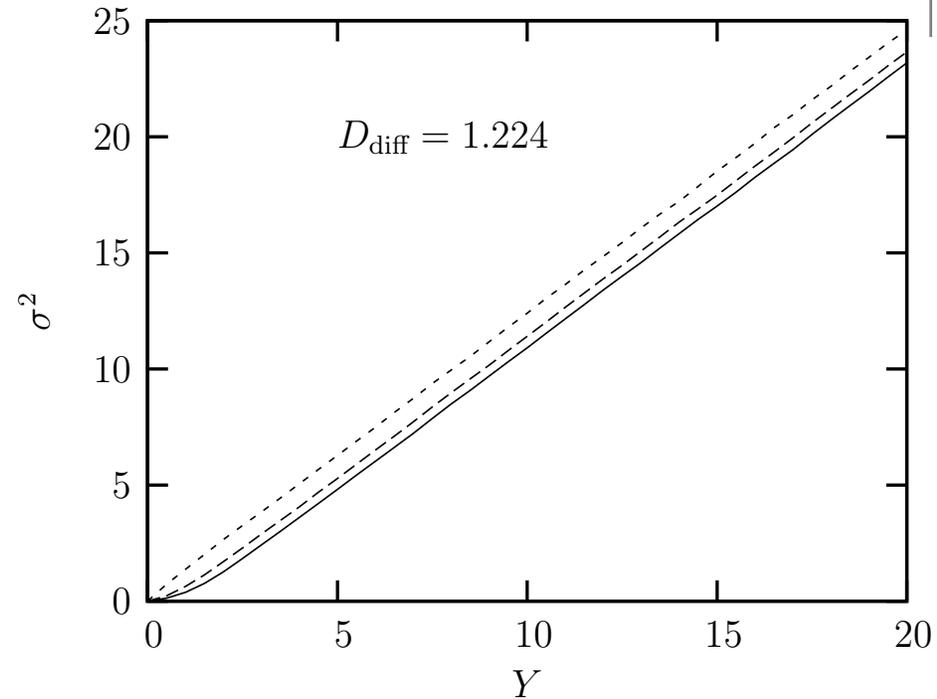
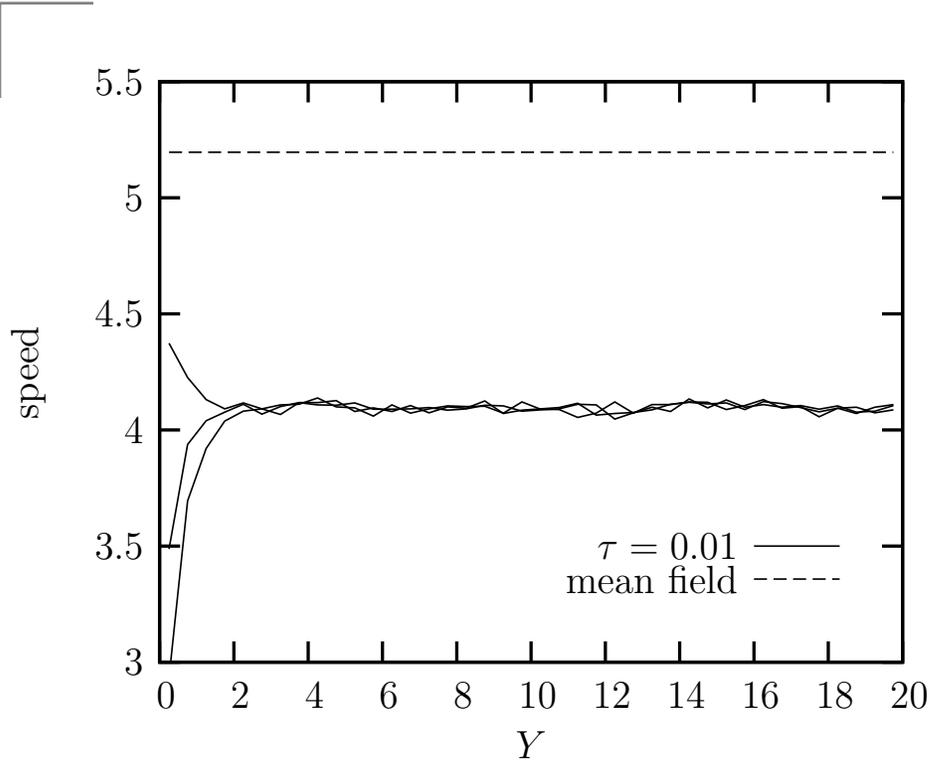
- À esquerda: Evolução da amplitude de espalhamento para um evento: formação de uma frente viajante
- À direita: Amplitude para 10 eventos (linhas tracejadas) e amplitude média (linha sólida) para $Y = 5, 12.5, 20$:
 - Flutuações levam a uma dispersão crescente na posição das frentes

Resultados numéricos (II)



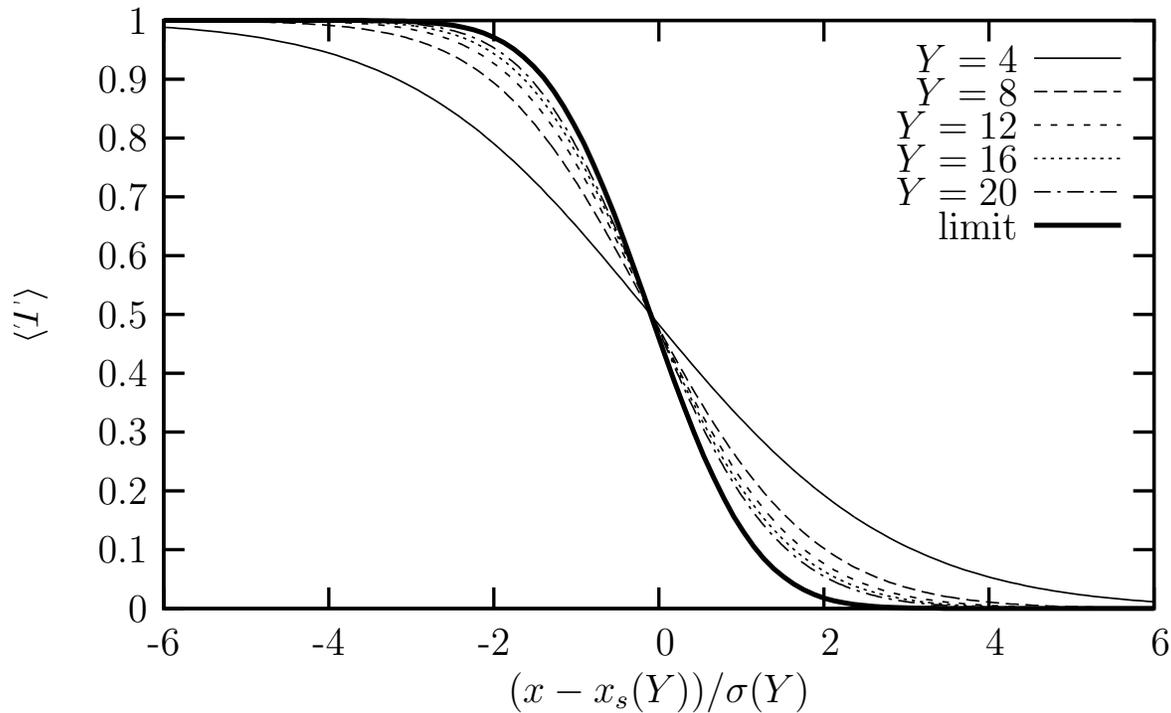
- Número de eventos $N_{ev} = 10^5$ para $Y = 0, 2, 4, \dots, 20$
- À esquerda: Número médio de ocupação
- À direita: Amplitude de espalhamento média
- A forma da frente na realidade varia – sua inclinação diminui – com Y

Resultados numéricos (III)



- Estatística da posição da frente (ou 'escala de saturação') x_s :
- À esquerda: Velocidade média da frente viajante
- À direita: Dispersão na posição das frentes $\sigma^2 = \langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2$
 - Bom ajuste através de crescimento linear, $\sigma^2 \simeq D_{\text{diff}} Y$ com $D_{\text{diff}} = 1.224$

Resultados numéricos (IV)



- Amplitude média como uma função da variável de escalamento difusivo
- Convergência para a curva assintótica esperada quando Y cresce

$$\langle t(x) \rangle_Y \simeq \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left[\frac{x - \langle x_s \rangle}{\sqrt{2D_{\text{diff}} Y}} \right]$$

- Escalamento difusivo satisfeito pelo modelo

Conclusões e perspectivas

- O modelo é consistente com princípios físicos gerais válidos na QCD: invariância de boosts, espalhamento múltiplo e evolução através da emissão de uma partícula adicional por unidade de rapidez
- Exibe um mecanismo de saturação similar à saturação gluônica
- O modelo parece estar na classe de universalidade do processo de reação-difusão, como também esperado em QCD, e exibe todas as características qualitativas esperadas na QCD em parâmetro de impacto fixo
- O modelo é suficientemente simples para permitir investigações numéricas detalhadas
- As equações de evolução para as amplitudes aparecem como uma generalização natural das equações de Balitsky–JIMWLK, com o projétil e o alvo tratados *simetricamente*
- Buscas por novas estruturas na QCD
- Aplicações do modelo unidimensional para o estudo de processos difrativos, realizada no formalismo da QCD por [Hatta et al, 2006]: DDIS
- Trabalho em andamento