

# A EQUAÇÃO F-KPP

Eduardo A. F. Basso

[andre.basso@ufrgs.br](mailto:andre.basso@ufrgs.br)

High Energy Phenomenology Group

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

<http://www.if.ufrgs.br/gfpae>

- Motivação
- A equação F-KPP
- Dinâmica linear
  - Velocidade de espalhamento linear
  - Caracterização das soluções exponenciais
  - Condições iniciais e transientes
- Propagação em frentes “puxadas” e “empurradas”
- Soluções de frentes uniformemente viajantes
- Conexão com a QCD

- F-KPP está na mesma classe de equivalência que a equação de evolução BK.
- Admite soluções de ondas viajantes, que descrevem um escalamento geométrico.
- Metodologia análoga pode ser usada para qualquer equação de evolução não-linear.

- A equação F-KPP é do tipo equação de difusão não linear

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + f(u), \text{ com } \begin{cases} f(0) = 0, & f(1) = 0 \\ f'(0) = 1, & f'(1) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

$u = 0$  é instável, pois para  $u > 0$  e pequeno,  $f(u) \approx f'(0)u = u$ .

⇒ Propagação de frentes em estados instáveis.

- Queremos determinar o comportamento assintótico da frente de onda e se propaga ao estado instável  $u = 0$ , dadas condições iniciais tais que  $u(x \rightarrow \infty, t = 0) = 0$ .

⇒ Análise da dinâmica linear (D-L).

- Seja um campo real  $\phi(x, t)$  para o qual  $\phi = 0$  é um estado linearmente instável. Assim, se linearizamos a equação dinâmica em  $\phi$  sobre o estado instável, os modos de Fourier crescem para algum intervalo de valores de  $k$ . Ou seja, tomando

$$\tilde{\phi}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x, t) e^{-ikx} \quad (2)$$

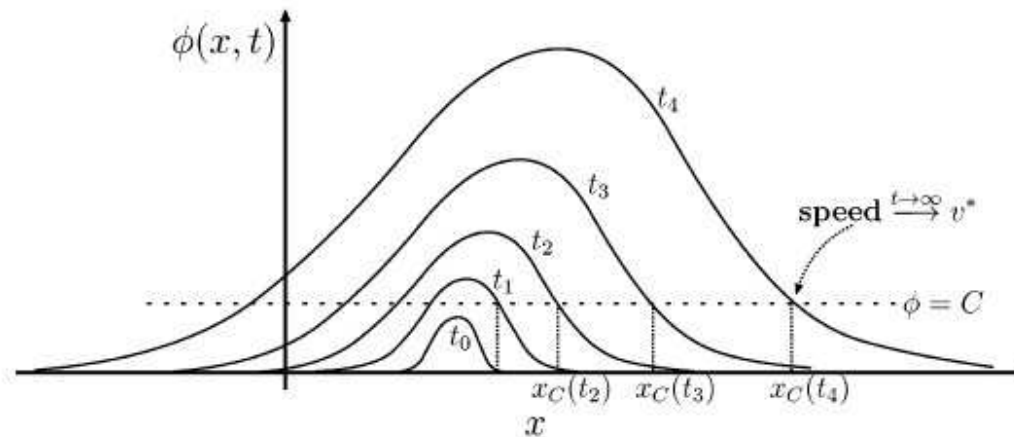
e substituindo o ansatz  $\tilde{\phi}(k, t) = \bar{\phi}(k) e^{-i\omega(k)t}$ , obtemos a relação de dispersão dos modos de Fourier da equação linearizada. Logo,

$\phi = 0$  lin. inst.  $\rightarrow \text{Im} \omega(k) > 0$  para algum intervalo de valores  $k$

# D-L: vel. espalhamento linear $v^*$ 1



- Como  $\tilde{\phi}(k, t) \sim e^{Im\omega(k)t}$ , uma condição inicial bem localizada crescerá e se espalhará no tempo.



onde

$$v^* \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_C(t)}{dt} \quad (3)$$

é a velocidade de espalhamento linear de  $\phi(x, t_0)$ .

# D-L: vel. espalhamento linear $v^*$ 2



- Dados  $\omega(k)$  e  $\bar{\phi}(k)$ , temos que  $\phi(x, t)$  é dado por

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \bar{\phi}(k) e^{ikx - i\omega(k)t} \quad (4)$$

Assumindo  $v^*$  finita, temos que no referencial  $\xi = x - v^*t$  não vemos nem crescimento nem decaimento exponencial de  $\phi(x, t)$ . Neste referencial,

$$\phi(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \bar{\phi}(k) e^{ik\xi - i[\omega(k) - v^*k]t} \quad (5)$$

Determinamos  $v^*$  analisando quando esta expressão não leva a crescimento nem decaimento exponencial no limite  $\xi$  finito e  $t \rightarrow \infty$ . Por aproximação de ponto de sela, temos

$$\left. \frac{d[\omega(k) - v^*k]}{dk} \right|_{k^*} = 0 \implies v^* = \left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k^*} \quad (6)$$

- Assumindo que  $\bar{\phi}(k)$  é uma função inteira, o termo dominante na integral (5) é  $e^{i[\omega(k^*) - v^* k^*]t}$ . O requerimento de autoconsistência que este termo não cresce nem decresce exponencialmente leva a

$$\text{Im } \omega(k^*) - v^* \text{Im } k^* = 0 \Rightarrow v^* = \frac{\text{Im } \omega(k^*)}{\text{Im } k^*} = \frac{\omega_i}{k_i} \quad (7)$$

Expandindo o fator da exponencial em (5) em torno do ponto de sela  $k^*$ , resulta

$$ik\xi - i[\omega(k) - v^* k] \approx i(k^* + \Delta k)\xi - i(\omega_r^* - k_r^* v^*)t - \mathcal{D}t(\Delta k)^2 \quad (8)$$

onde  $\Delta k = k - k^*$ .



# D-L: vel. espalhamento linear $v^*$ 4



- Assim, (5) se torna

$$\begin{aligned}\phi(\xi, t) &= \frac{1}{2\pi} e^{ik^*\xi - i(\omega_r^* - k_r^*v^*)t} \int_{-\infty}^{\infty} dk \bar{\phi}(k) e^{-\mathcal{D}t[\Delta k - i\xi/2\mathcal{D}t]^2 - \xi^2/4\mathcal{D}t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} e^{ik^*\xi - i(\omega_r^* - k_r^*v^*)t} e^{-\xi^2/4\mathcal{D}t} \bar{\phi}(k^*) \quad (\xi \text{ fixo}, t \rightarrow \infty)\end{aligned}\quad (9)$$

onde,

$$\left. \frac{d\omega(k)}{dk} \right|_{k^*} = \frac{\omega_i(k^*)}{k_i}, \quad v^* = \frac{\omega_i(k^*)}{k_i}, \quad \mathcal{D} = \frac{i}{2} \left. \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right|_{k^*} \quad (10)$$

Sejam

$$\lambda^* \equiv \text{Im } k^*, \quad \frac{1}{D} \equiv \text{Re } \frac{1}{\mathcal{D}} \quad (11)$$

Então

$$|\phi(\xi, t)| \sim \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\lambda^*\xi} e^{-\xi^2/4\mathcal{D}t} \quad (\xi \text{ fixo}, t \rightarrow \infty) \quad (12)$$

- Para a F-KPP linear,  $\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u$ , a substituição do modo de Fourier  $e^{-i\omega t + ikx}$  fornece a relação de dispersão

$$\omega(k) = i(1 - k^2) \quad (13)$$

e usando as equações (??),

$$v_{F-KPP}^* = 2, \quad \lambda^* = 1, \quad \text{Re } k^* = 0, \quad D = \mathcal{D} = 1 \quad (14)$$

Substituindo estas em (??) e considerando como C.I. função delta, temos

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{t - x^2/4t} \quad (15)$$

- Na prática, único caso relevante para C.I.s não inteiras é quando estas têm pólos no plano complexo, o que corresponde a  $\phi(x, t = 0) \sim e^{-x}$  para  $x \gg 1$ . Seja  $\bar{\phi}(k)$  com um pólo em  $k = k'$ , então deformando a integral em  $k$  para incluir o pólo temos que  $\phi(x, t)$  tem uma contribuição da forma

$$|e^{i\omega(k')t + ik'x}| = e^{-\lambda(x - v(k')t)} \text{ com } \lambda = \text{Im } k' \quad (16)$$

onde

$$v(k') = \frac{\text{Im } \omega(k')}{\text{Im } k'} \quad (17)$$

é a velocidade do pacote.

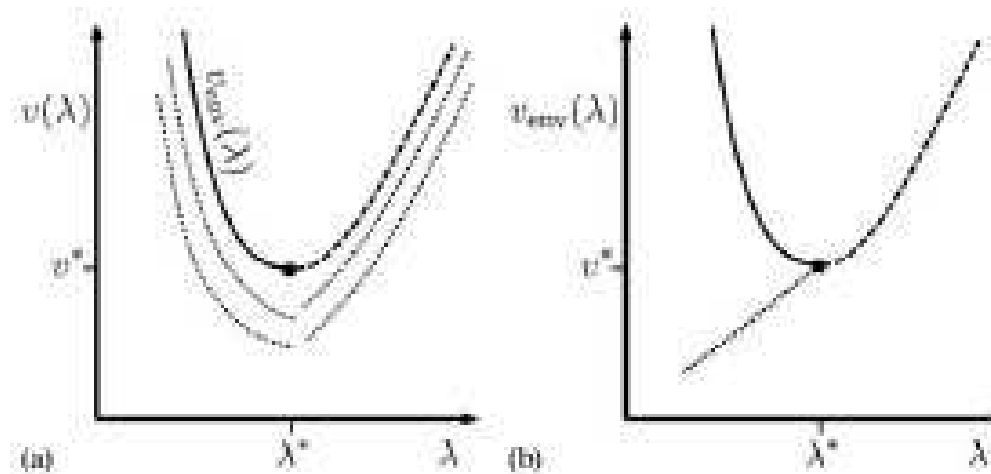
# D-L: Soluções exponenciais 1



- Escolhemos uma única velocidade do pacote tomando o valor de  $Re k'$  que maximize  $Im \omega(k)$ ,

$$v_{env}(\lambda \equiv k'_i) = \frac{\omega_i(k)}{k_i} \Big|_{k=k'} \text{ com } \frac{\partial \omega_i(k)}{\partial k_r} \Big|_{k=k'} = Im \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k'} = 0. \quad (18)$$

O comportamento desta função é tal que



O mínimo de  $v_{env}$  com respeito a  $\lambda$  é a velocidade de espalhamento linear  $v^*$ !

- Para frentes de onda viajantes da forma  $\phi(x - vt)$ ,

$$v(\lambda) = \frac{\omega(k)}{k} \quad (\lambda = k_i) \quad (19)$$

com  $Im(\omega/k) = 0$

$$\begin{aligned} v > v^* : k_r = \omega_r = 0, \mathcal{D}_i = 0 \\ v < v^* : k_r \neq 0 \text{ (soluções espacialmente oscilatórias)} \end{aligned} \quad (20)$$

- Na análise anterior vimos que no limite  $\xi \rightarrow \infty$  e  $t$  fixo,

$$\phi(x \rightarrow \infty, t = 0) \sim e^{-\lambda x} \Rightarrow \phi(x \rightarrow \infty, t) \sim e^{-\lambda x}$$

Na análise do ponto de sela, usamos o limite  $\xi$  fixo e  $t \rightarrow \infty$ . Estes limites não comutam. Tentemos entender a competição e o cruzamento das partes exponenciais e das contribuições de ponto de sela. Na região dominada pelo ponto de sela, tínhamos

$$|\phi(\xi, t)| \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\lambda^* \xi} e^{-\xi^2 / 4Dt} |\bar{\phi}(k^*)| \quad (21)$$

enquanto, no referencial  $\xi$  movendo-se com velocidade  $v^*$ , na região de grande  $\xi$ , o perfil é dado por

$$|\phi(\xi, t)| \simeq A e^{-\lambda[\xi - (v_{env}(\lambda) - v^*)]} \quad (22)$$

onde  $A$  é a força do pólo da condição inicial.

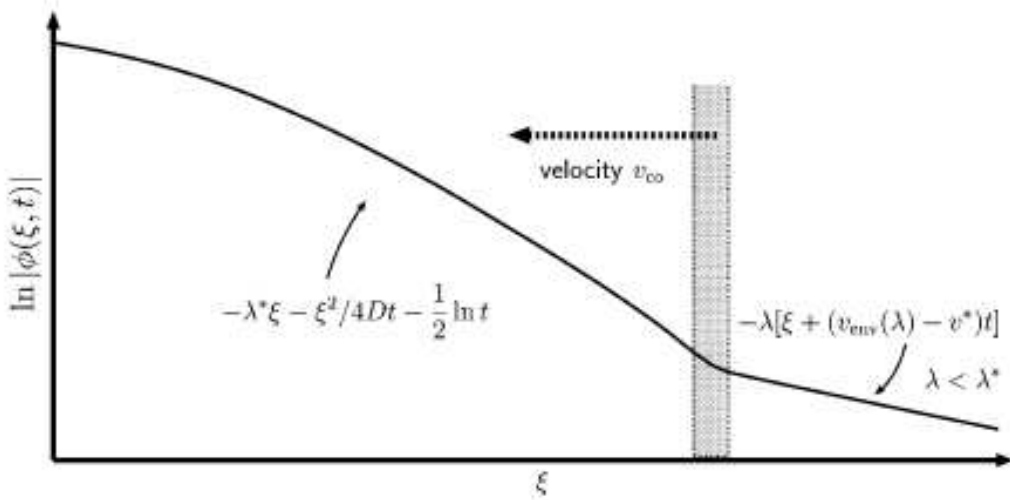
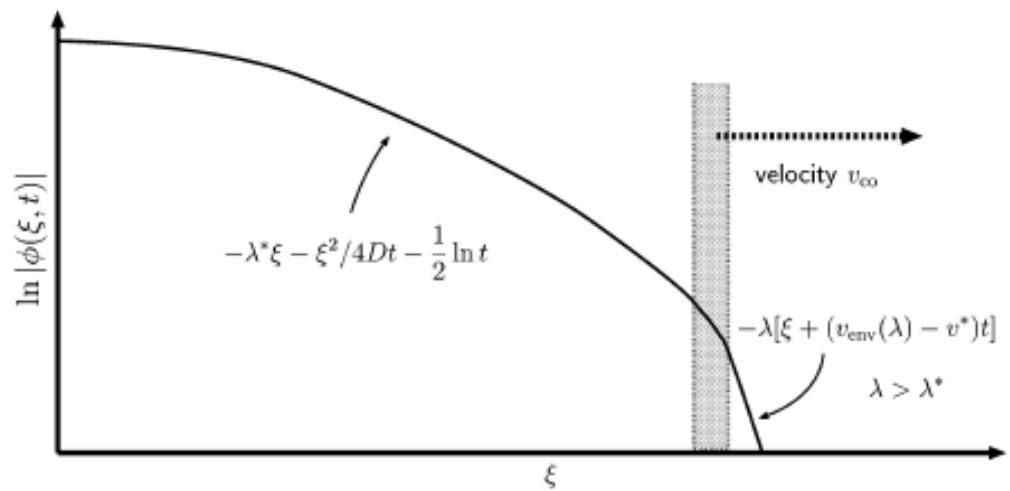
- O cruzamento se dá quando as duas expressões se encontram. Igualando os fatores das exponenciais e fazendo  $\xi_{co} = v_{co}t$ , resulta, para os termos lineares em  $t$ ,

$$-\lambda^* v_{co} - v_{co}^2/4D = -\lambda v_{co} + \lambda[v_{env}(\lambda) - v^*] \quad (23)$$

$$v_{co} = 2D(\lambda - \lambda^*) \pm 2D\sqrt{(\lambda - \lambda^*)^2 - \lambda[v_{env}(\lambda) - v^*]/D} \quad (24)$$

sinal de  $v_{co}$  vem do sinal de  $\lambda - \lambda^*$ . Assim, o ponto de cruzamento para uma “cauda” com taxa de decaimento  $\lambda > \lambda^*$ , move-se para a direita e para  $\lambda < \lambda^*$ , move-se para a esquerda.

# D-L: C.I.s e transientes 2





- Pela importância das cond. iniciais com  $\lambda > \lambda^*$ , chamamos estas de *cond. iniciais abruptas*, tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, 0) e^{\lambda^* x} = 0 \quad (25)$$

- Concluindo,

*De acordo com a dinâmica linear, condições iniciais com taxas de decaimento exponencial  $\lambda$  maiores que  $\lambda^*$  levam a perfis que espalham-se assintoticamente com a velocidade de espalhamento linear  $v^*$ . Condições iniciais com  $\lambda$  menores que  $\lambda^*$  evoluem em perfis que avançam com velocidade  $v_{env} > v^*$ .*

# Frentes “puxadas” e “empurradas”



- Seja  $v_{frente}(t)$  a velocidade de instantânea da frente apropriadamente definida. Para propagação de frentes em estados linearmente instáveis, existem somente duas possibilidades, se começarmos com condições iniciais abruptas,

$$[i] v_{as} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} v_{frente}(t) = v^* \Leftrightarrow \text{frente “puxada”}$$

$$[ii] v_{as} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} v_{frente}(t) = v^\dagger > v^* \Leftrightarrow \text{frente “empurrada”}$$

- Quando uma eq. dinâmica admite um estado estacionário estável  $\phi = cte$  além do estado instável  $\phi = 0$ , então esta equação também admite soluções de frentes viajantes do tipo  $\phi(x, t) = \phi_v(\xi)$ , com  $\xi = x - vt$ .
- Supondo existir uma família de tais soluções, esta deverá incluir uma solução de frente uniformemente viajante  $\phi_{v^*}(\xi)$  movendo-se com velocidade  $v^*$ , para a qual a frente assintoticamente convergirá no regime “puxado”.
- Para uma velocidade arbitrária  $v$ , as soluções  $\phi_v(\xi)$  irão à zero exponencialmente para grande  $\xi$ . Assim,

$$\phi_v(x) \approx a_1 e^{-\lambda_1 \xi} + a_2 e^{-\lambda_2 \xi} + \dots \quad (\xi \rightarrow \infty) \quad (26)$$

onde as raízes  $\lambda_i$  são positivas e ordenadas ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ).

# Soluções de frentes viajantes 1



- Destacamos que para  $v > v^*$ ,  $\lambda_1 < \lambda^*$  enquanto que  $\lambda_2 > \lambda^*$ .
- No mínimo da velocidade, i. é., quando  $v = v^*$ , estas duas raízes coincidem. Neste caso, temos que

$$\phi_{v^*}(x) \approx (a_1\xi + a_2)e^{-\lambda^*\xi} + a_3e^{-\lambda_3\xi} + \dots \quad (\xi \rightarrow \infty) \quad (27)$$

ou seja, considerando os termos dominantes, temos

$$\phi_{v^*}(x) \approx (a_1\xi + a_2)e^{-\lambda^*\xi} \quad (28)$$

- Seja a F-KPP com  $f(u) = u - u^2$ ,

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u - u^2 \quad (29)$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\gamma_0 x}, & x > 0 \end{cases} \quad (30)$$

$u = 1$  é um estado estável. Como vimos, a solução da parte linear de (29) é

$$u(x, t) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d\gamma}{2\pi i} u_0(\gamma) e^{-\gamma(\xi+vt)+\omega(\gamma)t} \quad (31)$$

onde  $\omega(\gamma)$  é a transformada de Mellin do kernel linear  $(\partial_x^2 + 1)$  e define a relação de dispersão da eq. linearizada.

# Conexão com a QCD: preliminares 1



- A tranf. de Mellin das cond. iniciais é  $u_0(\gamma) = 1/\gamma + 1/(\gamma_0 + \gamma)$ .  
Como antes, temos que

$$v = \left. \frac{d\omega}{d\gamma} \right|_{\gamma_c} \equiv v_g \quad (32)$$

temos três casos:

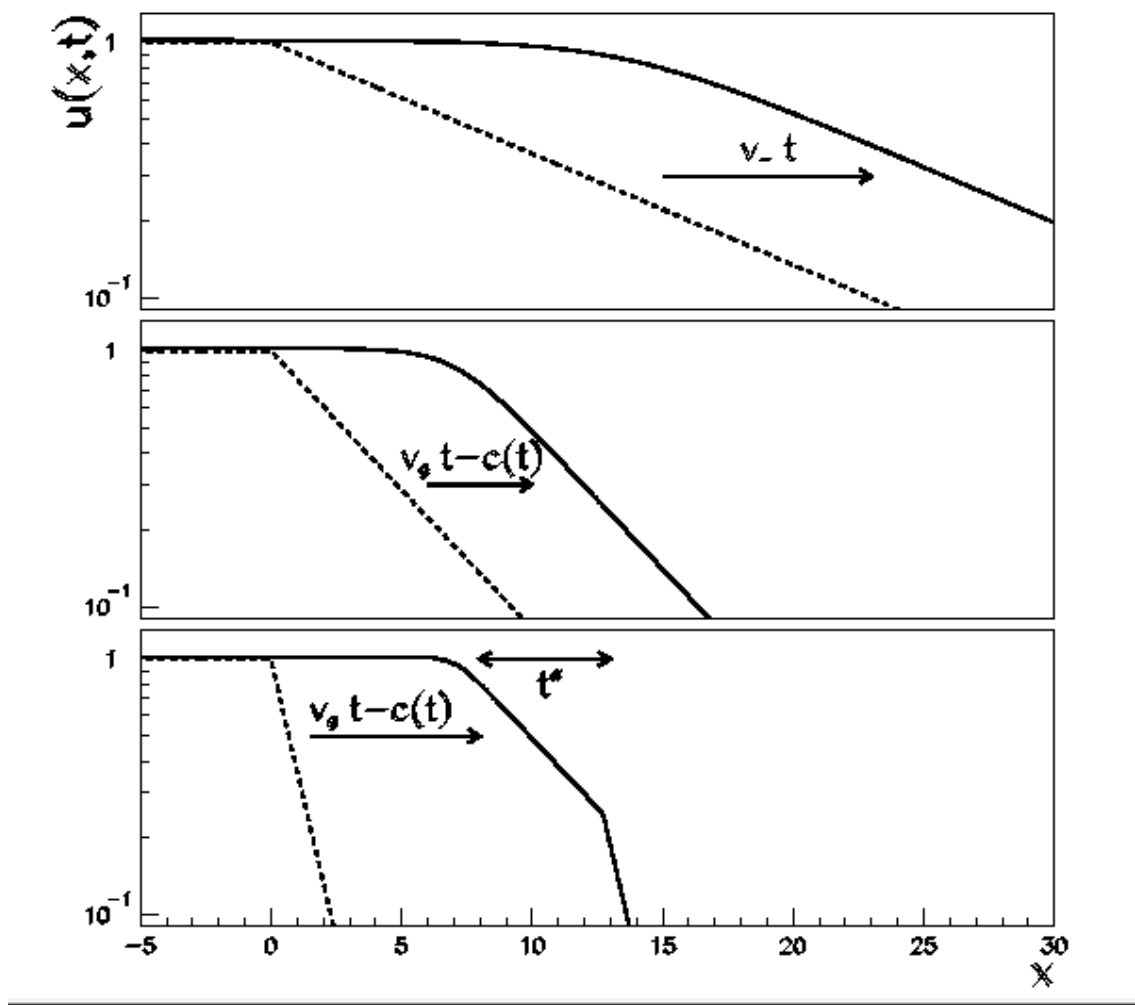
(i)  $\gamma_0 < \gamma_c$ : domínio das condições iniciais. A integral (31) é dominada pelo pólo em  $\gamma_0$  e  $u \sim e^{-\gamma_0(\xi+v^*t)+\omega(\gamma_0)t}$  e a velocidade da frente é  $v_- > v_g \equiv \omega(\gamma_0)/\gamma_0$ .

(ii)  $\gamma_0 > \gamma_c$ : domínio do ponto de sela. Agora,  $u \sim e^{-\gamma_c(\xi+vt)+\omega(\gamma_c)t}$  e  $v = v_g = \omega(\gamma_c)/\gamma_c$ .

(iii)  $\gamma_0 = \gamma_c$ : domínio das condições iniciais e do ponto de sela.

$$v = v_g$$

# Conexão com a QCD: preliminares 2



- Substituindo as expressões para os casos anteriores na expressão (31), temos, no limite  $t \rightarrow \infty$ ,

$$u(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} e^{-\gamma_0 \xi} & \text{se } \gamma_0 < \gamma_c \\ e^{-\gamma_c \xi} & \text{se } \gamma_0 \geq \gamma_c \end{cases} \quad (33)$$

Consideraremos, agora, somente as soluções para  $\gamma_0 \geq \gamma_c$  e investigamos como a frente atinge o comportamento assintótico. Para isso, seja o ansatz na vizinhança da frente,

$$u(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} t^\alpha G \left( \frac{\xi + c(t)}{t^\alpha} \right) e^{-\gamma_c(\xi + c(t))} \quad (34)$$

onde  $c(t)$  é uma função subdominante do tempo (com respeito a  $v_g t$ ).



- Seja a eq. BK,

$$\partial_Y \mathcal{N} = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \mathcal{N} - \bar{\alpha} \mathcal{N}^2 \quad (35)$$

onde  $L = \log(k^2/\Lambda_{QCD}^2)$ ,  $\chi$  é o kernel BFKL,

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma) \quad (36)$$

e  $\chi(-\partial_L)$  é um operador integro-diferencial que pode ser definido como

$$\chi(-\partial_L) = \chi(\gamma_0) \mathbf{1} + \chi'(\gamma_0)(-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \chi''(\gamma_0)(-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^2 + \dots \quad (37)$$

- A parte linear de (35) é resolvida como

$$\mathcal{N}(k, Y) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i} \mathcal{N}_0(\gamma) e^{-\gamma L + \bar{\alpha} \chi(\gamma) Y} \quad (38)$$

com  $Y \longrightarrow t$  e  $L = \log(k^2 / \Lambda_{QCD}^2) \longrightarrow x$ . No limite  $L$  grande,  $\mathcal{N}(k, Y = 0) \sim k^{-2}$  que corresponde a propriedade de transparência de cor da QCD e fornece  $\gamma_0 = 1$ . O limite  $L$  pequeno ou negativo implica em QCD não-perturbativa e a dinâmica é desconhecida. Apenas supomos que  $\mathcal{N}(k, Y = 0)$  é limitado neste limite.

- $\gamma_c = 0,6275\dots$  e portanto estamos no caso (ii) visto anteriormente ( $\gamma_0 > \gamma_c$ )

# Conexão com a QCD: eq. BK 1



- Comparando (29) com (31) temos que  $\omega(\gamma) = \bar{\alpha}\chi(\gamma)$  e

$$v_g = \frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c} = \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c} \quad (39)$$

Mas  $v_g = \left. \frac{d\omega}{d\gamma} \right|_{\gamma_c}$ , de onde temos que

$$\gamma_c \chi'(\gamma_c) = \chi(\gamma_c) \quad (40)$$

Usando a aproximação “difusiva” da BK, i. é., truncando a série para  $\chi(-\partial_L)$  em ordem 2, temos que a eq. não linear se torna

$$\partial_Y = -v_g \partial_L \mathcal{N} + \frac{1}{2} \bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) (\partial_L + \gamma_c \mathbf{1})^2 \mathcal{N} - \bar{\alpha} \mathcal{N}^2 \quad (41)$$

a qual se reduz a F-KPP após algumas trocas de variáveis.

# Conexão com a QCD: eq. BK 2

Assumindo  $u = \mathcal{N}$ ,  $x = L$  e  $t = Y$  temos que o ansatz que descreve a solução linearizada de (41) é

$$\mathcal{N}(L, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} Y^\alpha G(z) e^{-\gamma_c((L-v_g Y)+c(Y))} \quad (42)$$

onde  $z = \frac{\xi+c(t)}{t^\alpha} = \frac{(L-v_g Y)+c(Y)}{Y^\alpha}$

Substituindo esta na parte linear de (41), obtemos uma E.D.O. para  $G(z)$ ,

$$\frac{1}{2} \bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) Y^{-\alpha} G''(z) + (\alpha z Y^{\alpha-1} - \dot{c}(Y)) G'(z) + Y^{\alpha-1} (\gamma_c \dot{c}(Y) Y - \alpha) G(z) = 0 \quad (43)$$

Para  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\dot{c}(Y) = \frac{\beta}{Y}$ , os diferentes termos contribuem igualmente e temos

$$\frac{1}{2} \bar{\alpha} \chi''(\gamma_c) G''(z) + \frac{1}{2} z G'(z) + (\beta \gamma_c - \frac{1}{2}) G(z) = 0 \quad (44)$$

# Conexão com a QCD: eq. BK 3

O comportamento assintótico de  $G(z)$ , com  $z \rightarrow \infty$ , deve ser tal que o ansatz para a frente subassintótica encontre a condição inicial para  $x \rightarrow \infty$ . Isto é satisfeito para  $\beta = 3/(2\gamma_c)$ . A solução  $G(z) = 0$  para  $z = 0$  fornece

$$G(z) = A \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}} z e^{-z^2/(2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c))} \quad (45)$$

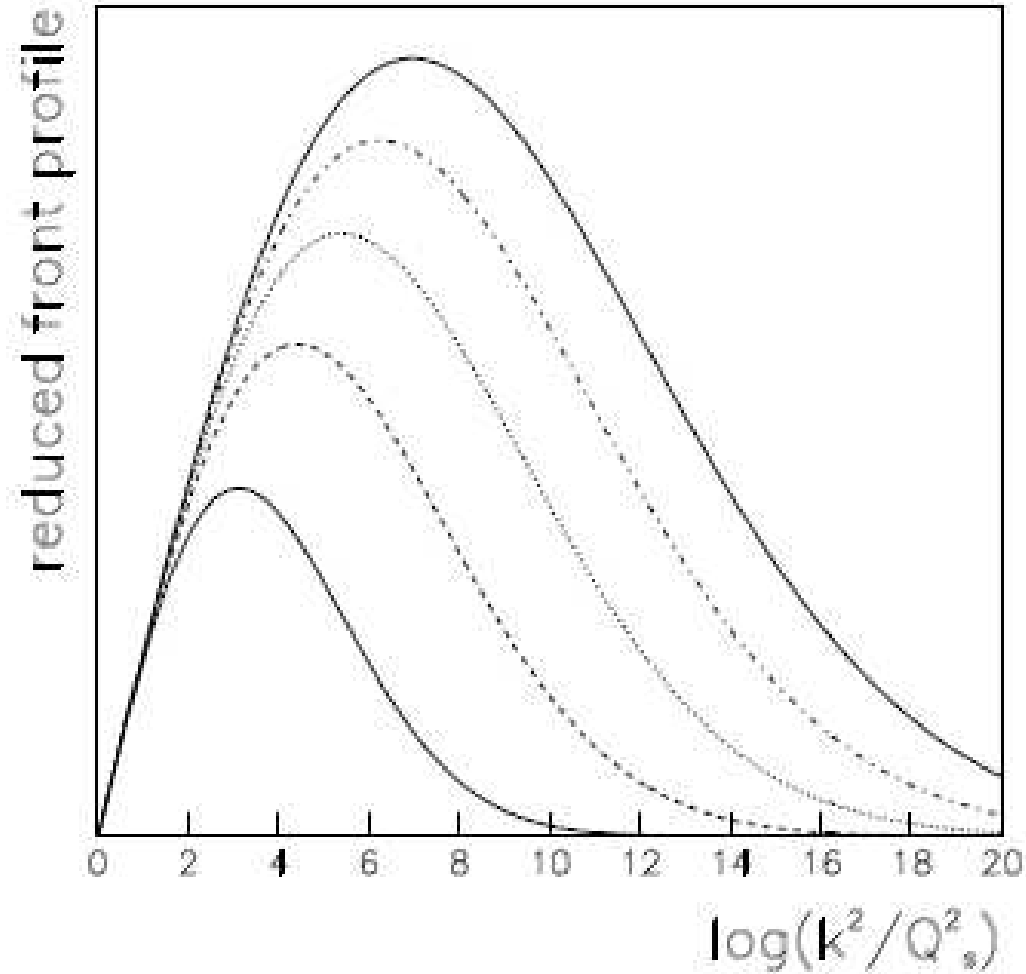
Em termos de  $L = \log(k^2/Q_s^2(Y))$  e  $Y$ , a eq. (42) se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(k/Q_s(Y), Y) = & A \sqrt{\frac{2}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}} \log\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right) \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)^{\gamma_c} \times \\ & \times e^{-\frac{1}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \log^2\left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)}\right)} \end{aligned} \quad (46)$$

onde a escala de saturação é definida como

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c} Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log Y} \quad (47)$$

# Conexão com a QCD: eq. BK 4



- Win van Saarloos, Phys. Rep. **386**, 29 (2003).
- S. Munier e R. Peschanski, Phys. Rev. D **69**, 034008 (2004).