

Rapidez e Pseudo-Rapidez

Rogério Nunes Wolff

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

- Revisar os conceitos de rapidez e pseudo-rapidez e seu uso no estudo de colisões de alta energia

- Para um 4-vetor qualquer $X^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, suas componentes em coordenadas de cone de luz são definidas por:

$$x^+ = \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}}, x^- = \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \vec{x}^T = (x^1, x^2)$$

- Um 4-vetor X^μ qualquer, submetido a uma Transformação de Lorentz no eixo z, produz um novo 4-vetor X'^μ :

$$x'^0 = \frac{x^0 + vx^3}{\sqrt{1 - v^2}}, x'^3 = \frac{vx^0 + x^3}{\sqrt{1 - v^2}}, x'^1 = x^1, x'^2 = x^2$$

onde v é a velocidade relativa entre os referenciais inerciais.

- O novo 4-vetor X'^μ em coordenadas de cone de luz pode ser escrito, em termos do 4-vetor X^μ :

$$x'^+ = x^+ e^\Psi, x'^- = x^- e^{-\Psi}, \vec{x}'^T = \vec{x}^T$$

onde $\Psi = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$ ou $v = \tanh(\Psi)$



Propriedades de Ψ

- Se fizermos duas Transformações de Lorentz de argumentos Ψ_1 e Ψ_2 sucessivas, obtemos:

$$X''^+ = X'^+ e^{\Psi_2} = (X^+ e^{\Psi_1}) e^{\Psi_2} = X^+ e^{\Psi_1 + \Psi_2}$$

$$X''^- = X'^- e^{-\Psi_2} = (X^- e^{-\Psi_1}) e^{-\Psi_2} = X^- e^{-(\Psi_1 + \Psi_2)}$$

ou seja, o argumento Ψ da transformação total é a soma dos argumentos Ψ_1 e Ψ_2 .

- Seja uma partícula de massa m no referencial de repouso. Seu 4-momento é, em coordenadas de cone de luz:

$$P^\mu = \left(\frac{m}{\sqrt{2}}, \frac{m}{\sqrt{2}}, \vec{0}^T \right) = (p^+, p^-, \vec{0}^T)$$

- Aplicamos uma Transformação de Lorentz no eixo z sobre a partícula em repouso, obtendo o novo 4-momento:

$$P'^\mu = (p'^+, p'^-, \vec{0}^T) = \left(\frac{m}{\sqrt{2}} e^\Psi, \frac{m}{\sqrt{2}} e^{-\Psi}, \vec{0}^T \right)$$

- A razão $p^+ / p^- = e^{2\Psi}$ fornece uma medida do “boost” da partícula em relação ao seu referencial de repouso. Definimos, então, a rapidez de uma partícula mediante a relação:

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^+}{p^-}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p^0 + p^3}{\sqrt{2}} / \frac{p^0 - p^3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E + p^z}{E - p^z}\right)$$

qualquer que seja seu momento transverso \vec{p}^T .

- Com esta definição, o 4-momento de uma partícula de rapidez y e momento transversal \vec{p}^T é dado por:

$$P^\mu = \left(\sqrt{\frac{m^2 + |\vec{p}^T|^2}{2}} e^y, \sqrt{\frac{m^2 + |\vec{p}^T|^2}{2}} e^{-y}, \vec{p}^T \right)$$

- Note que y é diferente do argumento Ψ ! Só coincidem se $\vec{p}^T = 0$.



Rapidez vs. Transf. de Lorentz

- Devido à definição, a rapidez é aditiva sob transformações de Lorentz no eixo z:

$$y \rightarrow y' = y + \Psi$$



Produto escalar de momenta

- Sejam dois 4-momenta, p_1 e p_2 . Se $p_1 \gg p_2$, só uma das componentes contribui para o produto escalar:

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^+ p_2^- + p_1^- p_2^+ - \vec{p}_1^T \cdot \vec{p}_2^T$$

- Como p_1 é grande, $p_1^+ \gg p_1^-$, portanto

$$p_1 \cdot p_2 \simeq p_1^+ p_2^- - \vec{p}_1^T \cdot \vec{p}_2^T$$



Uso da rapidez como variável

- Em colisões de alta energia a distribuição de hádrons no estado final é aproximadamente uniforme, dentro dos limites cinemáticos;
- A distribuição é aproximadamente invariante frente às Transformações de Lorentz na direção z ;
- É desejável que o detector seja aproximadamente uniformemente espaçado em termos da rapidez.
- O que é possível construir é um detector uniforme em termos de pseudo-rapidez.

- O que é possível medir é a pseudo-rapidez, que é definida por

$$\eta = -\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

a qual depende só de θ que é o ângulo de espalhamento em relação ao eixo z.

Rapidez vs. pseudo-rapidez

- A rapidez pode ser calculada em função da pseudo-rapidez η e do momento transverso \vec{p}^T mediante:

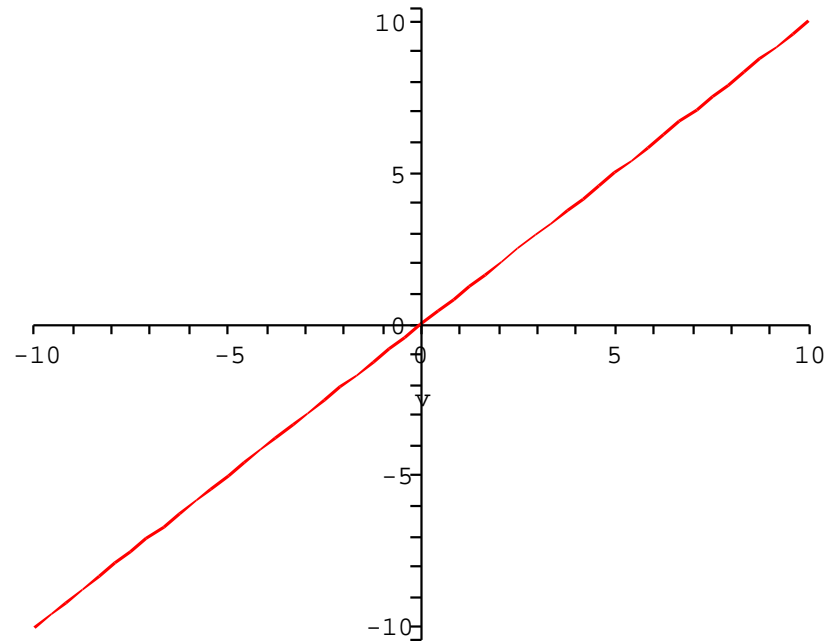
$$y = \ln\left(\frac{\sqrt{m^2 + |\vec{p}^T|^2 \cosh^2 \eta} + |\vec{p}^T| \sinh \eta}{\sqrt{m^2 + |\vec{p}^T|^2}}\right)$$

- Para $m \ll |\vec{p}^T|$, $y \rightarrow \eta$;
- A rapidez tem limite vinculado à energia máxima das partículas produzidas no espalhamento;
- A pseudo-rapidez varia de $-\infty$ a ∞ .



Rapidez vs. pseudo-rapidez

- Qual o erro cometido ao tomar η por y ?

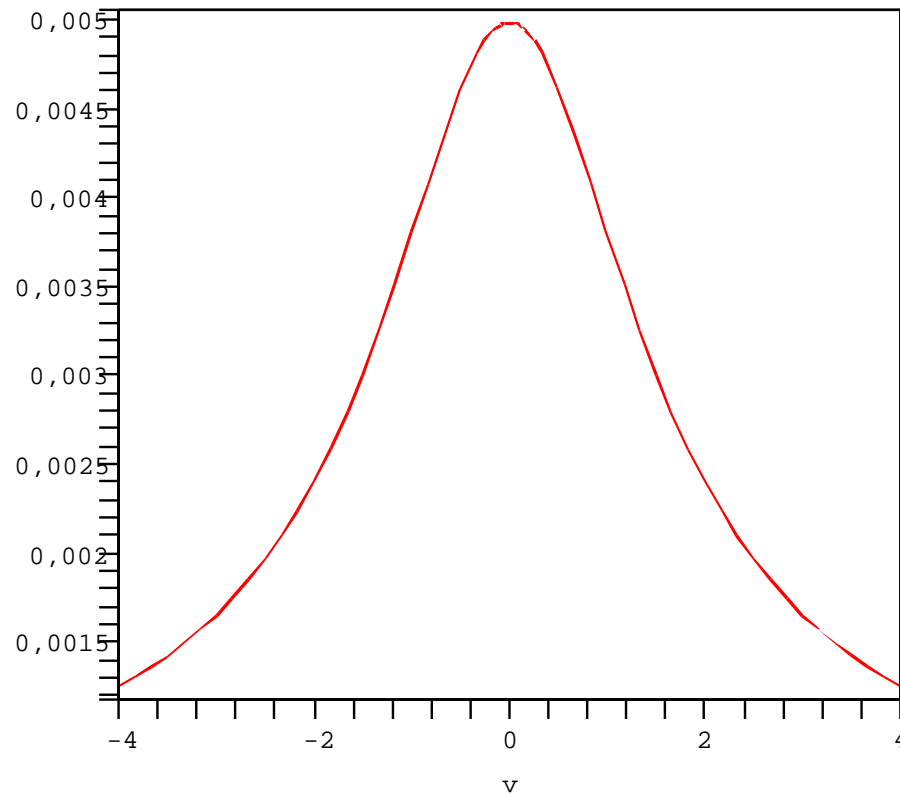


Rapidez x Pseudo-Rapidez; $p/m=10$



Rapidez vs. pseudo-rapidez

● Gráfico Erro Máximo vs. Pseudo-rapidez

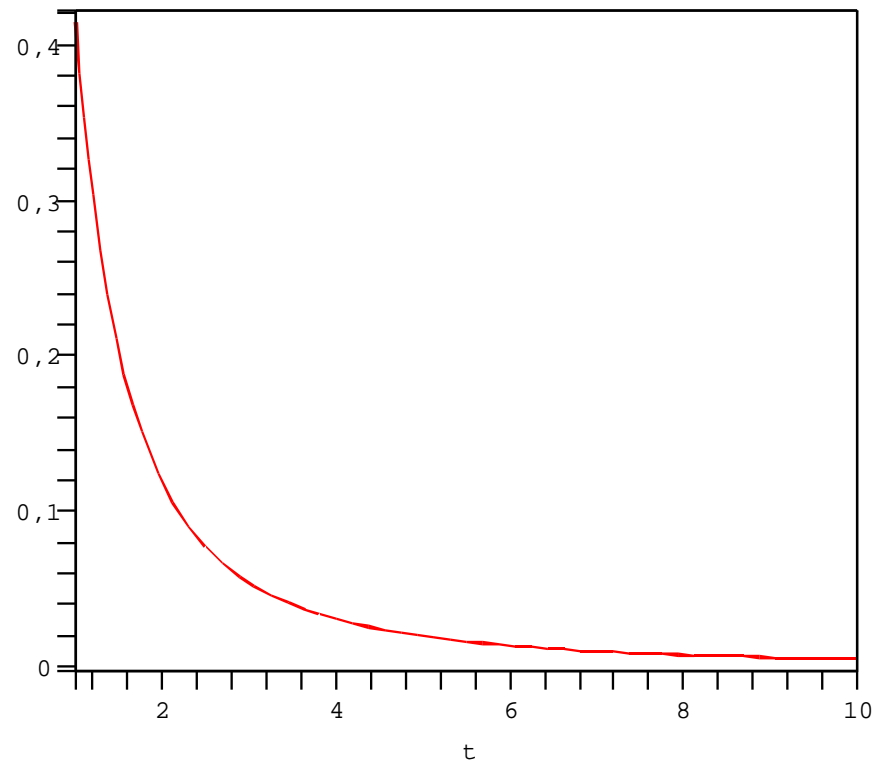


— Erro x Pseudo-Rapidez; p/m=10



Rapidez vs. pseudo-rapidez

- Gráfico Erro Máximo vs. Momento Transverso



Erro máximo x p/m; pseudo-rapidez=0.00001

- COLLINS, John C. Light-cone Variables, Rapidity and All That [hep-ph/9705393](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9705393)