Segunda lista de exercícios de Física Experimental I A

Profs. Roberto da Silva, Agenor Heintz, Magno Machado, Mendeli H. Vainstein, Mario Baibich
(Dated: 06/06/2016)

Questão 1: Considere o experimento sobre a medida do periodo do pêndulo. Mostre que a equação que rege a dinâmica de um pêndulo simples é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Depois, mostre que para $\sin\theta \approx \theta$, $\theta(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ é solução da equação acima apenas se

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Desta forma conclua que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Questão 2: (**Um pouco de teoria no laboratório: Três formas de calcular a constante da mola, são eles compatíveis?**)

Supondo que os seguintes pontos experimentais $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ descrevem o comportamento linear $y = ax + b$. Do ponto de vista estatístico, o que se supõe é que cada y_i é uma variável aleatória que se distribui de acordo com uma distribuição normal em torno do valor médio $\overline{y}_i = ax_i + b$, cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i})^2}$$

em outras palavras, estamos dizendo que a distribuição dos erros (diferença entre o valor experimental y_i e a reta ajustada $ax_i + b$) segue uma distribuição de Gauss.

Assim podemos dizer que a probabilidade de medir um conjunto $y_1, ..., y_n$ é descrita pela densidade de probabilidade conjunta:

$$L(a,b) = f(y_1)f(y_2)...f(y_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i})^2}$$

onde $L(a,b)$ é conhecido na literatura como estimador de máxima verossimilhança. O que se supõe do método é que a e b devem ser escolhidos a maximizar esse funcional de máxima verossimilhança ou de uma forma mais fácil, o seu logaritmo porque maximizar L ou seu ln em função de a e b significa a mesmo do ponto de vista matemático.

Assim os coeficientes da reta ajustada vem através da exigência:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0 \text{ e } \frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0$$

o que conduz à:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial a}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i})^2 &= 0 \\ \tfrac{\partial}{\partial b}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i})^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Agora perceba que $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i})^2$, lê-se qui-quadrado, mede uma espécie de distância entre o ponto experimental e a reta ajustada levando em conta que quanto maior a incerteza menor o peso do desvio quadrático em questão. Ou seja encontrar os coeficientes a e b que maximizam a probabilidade é o mesmo que encontrar os coeficientes a e b que minimizam a soma de diferenças quadráticas χ^2. Resolvendo a equação acima temos respectivamente para os coeficientes angular e linear:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Delta}(S_\sigma S_{xy} - S_x S_y) \\ b &= \frac{1}{\Delta}(S_{x^2} S_y - S_x S_{xy}) \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\Delta = S_\sigma S_{x^2} - S_x^2$ e

$$\begin{aligned} S_\sigma &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2},\ S_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2},\ S_{x^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, \\ S_y &= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \text{ e } S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}. \end{aligned}$$

Considerando a fórmula para propagação de erros para o coeficiente a e b:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 \\ \sigma_b^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_i^2 \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que $\sigma_a^2 = \frac{S_\sigma}{\Delta}$ e $\sigma_b^2 = \frac{S_{x^2}}{\Delta}$. Um caso particular é quando as incertezas são consideradas todas iguais, isto é

$$\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \sigma$$

Neste caso temos a simplicação:

$$\begin{aligned} S_\sigma &= n,\ S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ S_{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \\ S_y &= \sum_{i=1}^{n} y_i \text{ e } S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{aligned}$$

Neste caso $\sigma_a^2 = n\frac{S_\sigma}{\Delta}$ e $\sigma_b^2 = \frac{S_{x2}}{\Delta}\sigma^2$ e os coeficientes continuam sendo dados pela Eq. 2. O Sci-davis por exemplo é um software que faz esse trabalho ou você pode implementar essas equações em qualquer linguagem de programação.

Neste caso o que ele usa como σ^2 é variância dos pontos considerando que o desvio padrão dos pontos em relação ao seu valor esperado (a reta ajustada)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$$

Assim considerando o experimento sobre a lei de Hooke como o do experimento para o estudo da conservação da energia considerou os seguintes dados:

$\Delta x(cm)$	$\Delta m(kg)$
$6,7$	$0,02$
$10,2$	$0,03$
$13,6$	$0,04$
$17,1$	$0,05$
$20,5$	$0,06$
$23,8$	$0,07$

Desta forma pede-se as seguintes maneiras para calcular a constante de mola k :

a) Faça um ajuste linear de $g \times (\Delta m)_i$ versus $(\Delta x)_i$ considerando o caso de incertezas iguais e determine o valor de k (coeficiente angular) e sua incerteza.

b) Faça um cálculo alternativo. Para cada uma das medidas: $k_i = \frac{g \times (\Delta m)_i}{(\Delta x)_i}$. Obtenha então como estimativa final

$$\langle k \rangle = \frac{k_1 + ... + k_6}{6}$$

e respectiva incerteza (desvio padrão da média)

$$\sigma_{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{(k_1 - \langle k \rangle)^2 + ... + (k_6 - \langle k \rangle)^2}{6 \times 5}}$$

c) Uma alternativa interessante é considerar a incerteza propagada em cada k_i calculado no item b) via propagação, isto é sendo $k_i = \frac{g \times (\Delta m)_i}{(\Delta x)_i}$, temos $\sigma^2_{k_i} = k_i^2 \left(\frac{\sigma_g^2}{g^2} + \frac{\sigma^2_{(\Delta m)_i}}{(\Delta m)_i^2} + \frac{\sigma^2_{(\Delta x)_i}}{(\Delta x)_i^2} \right)$, então podemos calcular k a partir dos coeficientes calculados para cada caso levando em conta os pesos em cada caso:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2_{k_i}} k_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2_{k_i}}}$$

onde a incerteza em k pode ser estimada por

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2_{k_i}}}$$

Calcule k e σ_k e compare com os casos anteriores.

Obs: Use $g = 9,795 \pm 0,003$ determinado especificamente para o Campus do Vale pelo prof. Lang com um experimento baseado no método de Kater.

Questão 3 (Movimento em plano inclinado desprezando atrito)

A seguinte tabela:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t_i\,(s)$	0	$\frac{3}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{21}{60}$	$\frac{24}{60}$	$\frac{27}{60}$	$\frac{30}{60}$
$t_i\,(s)$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
v_i (cm/s)	16,1	26,6	31,0	42,6	47,5	52,0	64,3	71,8	73,9	83,2	88,5
σ_i (cm/s)	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5

Mostra os resultados experimentais correspondentes ao movimento de queda de um corpo de massa m no chamado trilho de ar. Num trilho de ar, o corpo pode mover-se com atrito de escorregamento desprezível, devido a uma camada de ar comprimido entre o trilho e a base do corpo. O trilho é inclinado em relação à horizontal por um ângullo $\theta = 10,00^0 \pm 0,10^0$. O registro do tempo é feito por meio de faíscas em papel encerado, sendo que o faiscador funciona na frequência da rede elétrica (60 Hz). Assim as faíscas ocorrem a cada 1/60 s. A velocidade é calculada a cada intevalo de tempo igual a (3/60) s, isto é, a cada 3 faíscas.

Determine g e sua incerteza neste experimento

Sugestão: Utilize a fórmula do ajuste para incertezas distintas descrita na questão 2. Você pode utilizar o Sci-Davis ou qualquer outro software.