Medições indiretas e propagação da incerteza

Medições indiretas

Os instrumentos de medida realmente necessários em um laboratório de mecânica são poucos. Porém, munidos de uma trena, um cronômetro e uma balança, é possível realizar diversas medições. Isso ocorre porque as grandezas físicas estão relacionadas umas às outras e podemos inferir uma a partir das medidas de outras.

É muito comum realizarmos medições indiretas. Por exemplo, podemos determinar a velocidade média de um corpo dividindo seu deslocamento pelo intervalo de tempo correspondente. Da mesma maneira, é possível calcular a densidade de peças metálicas dividindo sua massa (medida com uma balança) pelo seu volume (medido com régua e paquímetro).

A realização de uma medição indireta sempre supõe um modelo matemático que descreva a relação entre as grandezas envolvidas. No contexto desta disciplina, não estamos interessados em qualquer tipo de modelo matemático, mas somente naqueles que resultam de pressupostos físicos. Por exemplo, considere que desejamos determinar a aceleração da gravidade usando um pêndulo. Nesse caso, é possível deduzir das leis de Newton (acrescentados alguns pressupostos específicos) que, para um pêndulo simples, vale a seguinte relação:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nessa equação, T é o período do pêndulo, l é o comprimento e g é a aceleração local da gravidade. Isolando a aceleração da gravidade na expressão, obtém-se:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Assim, é possível determinar a aceleração local da gravidade com um pêndulo, medindo-se o comprimento do pêndulo (com uma trena, por exemplo) e seu período de oscilação (com um cronômetro digital). Isso é um exemplo do que chamamos medição indireta.

Modelo matemático: Grandezas de entrada e de saída.

Como já foi antecipado, todas as medições indiretas supõem um modelo matemático, ou seja, uma relação matemática que permita determinar o valor de uma grandeza desconhecida a partir dos valores de outras grandezas conhecidas[11]. As grandezas conhecidas – cujos valores são inseridos no modelo matemático – são chamadas grandezas de entrada. A grandeza cujo valor se obtém a partir das grandezas de entrada é chamada grandeza de saída (JOINT COMMITEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a). A relação entre grandezas de entrada e grandezas de saída em uma medição indireta encontra-se representada genericamente na Figura 8.

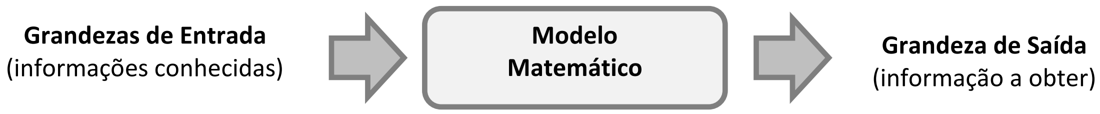

Figura 8. Representação da relação entre grandezas de entrada e grandezas de saída em uma medição indireta.

No exemplo do pêndulo simples – em que desejamos determinar a aceleração local da gravidade – o período T e o comprimento l (que podem ser determinados com trena e cronômetro) são grandezas de entrada. A aceleração da gravidade g, por sua vez, é a grandeza de saída.

Considere que estamos diante de um pêndulo com $(1{,}000 \pm 0{,}005)m$ de coprimento e $(2{,}00 \pm 0{,}01)s$ de período[12]. Substituímos as melhores estimativas das grandezas de entrada $\bar{l} = 1{,}000\, m$ e $\bar{T} = 2{,}00\, s$ no modelo matemático para obter a melhor

[11] Em mecânica experimental, estamos interessados particularmente nos modelos matemáticos que representam modelos científicos dos fenômenos mecânicos. Em outro texto de apoio, discutimos como relações matemáticas podem ser deduzidas das leis da física e como o conceito de modelo é fundamental para se compreender um pouco melhor a relação entre teoria e experimento. Assim, além da dimensão metrológica (discutida no presente texto de apoio), há uma dimensão filosófica (epistemológica) muito importante no conceito de modelo (que será apresentada cuidadosamente em um momento mais oportuno).

[12] Esses valores são fictícios.

estimativa da grandeza de saída: $\bar{g} = 4\pi^2\bar{l}/\bar{T}^2 = \pi^2 \cong 9{,}87\ m/s^2$. Enfim, tendo estimado a aceleração da gravidade, resta uma questão que não podemos deixar escapar: Como é possível avaliar a incerteza do resultado obtido?

Propagação da incerteza

Nenhum procedimento experimental é completamente confiável e sempre há alguma incerteza associada aos valores das grandezas experimentais. Assim, todas as grandezas de entrada – desde que sejam obtidas experimentalmente – possuem alguma incerteza. Portanto, a grandeza de saída deve possuir alguma incerteza também! Essa repercussão da incerteza das grandezas de entrada sobre a incerteza da grandeza de saída é chamada propagação da incerteza. A saber, o Guia para Expressão da Incerteza da Medição (JOINT COMMITEE FOR GUIDES IN METROLOGY, 2008a) propõe a seguinte lei de propagação das incertezas:

A incerteza se propaga das grandezas de entrada para a grandeza de saída

Considere o seguinte modelo matemático genérico que relacione uma grandeza de saída y às grandezas de entrada $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$:

$$\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$$

Seja $\bar{x}_i$ a melhor estimativa da *i*-ésima grandeza de entrada e $u(x_i)$ sua incerteza de medição. Assumindo que a correlação entre as *n* grandezas de entrada pode ser desprezada e que o modelo matemático $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é aproximadamente linear na região de interesse, é possível estimar a incerteza $u(y)$ da grandeza de saída pela seguinte lei de propagação:

$$u^2(\mathrm{y}) \cong \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2 u^2(x_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^2 u^2(x_2) + \cdots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^2 u^2(x_n)$$

Não se preocupe em tentar compreender todos os detalhes do fragmento em destaque. Como é possível perceber, a formulação rigorosa da lei de propagação da incerteza envolve ferramentas matemáticas que não costumam ser dominadas por calouros dos cursos de ciências e engenharia. Por essa razão, tal lei de propagação é tradicionalmente omitida na maioria dos textos para laboratório de mecânica. Em seu lugar, são apresentados procedimentos alternativos para estimar a incerteza da medição. A saber, há três tipos de procedimentos alternativos[13] e todos eles são apresentados neste livro:

1. **Memorizar equações tabeladas.** A maneira mais usual de evitar a apresentação da lei de propagação é fazer com que os alunos memorizem uma pequena tabela com leis de propagação específicas para operações básicas (ver Apêndice 02).
2. **Resolver a lei numericamente.** Como alternativa à memorização de equações tabeladas, apresentamos no Apêndice 01 um procedimento numérico que tem a vantagem de poder ser discutido e compreendido pelos estudantes.
3. **Pedir ajuda ao professor.** A mais elementar de todas as alternativas é pedir que o professor resolva a lei de propagação de incerteza todas as vezes em que for necessário utilizá-la.

Por ser o mais simples de todos, o terceiro procedimento será apresentado neste texto de apoio. Os outros dois são discutidos nos Apêndices 01 e 02.

De volta ao exemplo: O pêndulo simples

Com a ajuda do professor, calcular a incerteza propagada é extremamente simples! A propósito, a lei propagação da incerteza, aplicada ao modelo matemático $g = 4\pi^2 l/T^2$, fornece:

$$u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{\bar{T}^2}\right]^2 u^2(l) + \left[4\pi^2 \frac{2\bar{l}}{\bar{T}^3}\right]^2 u^2(T)$$

Sem nos deixar intimidar pela aparente complexidade dessa equação, substituímos nela: (1) as melhores estimativas $\bar{l} = 1{,}000\ m$ e $\bar{T} = 2{,}00\ s$; e (2) as incertezas de medição $u(l) = 0{,}005\ m$ e $u(T) = 0{,}01\ s$ das grandezas de entrada. Com isso, obtemos:

$$u^2(g) \cong \left[4\pi^2 \frac{1}{2{,}00^2}\right]^2 0{,}005^2 + \left[4\pi^2 \frac{2\cdot 1{,}000}{2{,}00^3}\right]^2 0{,}01^2 \cong \pi^4 \cdot 0{,}005^2 + \pi^4 \cdot 0{,}01^2$$

$$\therefore u(g) \cong \sqrt{\pi^4 \cdot 0{,}005^2 + \pi^4 \cdot 0{,}01^2} \cong 0{,}1103\ m/s^2$$

[13] Pergunte ao seu professor qual dos três procedimentos ele deseja adotar.

Enfim, arredondando $u(g)$ para apresentar somente um algarismo não-nulo e arredondando $\bar{g}$ para apresentar a mesma quantidade de algarismos após a vírgula que $u(g)$, temos que a aceleração local da gravidade pode ser expressa por $(9{,}9 \pm 0{,}1)\, m/s^2$. Ou seja, no nosso exemplo, o valor (verdadeiro) da aceleração local da gravidade provavelmente pertence ao intervalo de 9,8 m/s^2 a 10,0 m/s^2.

Interpretando a lei de propagação

Ao realizar uma propagação da incerteza devemos ser capazes de interpretar o que estamos fazendo. Independente do procedimento alternativo utilizado, a propagação de incerteza deve sempre fornecer uma soma de termos ao quadrado tal como representado esquematicamente a seguir:

$$u^2(\mathrm{y}) \cong \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2 u^2(x_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^2 u^2(x_2) + \cdots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^2 u^2(x_n)$$

$$u^2(\mathrm{y}) \cong \square^2 u^2(x_1) + \bigcirc^2 u^2(x_2) + \cdots + \triangle^2 u^2(x_n)$$

Assim, ignorando os detalhes da lei de propagação, percebemos que ela é, em essência, uma soma de termos ao quadrado. Nessa soma, somente o primeiro termo depende da incerteza $u(x_1)$, somente o segundo termo depende de $u(x_2)$ e, assim, sucessivamente. Dessa maneira, analisando a propagação termo a termo, é possível identificar qual das grandezas de entrada contribui mais para a incerteza da grandeza de saída.

No exemplo do pêndulo simples, obtivemos, como passo intermediário, a relação $u^2(g) \cong \pi^4 \cdot 0{,}005^2 + \pi^4 \cdot 0{,}01^2$. Nela, o primeiro termo carrega a incerteza do comprimento $u(l) = 0{,}005\, m$ enquanto o segundo termo carrega a incerteza do período $u(T) = 0{,}01\, s$. Como é possível perceber, o segundo termo (referente ao período) é o maior responsável pela incerteza $u(g)$. Enfim, no exemplo em questão, se desejássemos obter um resultado mais confiável para a aceleração local da gravidade, seria mais urgente investir em uma medição mais confiável do período do pêndulo.