

## **A avaliação da incerteza do tipo A**

### **Incerteza e flutuação estatística**

Quando realizamos uma série de observações do mesmo mensurando sob as mesmas condições, podemos obter resultados diferentes. Essa variabilidade dos resultados das medições é chamada flutuação estatística e, em geral, é resultado de fatores que não conseguimos (ou não desejamos) controlar experimentalmente<sup>6</sup>. Em um processo de medição cuidadoso, vários fatores podem ser controlados ou eliminados, porém, como esse controle é imperfeito, o resultado da medição geralmente estará sujeito a alguma variabilidade.

Além disso, a presença de flutuações estatísticas está relacionada à precisão da medição.

Medidas mais precisas flutuam menos e medidas menos precisas flutuam mais. Assim, a variabilidade está relacionada

**Medidas muito variáveis são medidas pouco confiáveis.**

à confiabilidade. Medidas muito variáveis são medidas pouco confiáveis. Enfim, quando realizamos uma avaliação da confiabilidade do resultado de uma medição a partir das flutuações estatísticas observadas, estamos realizando uma avaliação da incerteza do tipo A.

### **Descrevendo e condensando um conjunto de dados**

A avaliação da incerteza do tipo A geralmente é um processo bastante rápido e simples. Porém, para entendermos realmente o que estamos fazendo, é necessário conhecer algumas ferramentas estatísticas utilizadas para descrever e condensar conjuntos de dados. São elas: (1) Tabelas de distribuição de frequências, (2) Histogramas, (3) Média e (4) Desvios padrão.

---

<sup>6</sup> Em texto de apoio anterior, intitulado “Incerteza e Algarismos Significativos”, vimos um exemplo bastante ilustrativo dessa situação. Nele, desejávamos avaliar o alcance de um projétil lançado horizontalmente com velocidade  $v$  a partir de uma altura  $h$  conhecida. Apesar de os parâmetros mais importantes (velocidade, altura, ângulo de lançamento e aceleração da gravidade) serem mantidos aproximadamente constantes, o projétil atingiu o solo em posições bastante diferentes após cada lançamento (veja Figura 5). A variabilidade observada para o alcance em cada lançamento ilustra a chamada *flutuação estatística*.

### **Um exemplo: Determinação da aceleração local da gravidade**

Para compreendermos essas ferramentas, considere o caso do professor Fernando, que desejava determinar experimentalmente a aceleração local da gravidade. Imbuído de extrema paciência, ele lançou um corpo massivo a partir do repouso 396 vezes! Em cada lançamento, ele mediu o tempo de queda do corpo com um cronômetro esportivo. A partir do tempo de queda e da altura de lançamento, que era conhecida, foi possível estimar um valor para a aceleração local da gravidade em cada lançamento.

Como o cronômetro esportivo é operado manualmente, o tempo de queda observado em cada lançamento dependerá muito do tempo de reação do sujeito que realiza a medição. Eventualmente, a medida do tempo de queda subestimar o tempo de queda real. Em outras observações, o tempo de queda medido será superior ao real. Isso ocorre porque (tanto no início quanto no fim do movimento) o operador do cronômetro está sujeito a antecipar-se ou atrasar-se ao movimento real que está observando. Em geral, os instantes em que ele pressiona os botões do cronômetro não coincidem exatamente com os instantes de início e término do movimento de queda.

Não é difícil demonstrar que, em um movimento de queda livre, a aceleração da gravidade  $g$  pode ser determinada a partir da altura  $h$  e tempo de queda  $t$  a partir da expressão  $g = 2h/t^2$ . Portanto, quando o tempo de queda observado for maior que o tempo de queda verdadeiro, a aceleração da gravidade será subestimada; quando o tempo de queda for menor que o tempo verdadeiro, a aceleração da gravidade será superestimada. Enfim, o primeiro problema que precisamos resolver é o de visualizar e analisar os 396 valores obtidos para a aceleração local da gravidade!

### **A tabela de distribuição de frequências**

Em primeiro lugar, vamos observar a Tabela de distribuição de frequências (Tabela 3).

Ela deve ser lida da seguinte maneira: o valor  $g = 17,1 \text{ m/s}^2$  foi obtido duas vezes; o

valor  $g = 16,2 \text{ m/s}^2$  foi obtido uma vez; o valor  $g = 15,3 \text{ m/s}^2$  foi obtido uma vez...

A Tabela 3 também permite afirmar que os valores mais frequentes foram  $g = 10,2 \text{ m/s}^2$  e  $g = 9,4 \text{ m/s}^2$ , com 38 ocorrências.

Como é possível perceber, a Tabela de distribuição de frequências já é uma maneira bastante condensada de apresentar os dados obtidos. Imagine o que aconteceria se fôssemos listar aqui cada observação individualmente! Seria necessária uma tabela com 396 entradas e nós dificilmente teríamos uma boa visualização de quais valores são mais frequentes e quais ocorrem mais raramente. Assim, quando estamos trabalhando com um conjunto grande de observações em que alguns valores se repetem, é interessante trabalhar com uma tabela de distribuição de frequências.

**Tabela 3.** Tabela de distribuição de frequências para os resultados de 396 observações da aceleração da gravidade.

$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	Frequência
17,1	2
16,2	1
15,3	1
14,5	7
13,7	10
13,0	27
12,4	21
11,8	25
11,2	33
10,7	21
10,2	38
9,8	32
9,4	38
9,0	27
8,6	31
8,2	21
7,9	8
7,6	15
7,3	16
7,0	7
6,8	5
6,5	2
6,3	2
6,1	1
5,9	3
5,5	2

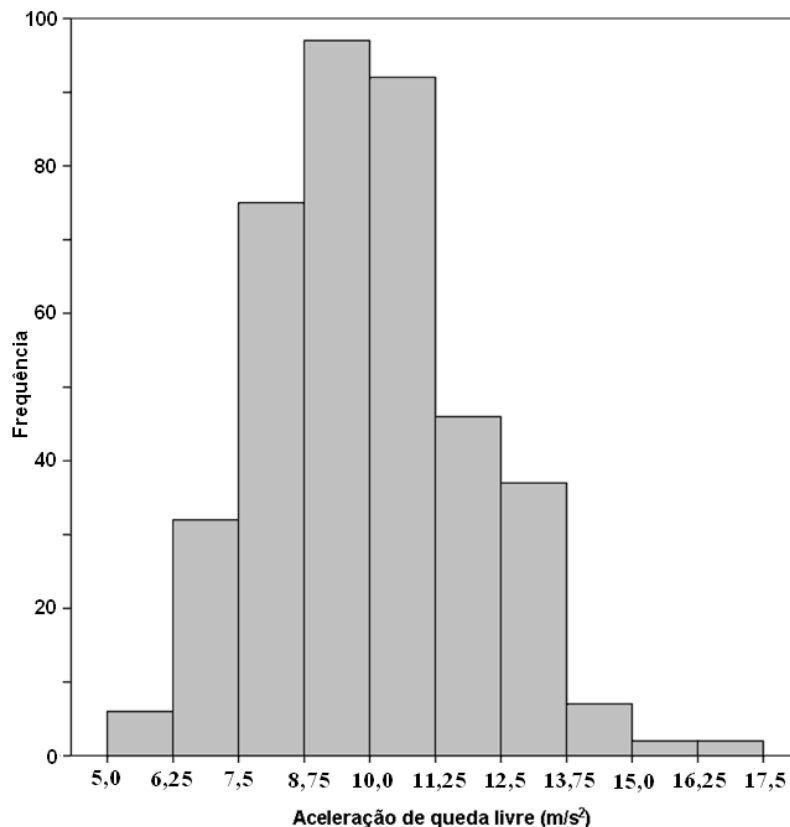
## Histogramas

Outra ferramenta importante para condensar um conjunto de dados é o Histograma, que é basicamente um gráfico de barras que permite uma visualização dos dados ainda mais

condensada que a Tabela de distribuição de frequências. A saber, o primeiro passo para a elaboração de um histograma é definir intervalos (geralmente de mesma largura) para agrupar os dados. No presente exemplo, foram escolhidos intervalos com  $1,25 \text{ m/s}^2$  de largura a partir do valor  $g = 5,0 \text{ m/s}^2$ . O resultado pode ser visualizado no Gráfico 1.

O Histograma representado no Gráfico 1 deve ser lido da seguinte maneira: No universo das 396 observações de  $g$ , menos de 10 observações ocorreram entre  $5,0 \text{ m/s}^2$  e  $6,25 \text{ m/s}^2$ ; um pouco mais de 30 observações ocorreram entre  $6,25 \text{ m/s}^2$  e  $7,5 \text{ m/s}^2$ ; aproximadamente 95 observações ocorreram no intervalo de  $7,5 \text{ m/s}^2$  a  $8,75 \text{ m/s}^2$ ...

**Gráfico 1.** Histograma representando graficamente os dados apresentados na Tabela de distribuição de frequências (Tabela 3).



Como é possível perceber, o Histograma privilegia observar que os valores de aceleração da gravidade obtidos encontram-se, mais frequentemente, entre  $7,5 \text{ m/s}^2$  e  $11,25 \text{ m/s}^2$ . Igualmente, o Histograma sugere que, apesar da grande dispersão dos

valores obtidos para a aceleração da gravidade, a média desses valores deve estar próxima a  $10,0 \text{ m/s}^2$ .

### **Média e Desvio padrão dos dados**

Uma maneira ainda mais condensada de representar um conjunto de dados é a Média dos dados e o Desvio padrão dos dados. Sobre a média, não há mistério. Ela resulta da soma de todos os dados obtidos, dividida pelo número de dados. Geralmente, a média de uma grandeza é representada com um traço sobre o símbolo usado para representar a variável (ex.: a média dos valores da variável  $g$  é representada por  $\bar{g}$ ). A seguir, indicamos como calcular a média dos  $n$  valores (com  $n = 396$ ) atribuídos por Fernando à aceleração local da gravidade<sup>7</sup>:

$$\bar{g} = \frac{g_1 + g_2 + \dots + g_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{n}$$

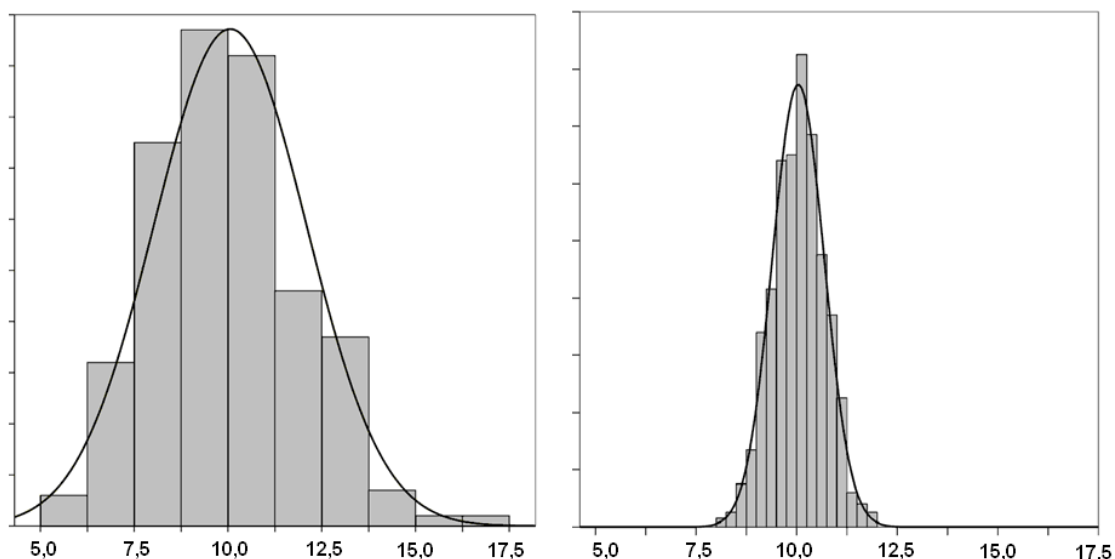
No caso do experimento conduzido por Fernando, o valor médio obtido para a aceleração da gravidade foi  $\bar{g} = 10,0 \text{ m/s}^2$ . Por outro lado, você deve concordar que, se informamos somente o valor médio das observações de Fernando, estamos omitindo uma informação muito importante: a variabilidade das suas observações. Em um histograma, a variabilidade está relacionada à largura da distribuição. Quanto mais larga for a distribuição, quanto mais dispersos estiverem os dados, maior é sua variabilidade. O Gráfico 2 representa bem essa questão. Como é possível perceber, o histograma da direita é mais estreito que o histograma da esquerda.

---

<sup>7</sup> Quando temos em mãos uma Tabela de distribuição de frequências (Tabela 3), calcular a média de uma variável fica um pouco mais simples. Em vez de fazer uma soma de todas as  $n$  observações (no caso,  $n = 396$ ), fazemos uma soma sobre cada linha da tabela. Seja  $f_k$  a frequência do  $k$ -ésimo valor distinto que a variável  $g$  assume. Seja também  $m$  o número de linhas da Tabela de distribuição de frequências. Em outras palavras, seja  $m$  o número de valores distintos que a variável  $g$  assume nessa tabela. Nesse caso, você deve ser capaz de demonstrar que o valor médio  $\bar{g}$  também pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\bar{g} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_m g_m}{f_1 + f_2 + \dots + f_m} = \frac{\sum_{k=1}^m f_k g_k}{\sum_{k=1}^m f_k}$$

**Gráfico 2.** Comparação entre dois histogramas com valor médio igual a 10,0 e diferentes variâncias. Como é possível perceber, o histograma da direita é mais estreito. Portanto, a variabilidade dos seus dados é menor.



Para avaliar essa dispersão (ou seja, para avaliar o quanto o conjunto dos dados está afastado da média) usamos uma quantidade muito importante chamada desvio padrão.

**O desvio padrão é uma medida da variabilidade de uma série de medidas.**

O desvio padrão é uma maneira de medir a variabilidade de um conjunto de dados. Quanto maior for a flutuação estatística dos dados, quanto maior for sua imprecisão, maior será o desvio padrão. Assim, o desvio padrão é um elemento-chave na avaliação da confiabilidade de dados experimentais.

Enfim, o Desvio padrão dos dados é definido pela seguinte expressão<sup>8</sup>:

$$S_g = \sqrt{\frac{(g_1 - \bar{g})^2 + (g_2 - \bar{g})^2 + \dots + (g_n - \bar{g})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (g_i - \bar{g})^2}{n - 1}}$$

Observe que, como o desvio padrão resulta de uma soma de diferenças elevadas ao quadrado, ele sempre será positivo. Igualmente, como ele resulta da raiz quadrada de

<sup>8</sup> Igualmente, você deve ser capaz de demonstrar que o Desvio padrão dos dados pode ser obtido a partir de uma Tabela de distribuição de frequências pela seguinte expressão:

$$S_g = \sqrt{\frac{f_1(g_1 - \bar{g})^2 + f_2(g_2 - \bar{g})^2 + \dots + f_m(g_m - \bar{g})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_m - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m f_k(g_k - \bar{g})^2}{(\sum_{k=1}^m f_k) - 1}}$$

uma soma de termos ao quadrado, o desvio padrão preserva sempre a mesma unidade em que são expressos os dados (no caso dos dados coletados pelo professor Fernando, unidades de aceleração).

Apesar de não possuírem o mesmo apelo gráfico do Histograma, a média e o desvio padrão são geralmente informações mais fáceis de obter e são suficientes para especificarmos os valores que podem ser razoavelmente atribuídos a uma grandeza física. No exemplo do professor Fernando, encontrou-se o seguinte valor para o desvio padrão dos dados:  $S_g = 2,0 \text{ m/s}^2$ . A partir dessa informação, é razoável esperar que os dados estejam bastante condensados no intervalo de  $\bar{g} - S_g$  a  $\bar{g} + S_g$ . Com efeito, observa-se, a partir do Histograma (Gráfico 1), que uma fração importante dos valores atribuídos a  $g$  encontra-se entre  $8,0 \text{ m/s}^2$  e  $12,0 \text{ m/s}^2$ . Ou seja, é razoável esperarmos, ao realizar outra medição individual sob as mesmas condições, que o próximo valor observado de  $g$  ocorra entre  $8,0 \text{ m/s}^2$  e  $12,0 \text{ m/s}^2$ . Esse intervalo pode ser representado de maneira compacta por  $(10 \pm 2) \text{ m/s}^2$ .

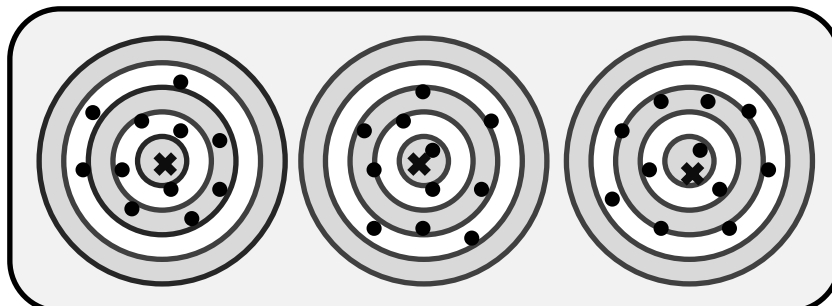
### **A redução da variabilidade**

Como é possível perceber, tomadas individualmente, as observações feitas pelo professor Fernando são muito dispersas, pouco precisas, pouco confiáveis. Porém, uma maneira de melhorar a confiabilidade do resultado de uma medição é tomar por resultado a média de uma série de observações. Esse procedimento reduz as flutuações estatísticas, pois a média de uma série de observações experimentais sempre flutua menos que as observações individuais.

<b>O resultado de uma medição será, preferencialmente, a média de uma série de observações.</b>
---

A Figura 6 representa três séries de observações imprecisas. Como é possível perceber, individualmente, as observações estão distantes do centro do alvo (que representa o valor verdadeiro do mensurando). Entretanto, se calcularmos o valor médio em cada

uma dessas séries de observações, perceberemos que essas médias são muito mais confiáveis (estão geralmente mais próximas ao valor verdadeiro e flutuam menos) que as observações individuais.



**Figura 6.** Os pontos pretos representam três rajadas de projéteis imprecisamente lançados contra cada alvo. As marcações em forma de “x” representam as médias das posições dos pontos atingidos por cada rajada de tiro. Como é possível perceber, apesar da imprecisão da rajada, as posições das médias tendem a ocorrer próximas ao centro do alvo. Isso ilustra por que motivo as médias tendem a ser mais confiáveis que observações individuais quando desejamos estimar o valor de um mensurando.

Assim, como existe um desvio padrão dos dados (que quantifica a dispersão desses dados em torno da média), podemos definir um desvio padrão da média, que quantifica a variabilidade dessa média. Enfim, é

**O desvio padrão da média é uma medida da variabilidade dessa média.**

possível demonstrar que o desvio padrão da média  $S_{\bar{g}}$  se relaciona com o desvio padrão dos dados  $S_g$  pela seguinte expressão:

$$S_{\bar{g}} = \frac{S_g}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (g_i - \bar{g})^2}{n(n-1)}}$$

No caso do experimento do professor Fernando, como o desvio padrão dos dados resultou  $S_g = 2,0 \text{ m/s}^2$ , com  $n = 396$ , temos  $S_{\bar{g}} = 2,0/\sqrt{396} \cong 0,1 \text{ m/s}^2$ . Portanto, é razoável esperar que, se o professor Fernando repetisse todas as 396 observações



novamente, a média das outras 396 observações ocorrerá dentro do intervalo que vai de  $9,9 \text{ m/s}^2$  a  $10,1 \text{ m/s}^2$ . Esse intervalo pode ser representado de maneira compacta por  $(10,0 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$ .

### **A distribuição normal ou Gaussiana**

A essas alturas é razoável que você esteja um pouco apavorado: Será que a avaliação da incerteza do tipo A sempre requer a realizar centenas de observações?! Evidentemente, o procedimento adotado pelo professor Fernando não é a melhor maneira de estimar a aceleração da gravidade. Em situações reais de laboratório, nós dificilmente realizaríamos tantas observações de uma grandeza. Em geral, o que fazemos é imaginar como deveria ser a distribuição de frequências para a grandeza que estamos observando. Ou seja, imaginamos qual histograma deveríamos obter se tivéssemos feito algumas centenas de medidas, mas quase nunca realizamos tantas observações!

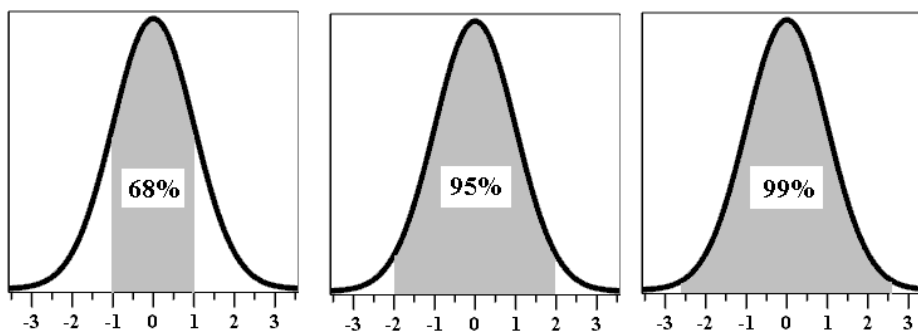
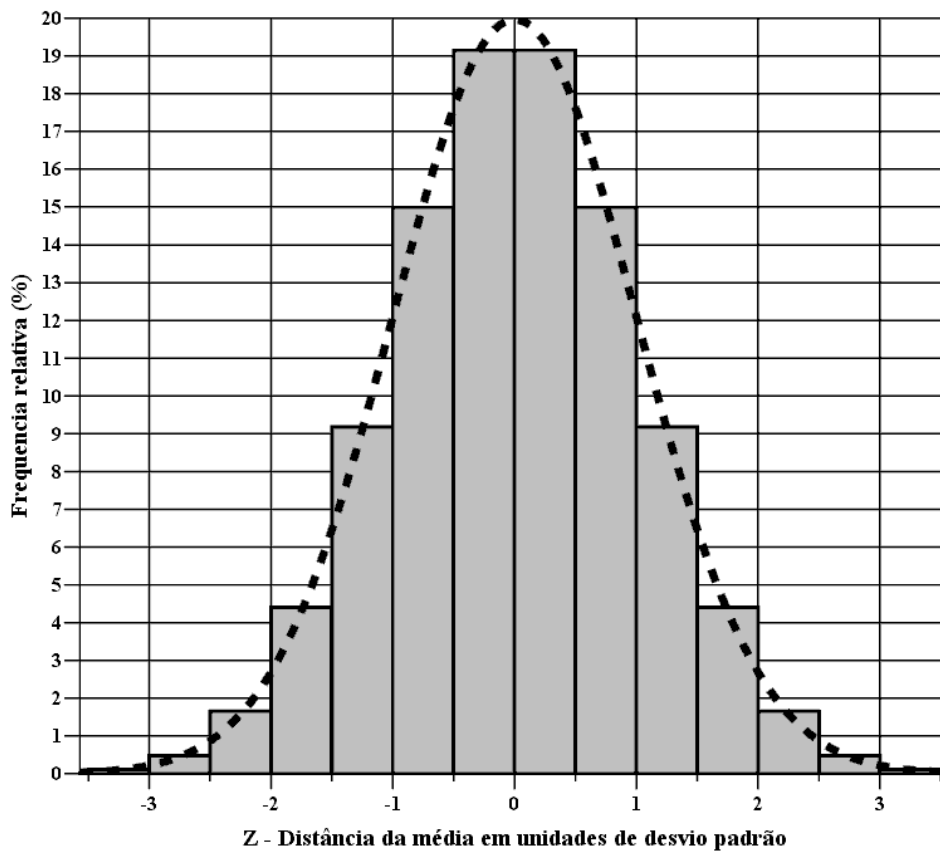
Para imaginar distribuições de frequência sem realizar centenas de observações repetidas, nós lançamos mão de distribuições consagradas na literatura e para as quais é razoável admitir que nossos dados pertençam. Dentre elas, a mais importante é a distribuição normal (também chamada distribuição gaussiana) que se encontra representada no Gráfico 3. Como é possível perceber a partir desse gráfico, a distribuição normal é suave e simétrica. Ela possui uma “forma de sino”, decrescendo rapidamente na medida em que nos afastamos de sua região central.

A distribuição normal é importante especialmente pelo seguinte motivo. O resultado de uma série de observações repetidas é preferencialmente a média dessa série de observações. Por outro lado, para um número suficientemente grande de observações, o conjunto das médias dessas observações se distribui de acordo com a distribuição normal. Por isso, é usual pressupormos que estamos lidando sempre com variáveis normalmente distribuídas. Para exemplificar essa situação, observe as semelhanças

entre o Histograma de uma distribuição gaussiana (Gráfico 3) e os histogramas representados no Gráfico 2.

Enfim, é muito raro que se faça um histograma de observações experimentais. Como geralmente podemos pressupor que estamos lidando com uma distribuição gaussiana, basta conseguirmos avaliar a média e seu desvio padrão dessa distribuição para termos uma boa ideia de como é o conjunto dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos à grandeza que estamos medindo.

**Gráfico 3.** Histograma representando uma Distribuição gaussiana.



Além disso, sabemos que, para uma distribuição gaussiana, o intervalo  $(\bar{X} \pm S_X)$  compreende 68% da distribuição. Igualmente, o intervalo  $(\bar{X} \pm 2S_X)$  compreende 95% da distribuição (vide Gráfico 3). Assim, assumindo que a distribuição dos valores de aceleração da gravidade encontrados pelo professor Fernando é aproximadamente normal. Sem olhar para os histogramas, podemos afirmar que: (1) se o professor Lang fizesse uma nova observação sob as mesmas condições, a chance de que o valor obtido se situe entre  $8,0 \text{ m/s}^2$  e  $12,0 \text{ m/s}^2$ , é de 68%; (2) se o professor Fernando realizasse outros 396 lançamentos, a média dos novos lançamentos deve ocorrer entre  $9,8 \text{ m/s}^2$  e  $10,2 \text{ m/s}^2$  com 95% de confiança.