APÊNDICE 02
Instruções para o professor

A lei de propagação da incerteza

Neste texto, deduzimos de maneira mais ou menos rigorosa a expressão da propagação da incerteza segundo o GUM. Nosso objetivo é demonstrar que o método para estimar a incerteza propagada apresentado neste livro é consistente com os pressupostos do GUM.

A esse respeito, considere que uma grandeza f é dependente do conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, \dots x_m\}$ pelo modelo matemático $f = f(x_1, x_2, \dots x_m)$. Sendo assim, f é a grandeza de saída e $\{x_1, x_2, \dots x_m\}$ são grandezas de entrada.

Considere que x_{ij} representa a i-ésima observação da j-ésima variável e que foram feitas n observações para cada uma das m variáveis de entrada. Assim, a cada conjunto $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{im}\}$ de valores observados corresponde um valor f_i tal que $f_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{im})$. Considere também que $\bar{f}$ representa a média desses valores. Nesse caso, dado que $u(f)$ pode ser calculado a partir do desvio padrão da média de f, podemos escrever:

$$u^2(f) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (f_i - \bar{f})^2$$

Sejam $\Delta x_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_j$ e $\Delta f_i = f_i - \bar{f}$. Com efeito, na medida em que as variações Δx_{ij} forem pequenas ao ponto do modelo matemático $f = f(x_1, x_2, \dots x_m)$ poder ser aproximado por uma reta em uma região que contenha essas variações, podemos substituir $f_i - \bar{f}$ na expressão anterior pelo termo de primeira ordem da série de Taylor. Com isso:

$$\Delta f_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_{ij} + O(\Delta x^2) \cong \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_{ij}$$

Substituindo este resultado na expressão para incerteza $u(f)$ obtemos:

$$u^2(f) \cong \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_{ij} \right]^2$$

$$u^2(f) \cong \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \Delta x_{ij}^2 + 2 \sum_{k>j}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \Delta x_{ij} \Delta x_{ik} \right]$$

Permutando os somatórios, obtemos:

$$u^2(f) \cong \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j) + 2 \sum_{k>j}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) cov(x_j, x_k)$$

Na expressão acima, $u^2(x_j)$ é o quadrado da incerteza de x_j, que denota a variância da média das observações da grandeza x_j. Igualmente, $cov(x_j, x_k)$ representa a covariância das médias das grandezas x_j e x_k. Enfim, se as grandezas de entrada podem ser consideradas descorrelacionadas, temos a forma mais simples da **lei de propagação da incerteza**:

$$u^2(f) \cong \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 u^2(x_j)$$

Como é possível perceber, essa forma da lei de propagação da incerteza carrega os seguintes pressupostos/aproximações: (1) a correlação entre grandezas de entrada pode ser desprezada; (2) o modelo matemático, na vizinhança de $\bar{f}$, é aproximadamente linear. Com efeito, esses são os mesmos pressupostos necessários para justificar o método prático apresentado em texto de apoio que, sem usar derivadas parciais explicitamente, permite estimar a incerteza na medida da grandeza de saída a partir das incertezas nas medidas das grandezas de entrada.

Também é possível perceber que a generalização dessa lei de propagação para casos em que efeitos não-lineares e de correlação são importantes pode ser feita acrescentando termos que correspondam às ordens superiores na expansão de Taylor ou que contenham correlações. Contudo, usando esse procedimento, o resultado $u^2(f)$ sempre será sempre aproximadamente igual a uma soma de termos. Por isso podemos dizer que o método do GUM para estimar a incerteza da medição não é um método exato, mas aproximado.