

O ESTUDO DE LOGARITMO POR MEIO DE UMA SEQÜÊNCIA DE ENSINO: A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO APOIO METODOLÓGICO

The study of logarithm through a teaching sequence: the didactic engineering as a methodological tool

Ronize Lampert Ferreira [ronizelampert@gmail.com]

Eleni Bisognin [eleni@unifra.br]

Centro Universitário Franciscano - UNIFRA

Rua dos Andradas, 1614

CEP:97010-032

Santa Maria - RS

Resumo

Sabe-se que a matemática é importante para se entender vários aspectos da vida real, por isso, explorá-la com aplicações em problemas práticos, envolvendo outras áreas do conhecimento, foi um dos objetivos desse trabalho. O interesse pela realização desta pesquisa está ligado a uma necessidade de reestruturação nos métodos de ensino de logaritmos, isto é, pela forma de apresentação deste conhecimento em um contexto que proporcione ao aluno um real sentido ao conteúdo que está sendo estudado. Neste artigo são relatados resultados de uma pesquisa que teve como propósito verificar a eficácia da utilização de uma seqüência didática, para o estudo de logaritmos, partindo de problemas relacionados com o cotidiano dos alunos e com o propósito de auxiliá-los a construir seus próprios conhecimentos. Esta seqüência foi aplicada em uma turma de primeira série do Ensino Médio e elaborada segundo as etapas da Engenharia Didática. As situações-problema elaboradas privilegiaram situações diversas, envolvendo várias áreas do conhecimento. Também foi utilizada a História da Matemática para mostrar a origem e evolução do conceito de logaritmo, e a utilização desse conceito na construção e aplicações de escalas logarítmicas na interpretação de fenômenos da natureza. As atividades da seqüência didática facilitaram não só a compreensão do conceito de logaritmo como a construção de gráficos, permitindo o desenvolvimento de competências para a interpretação e aplicabilidade da função logarítmica.

Palavras-chaves: seqüência de ensino; ensino e aprendizagem de matemática.

Abstract

It is widely known that Mathematics is important to understand the various aspects of the real life; therefore one of the objectives of this work was to explore it through the use of practical problems, involving other areas of knowledge. The interest to carry out this research is based on the need for a restructuring of the logarithm teaching methods, that is, a new way to present this subject in a context that allows the student to attribute meaning to what has been studied. In this article we present the results of a research that aimed to verify

the efficiency of using a didactic sequence in order to study logarithms, based on problems related to students' everyday life and aiming to help them build their own knowledge. This sequence was applied to a group of students belonging to the first year of a high school and it was carried out according to the stages of the Didactic Engineering. The problem situations that were developed emphasized varied situations, involving many areas of knowledge. It was also used the History of Mathematics to demonstrate the origin and evolution of the concept of logarithm, as well as the use of this concept in the making and the applications of logarithmic scales in the interpretation of natural phenomena. The activities of the didactic sequence made it easier not only the understanding of the concept of logarithm, but also the construction of graphs, allowing the development of competences for their interpretation, as well as the comprehension of the logarithmic function.

Keywords: teaching sequence, teaching and learning of mathematics.

Introdução

No decorrer de alguns anos de magistério, no ensino de Matemática observou-se que a maioria dos alunos da 1ª série do Ensino Médio apresentava dificuldades na compreensão do conceito de logaritmo, isto é, os alunos não entendiam o real significado do conceito de logaritmo e sua utilidade.

Na atividade escolar, no que se refere ao estudo de logaritmos e a aprendizagem de seu conceito, percebe-se que as dificuldades apresentadas devem-se ao fato de que, do ponto de vista da aquisição de um conhecimento, este não pode ser gerado a partir da definição algébrica, definição esta que muitas vezes é apenas memorizada. Apesar da importância do estudo de logaritmos, muitos alunos saem do Ensino Médio sem entendê-lo e nem sequer relacioná-lo com aplicações práticas e conhecidas, isto é, sem saber que a teoria dos logaritmos se aplica a muitos tipos de situações-problema, como por exemplo, a quantificação de níveis de intensidade sonora, a resolução de problemas envolvendo juros compostos, a medição do grau de acidez ou alcalinidade de uma solução química ou o uso da escala Richter na medição da intensidade de terremotos.

Percebe-se que, muitas vezes, a maneira como a matemática vem sendo trabalhada em sala de aula, os alunos não conseguem dar um sentido ao conteúdo que estudam.

Entre as diversas teorias pedagógicas, desenvolvidas nas últimas décadas, a teoria das situações didáticas de Brousseau (1986), tem sido usada amplamente, pois, ajuda a compreender melhor o fenômeno relativo ao ensino da matemática, e também por se tratar de uma teoria que considera as particularidades do saber matemático, isto é, observa e analisa segundo Freitas (1999, p.65), "as diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático ao aluno". Essa teoria preocupa-se com o ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula, abrangendo professor, alunos e o conhecimento matemático. Utilizou-se a teoria da situação didática, pois se acredita que, enquanto estratégia pedagógica para o ensino da matemática, num ambiente contextualizado, possa garantir aprendizagens que tenham significado para o aluno.

De acordo com Brousseau (1986), as situações didáticas são definidas como:

[...] um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor)

com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição (apud PARRA, C; SAIZ, I, 2001, p.28).

O interesse por essa teoria deve-se ao fato de que aborda aspectos específicos do saber matemático. Procura formas significativas de apresentar o conteúdo matemático, tendo a preocupação de apresentar o conhecimento dentro de um contexto que tenha significado para os alunos. No âmbito desta teoria as situações didáticas são organizadas pelo professor de maneira a despertar o interesse dos alunos em buscar soluções, utilizando seus próprios conhecimentos.

Nesse contexto acredita-se ser de grande importância à aprendizagem de conceitos, e a escola e os professores devem dar maior atenção a essa situação. Não se pode aceitar que a compreensão de um conceito possa ser concebida através de uma comunicação verbal, ou seja, não se pode restringir a aprendizagem dos alunos a uma memorização de fórmulas, regras e definições.

O sentido de um conceito, segundo Vergnaud é que:

Um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas. É nesse contexto que o aluno pode desenvolver sua compreensão do sentido inicial dos conceitos e teoremas matemáticos (apud PAIS, L, 2001, p.57).

Uma tarefa que cabe aos professores, é prever diversos caminhos para a aprendizagem dos conceitos, ou seja, planejar situações didáticas que permitam difundir a compreensão do conceito para o aluno, conforme Pais (2001). Quando os alunos chegam à escola, trazem consigo muitos conhecimentos, é o que é chamado de saber cotidiano e que, por sua vez, não podem ser desprezados. O grande desafio para o professor é organizar ou elaborar situações didáticas que possam contribuir na transposição didática, ou seja, na transformação do saber cotidiano para o saber escolar.

Nesse sentido faz-se necessário salientar, nesse contexto, as situações de aprendizagem nas quais os conceitos são elaborados pelos alunos. Hoje em dia, os alunos vivenciam as aulas conforme seu humor, sua disposição, sua capacidade de concentração, seu interesse, capacidade de relacionar o que sabem com outros saberes que já possuem. Pensar que se pode alcançar a todos os alunos de uma sala de aula com uma palestra é ilusão. O fato é que existem tantas situações distintas quanto alunos diferentes. Por isso, para um trabalho mais eficaz em sala de aula, faz-se necessário que os professores sejam capazes de organizar situações de aprendizagem. Organizar situações de aprendizagem significa pensar naqueles alunos que não conseguem aprender a matéria só ouvindo, é observar o tempo certo para inserir as atividades específicas em cada momento, é fugir dos exercícios de repetição ou aplicação de fórmulas. Segundo Perrenoud (2000, p.26), para poder organizar e dirigir situações de aprendizagem são necessárias algumas competências específicas tais como:

- conhecer, para determinada disciplina, conteúdos a serem ensinados e sua tradução em objetivos de aprendizagem;
- trabalhar a partir das representações dos alunos;
- trabalhar a partir dos erros e de obstáculos à aprendizagem;
- construir e planejar dispositivos e seqüências didáticas;

- envolver os alunos em atividades de pesquisa, em projetos de conhecimento.

A importância de trabalhar com atividades dessa natureza é que não se pode esquecer que o aluno tem conhecimentos prévios e o professor deve levá-los em conta para que seus ensinamentos não se choquem frente as suas concepções.

Nesse contexto, a missão dos educadores, torna-se bastante árdua, pois proporcionar um ensino que possibilite ao aluno adquirir habilidades para resolver problemas, tomar decisões e participar ativamente da sociedade a qual está inserido, não é nada fácil.

Assim, acredita-se que oferecer ao aluno uma forma mais significativa de trabalhar com logaritmos, partindo de problemas que representem situações diversas e concretas, isto é, que permitam aos alunos formular hipóteses e conjecturas, é um modo de motivá-los ao estudo desse conteúdo matemático e propiciar o sucesso escolar, uma vez que as aplicações dos logaritmos estão presentes na sociedade e trazem implicações para a vida das pessoas.

Detalhamento da Pesquisa

Diante do exposto nesse trabalho, a questão de pesquisa, consistiu em verificar a possibilidade em proporcionar aos alunos, a participação na construção do conceito de logaritmo a partir de problemas significativos. Para responder a essa questão, colocou-se como objetivo investigar o aprendizado do aluno no domínio do conceito de logaritmos, por meio da realização de um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem desse conceito, propondo alternativas para minimizar tais dificuldades, e desenvolver uma seqüência didática sobre este conteúdo, aplicando-a em sala de aula.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, utilizou-se a Engenharia Didática a qual proporciona aos professores-pesquisadores a investigação de um determinado problema e uma ação sobre o sistema para resolvê-lo. Conforme Artigue (1995), “esta metodologia favorece uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica, possibilitando o enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia”.

Segundo Artigue,

A Engenharia Didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização a observação e a análise de seqüências de ensino (1995, p.36).

Pensando nos problemas até aqui levantados e, observando que existem possíveis soluções para tornar o aluno capaz de compreender o real significado do conceito de logaritmo, foi elaborada uma seqüência didática, com questões que pudessem justificar o uso de logaritmo e não apenas a aplicação direta de técnicas para a resolução de problemas. Questões que além de propiciar uma aprendizagem mais relevante, pudessem contemplar a construção do conceito de logaritmo.

Para esta pesquisa, as atividades da seqüência foram elaboradas pela professora-pesquisadora de modo a não deixar tudo explícito ao aluno; ao mesmo tempo em que a professora deve mediar nas resoluções das atividades, os alunos foram convidados a trabalhar em trios, buscando solução aos problemas apresentados, expondo suas

dificuldades, assumindo seus erros, aprendendo a comunicar-se, tomar decisões, aprender a aprender e ser social. As atividades das sessões foram organizadas de forma que a aprendizagem se desse através de mediações entre os alunos do grupo e do grupo de alunos com a professora-pesquisadora.

Sabe-se que os objetos de uma investigação, utilizando-se a Engenharia Didática, podem ser diversos. Porém, nessa pesquisa, foram priorizadas as investigações que visam o estudo dos processos de aprendizagem do conceito de logaritmo. Este processo de investigação foi baseado nos experimentos de sala de aula, delimitando-se em quatro (4) fases: análises prévias; análise a priori; aplicação da seqüência (experimentação); análise a posteriori e validação da seqüência.

Na primeira fase, fase das análises prévias foi realizado um levantamento das concepções referentes ao conceito de logaritmo e a busca de referências teóricas para fundamentar didática e matematicamente a pesquisa. A primeira análise está relacionada aos conteúdos selecionados com base no currículo do Colégio Militar de Santa Maria para a série em questão onde a professora atua e, também, observando os Parâmetros Curriculares Nacionais. Um segundo aspecto destacado na análise prévia, foi verificar as concepções dos alunos por meio de um teste diagnóstico, no qual incluía questões relativas aos pré-requisitos necessários à construção do conceito de logaritmo e também questões de conhecimento geral, a fim de verificar se os alunos possuíam um conhecimento mínimo necessário para iniciar o estudo de logaritmo com a intenção de propor melhorias com relação a sua aprendizagem. A análise foi realizada para que fosse possível levantar as dificuldades e obstáculos e a partir daí intervir para obtenção de um resultado mais satisfatório.

Para subsidiar as ações foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre logaritmo, a qual compôs o quadro teórico da pesquisa e um estudo histórico e epistemológico do tema, buscando na história da matemática a construção e evolução do conceito de logaritmo. Também foram feitas análises de cinco livros do Ensino Médio, sendo dois adotados nos últimos cinco anos pelo Colégio Militar de Santa Maria, e avaliados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), com relação ao conteúdo de logaritmo.

Conforme Artigue (1995), “o objetivo dessa fase é determinar quais seleções de fato permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seu significado”.

Acredita-se que o interesse pelo conteúdo, por parte dos alunos, aumenta a partir do momento em que estes compreendem as ligações do conteúdo a ser estudado num contexto relacionado com suas vivências. Diante desse pensamento, colocaram-se como elemento norteador as seguintes hipóteses de pesquisa:

H₁: A proposição de problemas relevantes e o auxílio da História da Matemática propiciam a construção e compreensão do conceito de logaritmo.

Levando-se em conta que os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), sugerem que a investigação e a compreensão sejam uma competência e uma habilidade a serem desenvolvidas na disciplina de Matemática, formulou-se uma segunda hipótese:

H₂: A utilização de atividades que propiciem o desenvolvimento da criatividade incentivando à pesquisa e admitindo estratégias de resolução de problemas como as

construções de escalas logarítmicas, favorecem a construção e consolidação do conceito de logaritmo.

Os conhecimentos adquiridos através da construção do gráfico da função logarítmica, produzidos no meio informatizado, com o auxílio do *software* Winplot é muito mais amplo do que se fosse realizada a construção gráfica em um ambiente que tivesse somente lápis e papel. Com base nesse pensamento elencou-se a terceira hipótese.

H₃: a utilização do software Winplot, pode auxiliar na construção, compreensão e análise dos gráficos das funções exponencial e logarítmica.

Na segunda fase, fase da análise a priori, foram elaboradas as atividades que compõem a seqüência didática. As atividades foram escolhidas, levando-se em conta as variáveis didáticas empregadas, a problemática e as hipóteses da pesquisa. Também foi observado o conhecimento sobre o assunto em questão e os resultados obtidos com o teste diagnóstico. A seqüência didática elaborada constituiu-se de situações-problema visando proporcionar aos alunos condições para melhor compreensão do conteúdo de logaritmo. O objetivo foi fazer com que eles percebessem a necessidade dos logaritmos, compreendendo sua utilidade.

A terceira fase foi a fase da aplicação da seqüência didática para uma turma de 27 (vinte e sete) alunos de 1ª série do Ensino Médio. A aplicação da seqüência teve a duração de cinco semanas.

A quarta fase, da análise a posteriori e validação, teve como apoio todos os dados colhidos durante a experimentação constante das pautas de observações realizadas durante cada uma das sessões, das produções dos alunos em sala de aula e fora dela. Após, confrontou-se os dados obtidos na análise a priori e a posteriori validando as hipóteses da pesquisa.

Para atingir os objetivos da pesquisa, trabalhou-se em algumas sessões da seqüência didática, no laboratório de informática, com o uso do software Winplot, para a construção do gráfico da função logarítmica. Esse software permitiu a construção de gráficos em duas dimensões, sendo possível visualizá-lo através de animações à medida que os coeficientes vão se alternando, além de permitir a construção simultânea dos gráficos da função exponencial e da função logarítmica. No ambiente informatizado, os alunos sentiram-se a vontade e a aprendizagem pôde fluir naturalmente. Além do que o Winplot foi facilmente operado pelos alunos, possibilitando a eles explorarem sua criatividade, pois, após a construção dos gráficos, os alunos puderam trocar o gráfico de cor, escala, espessura, enfim, os alunos puderam “brincar” e aprender ao mesmo tempo. Observou-se que é necessário que se faça uso da tecnologia disponível, adaptando-as de acordo com os objetivos e tornando o ensino mais interessante aos olhos dos alunos.

Descrição das Atividades Desenvolvidas.

1ª Atividade

Na primeira atividade da seqüência foi apresentada aos alunos uma situação-problema com o objetivo de revisar o conceito de função exponencial e introduzir o conceito de logaritmo.

A situação-problema foi a seguinte:

Na base de lançamentos de foguetes em Alcântara, Maranhão, destruída em 2003 devido a um acidente, foi lançado um foguete que percorreu uma distância de 10 m (metros) em 1 s (segundo), 100 m em 2 s, e 1000 m em 3 s. Perguntou-se:

- a) É possível estabelecer uma lei de formação que permite calcular a distância percorrida pelo foguete em função do tempo? Descreva essa lei de formação.
- b) Quantos metros o foguete percorreu em 8 s? E em 10 s?
- c) Quanto tempo foi necessário para o foguete percorrer 100 000 metros?
- d) Represente graficamente a função obtida na letra (a)
- e) Represente graficamente a função obtida na letra (a), juntamente com sua inversa.

Os alunos reunidos em trio estabeleceram suas estratégias de resolução. A maioria dos alunos iniciou construindo uma Tabela de valores conforme a Tabela 1 a seguir:

Tabela 1 – Distância percorrida pelo foguete em função do tempo.

Tempo (segundos)	1	2	3	4	5	...
Distância (metros)	10	100	1000	10.000	100.000	...

Como os alunos já haviam estudado a função exponencial, esta situação-problema lhes era familiar e, portanto não sentiram dificuldades para obter a função $f(t) = 10^t$ que descreve o comportamento dos dados da Tabela 1.

Houve dificuldades com relação ao traçado do gráfico da função $f(t) = 10^t$, pois muitos trios tentaram fazer o esboço com lápis e papel. Para superar essa dificuldade a professora os conduziu ao laboratório de informática onde utilizaram o programa Winplot o que permitiu uma melhor visualização do gráfico, pois esse programa permite trabalhar com escalas diferentes no eixo x e no eixo y.

Foi possível aos alunos, com o auxílio do Winplot explorarem o gráfico da função $f(t) = 10^t$ e de sua inversa identificando os pontos simétricos em relação à diagonal do 1º e 3º quadrantes localizados em cada gráfico, como mostrado na Figura 1 a seguir.

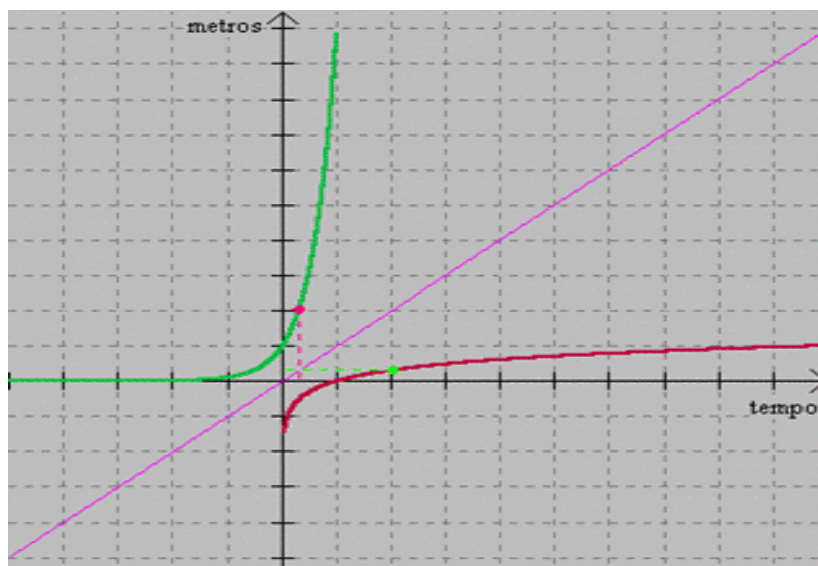


Figura1-Gráfico da função exponencial e de sua inversa destacando dois pontos simétricos.

A exploração gráfica da função exponencial e de sua inversa foi preparatória para definir a função logarítmica.

2ª Atividade

Esta atividade teve a intenção de retomar o estudo da função exponencial, analisando graficamente a solução do problema, estabelecendo a relação entre o gráfico da função exponencial e de sua inversa, bem como definir a função logarítmica.

Foi colocada aos alunos a seguinte situação-problema:

As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sócio demográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento ao dispositivo constitucional, as estimativas da população constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

A população da cidade de Santa Maria - RS no ano 2000 era de aproximadamente 243 mil habitantes (Fonte: IBGE) e está crescendo a uma taxa média anual de 1,8%. Pergunta-se:

- Qual era a população estimada da cidade em 2001? Em 2003? Em 2005? Para 2006, 2008 e 2010 qual será a população estimada?
- É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva a lei.
- Represente graficamente a função obtida na letra (b).

- d) Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?
- e) Quando a população da cidade será de aproximadamente 291 mil habitantes?
- f) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (b).

O propósito dessa sessão foi por meio de uma situação-problema, possibilitar aos alunos a retomada do conceito de função exponencial, construir o modelo matemático referente à situação-problema, bem como analisar graficamente a solução e definir a função logarítmica.

Na resolução dessa atividade pelos alunos, uma das dificuldades observada foi a construção de uma tabela de valores da população da cidade, em cada ano. A intervenção da professora analisando com os alunos que a população inicial da cidade era de 243 mil habitantes no ano 2000 e, sendo a taxa anual de crescimento de 1,8%, então podia-se obter a população de 2001 fazendo o seguinte cálculo:

$$\text{População de 2001} = (1 + 0,18) \cdot \text{população de 2000.}$$

Para escrever essa expressão os alunos sentiram dificuldades em expressar a taxa de crescimento por um número decimal.

Seguindo este raciocínio os alunos construíram a tabela de valores da população nos anos subsequentes. Indicando a população inicial no ano 2000 por P_0 , no ano 2001 por P_1 e assim por diante, os alunos obtiveram os valores:

$$\text{População no ano 2000, } P_0 = 243 \text{ mil}$$

No ano de 2001, $P_1 = (1 + 0,018) \cdot P_0 = (1,018) \cdot P_0 = 1,018 \cdot 243 \cong 247,37$ mil habitantes.

No ano de 2002, $P_2 = (1,018) \cdot P_1 = (1,018) \cdot (1,018) \cdot P_0 = (1,018)^2 \cdot P_0 = (1,018)^2 \cdot 243 \cong 251,82$ mil habitantes.

No ano de 2003, $P_3 = (1,018) \cdot P_2 = (1,018)^3 \cdot P_0 = (1,018)^3 \cdot 243 \cong 256,35$ mil habitantes.

Seguindo este raciocínio e indicando por t a variável tempo (em anos), os alunos construíram o modelo matemático que permite calcular o número de habitantes em qualquer ano:

$$P(t) = (1,018)^t \cdot P_0 \quad \text{ou} \quad P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$$

A seguir os alunos traçaram o gráfico dessa função. Observou-se que a construção do gráfico propiciou uma visualização favorável para responder quando a população seria duplicada. Como o Winplot permite que sejam traçados os gráficos de duas funções na mesma janela, foi possível construir os gráficos das funções $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$ e $P(t) = 486$, obtendo o ponto de interseção o qual indica o tempo para a duplicação da população. Da análise gráfica os alunos concluíram que seria necessário aproximadamente 38 anos para a população duplicar.

Esta atividade exploratória com o auxílio do Winplot foi motivadora para os alunos.

Para responder ao item (e) a professora fez uma intervenção para definir a função logarítmica.

Retomando a solução da 1ª atividade a professora definiu a função logarítmica como sendo a função inversa da função exponencial, de acordo com Caraça (1984). Primeiramente foi definida a função logarítmica base 10, isto é, o logaritmo de um número x , na base 10 é o expoente da base 10, necessário para se obter x , portanto, $\log_{10} x = y$ é equivalente a $10^y = x$.

Após ter trabalhado, por meio de muitos exemplos, a definição da função logarítmica, a professora retomou a 2ª atividade para responder a questão (e) isto é, quantos anos são necessários para que a população duplique.

Os alunos escreveram:

$2 \cdot 243 = 243 \cdot (1,018)^t$ ou $2 = (1,018)^t$, mas sentiram dificuldades, pois pela primeira vez, se depararam com uma função onde a variável aparecia no expoente. Muitos dos trios encontraram o valor aproximado por tentativa e erro uma vez que já haviam respondido esta questão analisando o gráfico.

A professora entrevistou e analisou, juntamente com os alunos, a definição da função logarítmica para escrever,

$$\log_{10} (2) = \log (1,018)^t$$

ou

$$\log_{10} (2) = t \cdot \log_{10} (1,018)$$

Para auxiliar o cálculo os alunos utilizaram a calculadora. Como já haviam trabalhado com a calculadora em outras ocasiões, não tiveram dificuldades de efetuar o cálculo, obtendo o resultado de aproximadamente 38 anos.

A professora também retomou a questão (a) para calcular o ano que a população seria de 291 mil habitantes utilizando a definição de função logarítmica. Seguindo o mesmo raciocínio anterior a maioria dos alunos escreveu a equação:

$$291 = 243 (1,018)^t$$

Para obter o valor de t os alunos ainda sentiram dificuldades. Foi necessário trabalhar outras situações-problema para que eles sentissem segurança e destreza na aplicação da definição da função logarítmica.

3ª Atividade

O objetivo desta atividade foi usar a História da Matemática para mostrar a construção do conceito de função logarítmica e explorar suas propriedades.

Usando a História da Matemática a professora relatou aos alunos que John Napier interessava-se por resolver problemas de sua época, principalmente àqueles relacionados à matemática. Nesse tempo, muitos matemáticos já vinham tentando achar um processo que permitisse reduzir operações de multiplicação e divisão ou de potenciação e radiciação em operações mais simples como a adição e a subtração. Assim aconteceu com John Napier e Jost Bürgi que publicaram as primeiras tábuas de logaritmos, conforme Miorim, M.A.; Miguel, A (2001).

Seguindo as idéias de Napier foi solicitado que os alunos efetuassem as seguintes multiplicações: 8×128 e 2×2187 . Ao efetuar o produto 8×128 os alunos obtiveram o resultado 1024. A seguir foi construída a seguinte Tabela.

Tabela 2 - Potências naturais de base 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Analisando a Tabela 2 observaram que o valor 1024 encontra-se na linha correspondente a $n = 10$. A professora explicou que 10 é o expoente que se deve elevar a base 2 para obter 1024.

A professora explicou que comparando os termos das duas seqüências, da Tabela 2, existem números que podem ser expressos como produto de outros números, como foi observado por Napier. Por exemplo, para multiplicar dois termos da segunda seqüência, bastava somar os seus correspondentes na primeira seqüência e ver qual o termo da segunda seqüência que corresponde a essa soma. Eles também observaram que para realizar o produto de $8 \cdot 128$ bastava somar $3 + 7 = 10$, e encontrar o termo da segunda seqüência que corresponde ao 10. Neste caso, é o 1024.

O número 10 é o logaritmo de 1024 na base 2, isto é, $\log_2 1024 = 10$.

Foi solicitado aos alunos a seguinte tarefa:

- Construa a tabela das potências naturais do número 3.
- Seguindo as idéias de Napier efetue o produto de 27 por 2187. Qual é o logaritmo do número obtido? Justifique sua resposta.
- Com base no método de Napier efetue a divisão de 19683 por 2187. Determine o logaritmo do número obtido. Justifique sua resposta.

O desenvolvimento de atividades dessa natureza, utilizando a História da Matemática, teve como objetivo mostrar a necessidade da construção da tábua de logaritmos para efetuar cálculos com números muito grandes. Embora hoje sejam utilizados as calculadoras ou o computador, é necessário que o aluno conheça a origem e a evolução do cálculo do logaritmo.

Essa atividade permitiu também explorar as propriedades dos logaritmos, como por exemplo, adicionando-se $3 + 7 = 10$ esse resultado pode ser escrito na forma, $\log_2 8 + \log_2 128 = \log_2(1024) = \log_2(8 \cdot 28)$.

Desse modo depois da análise de vários exemplos, a professora concluiu junto com os alunos a propriedade: “o logaritmo de um produto é a soma dos logaritmos dos fatores, considerando-se a mesma base”.

Propriedades idênticas relativas à divisão e à potenciação foram obtidas e exploradas a partir da construção da tabela dos logaritmos.

Ao final dessa atividade foi realizada uma explanação, pela professora, referente aos problemas que impulsionaram o surgimento dos logaritmos e foi feita uma análise da evolução histórica desse conceito e das necessidades do uso do logaritmo para efetuar cálculos. Após análise a posteriori dessa atividade, verificou-se que a 2ª hipótese fora confirmada. Percebeu-se o quanto foi importante colocar os alunos a par das dificuldades da época, das tentativas e erros efetuados para se chegar aos cálculos realizados hoje em dia.

4ª Atividade

O objetivo dessa atividade foi a construção de uma escala logarítmica a partir de uma situação-problema.

Num primeiro momento, a professora solicitou aos alunos que pesquisassem na internet, ou em jornais, revistas, livros, como se formam os *tsunamis*, quais as causas de um terremoto, como se mede a intensidade dos terremotos, para que serve a escala Richter e como se interpretam as medidas determinadas por essa escala. Para que os alunos sentissem a necessidade de construir uma escala logarítmica foi apresentado o seguinte problema, adaptado de Kalmam (1997):

a) Representar sobre uma reta o número de elementos que compõe uma família de 4 pessoas, uma classe escolar com 30 alunos, uma escola com 4.000 alunos, uma cidade com 20.000 pessoas, uma região urbana com 5.000.000 de habitantes e a população de 250.000.000 de habitantes de um país.

O objetivo dessa atividade foi mostrar a vantagem de empregar uma escala logarítmica para fazer representações gráficas, a partir de uma situação problema.

Tabela 3 – Dados localizados na escala numérica.

Família	Classe	Escola	Cidade	Região	País				
10 ⁰	10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷	10 ⁸	10 ⁹
1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000	1.000.000.000

Para a construção de uma nova escala para representar esses valores, foi utilizado o logaritmo decimal para representação dos dados na escala logarítmica, como é mostrado na ilustração a seguir:

Família	Classe		Escola			Região		País	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ilustração 1– Representação dos Dados na Escala Logarítmica.

Finalmente foi solicitado aos alunos a construção dos gráficos de $y = 10^x$ e $\log y = x$ para que pudessem analisar e estabelecer as relações entre eles.

Para que os alunos entendessem a grande aplicabilidade das escalas logarítmicas foi solicitado que cada grupo de alunos fizesse uma pesquisa sobre a utilização de escalas logarítmicas e apresentasse uma situação-problema.

Orientados pela professora, um grupo de alunos pesquisou sobre a escala Richter, como interpretar os resultados obtidos na escala Richter, o que significa a intensidade e a magnitude de um terremoto. Essa atividade permitiu um trabalho interdisciplinar em sala de aula ao analisarem a magnitude do terremoto que causou ondas gigantes (tsunami) em dezembro de 2004 na Indonésia. Foram analisadas as causas físicas da formação de tais ondas, a constituição e localização das rochas no fundo do mar que propiciaram a formação do tsunami e as conseqüências sociais e econômicas do país após tal catástrofe.

Um segundo grupo pesquisou a magnitude dos principais terremotos acontecidos no planeta e suas respectivas intensidades, medidas pela escala Richter. Por exemplo, os alunos calcularam quantas vezes a intensidade do terremoto que atingiu a cidade do México, em 1985, cuja leitura na escala Richter foi de 8.1, foi maior que a intensidade do terremoto que atingiu a cidade de São Francisco, nos Estados Unidos, em 1989, cuja leitura na escala Richter foi de 7.1. Os alunos também explicaram qual o significado (conseqüências físicas) da variação de um ponto nessa escala de medida.

Um terceiro grupo pesquisou sobre o pH das soluções cuja acidez ou alcalinidade é medida por uma escala logarítmica. Esse tema propiciou também uma discussão sobre a chuva ácida, suas conseqüências para a natureza e as causas de sua formação.

O quarto grupo pesquisou sobre a intensidade sonora. Como o nível de intensidade sonora varia em escala logarítmica, foram analisados os sons perceptíveis pelo ouvido humano e aqueles que podem provocar dor ou ruptura do ouvido humano. Esse tema também proporcionou um trabalho interdisciplinar envolvendo conteúdos de matemática e física no estudo de ondas sonoras, sua freqüência e nível de intensidade.

Observou-se, a partir dessas atividades que, embora os logaritmos tenham se originado de uma idéia simples, eles são fundamentais para compreender a realidade e, a busca de solução para essas situações-problema, permitiu aos alunos a aquisição de conhecimentos e a ampliação de experiências quanto à aplicabilidade desse conteúdo.

Considerações finais

Segundo Artigue (1985), a Engenharia Didática “caracteriza-se pelo estudo de caso onde a validação é essencialmente interna, prescindindo assim de análises comparativas entre a análise a priori e a análise a posteriori”.

Após comparar a análise a priori, que são as possíveis soluções para as atividades propostas e os comportamentos esperados, com a análise a posteriori das atividades que foram realizadas pelos alunos e levantadas pela professora-pesquisadora, através das pautas de observação, foi possível constatar que os alunos envolveram-se em um trabalho interdisciplinar, buscando novas fontes de pesquisas, aprendendo a trabalhar em grupo, utilizando-se de uma ferramenta computacional para a construção de gráficos, como o programa Winplot, que é de fácil manuseio. Além do mais, os alunos sentiram-se motivados para trabalhar no laboratório de informática.

Sabendo-se que construir o conhecimento é trabalhar as múltiplas informações disponibilizadas, pôde-se concluir que as atividades elaboradas e trabalhadas com os alunos, possibilitaram a construção de vários conhecimentos, como a de escala logarítmica e a sua utilização para compreender e interpretar fenômenos da natureza. Foram observadas, durante a resolução dessas atividades, que os alunos utilizaram várias estratégias, levando os trios a investirem seus conhecimentos anteriores disponíveis como a definição de logaritmo. Em decorrência desse fato, confirmou-se a segunda hipótese.

O fato de a seqüência didática elaborada contemplar a história do surgimento dos logaritmos de uma maneira natural, aproveitando e explorando algumas atividades relacionadas com as idéias que deram origem aos logaritmos, merece ser destacada positivamente, pois confirmou a primeira hipótese dessa pesquisa. Os alunos puderam entender, através das atividades relacionadas aos aspectos históricos, o porquê da necessidade da simplificação de cálculos numéricos em uma época que não existia calculadora.

As atividades desenvolvidas no laboratório de informática com o programa Winplot possibilitaram a abordagem de alguns enfoques que em um ambiente só com lápis e papel não seria suficiente para a resolução, por exemplo, a construção de gráficos da função logarítmica, bem como a possibilidade de observar as translações sofridas por esses e a comparação com o gráfico da função exponencial.

Apesar de alguns alunos mostrarem resistência para trabalhar em grupo a maioria dos trios mostrou-se bastante motivada em resolver situações-problema das quais eles tinham certo conhecimento, situações desafiadoras e contextualizadas que estavam ao seu alcance e que traziam informações de caráter geral. Essas situações propiciaram o crescimento dos alunos e a aquisição de conhecimentos sobre o conteúdo.

Observou-se também que os alunos empenharam-se em pesquisar a aplicabilidade dos logaritmos na construção de uma escala logarítmica e na interpretação da leitura da escala Richter. Com esse tipo de atividade teve-se a intenção de atribuir aos alunos uma responsabilidade maior na produção do seu conhecimento e no seu aprendizado.

A elaboração da seqüência didática permitiu a professora trabalhar de maneira direcionada aos objetivos específicos, dando ênfase à superação dos obstáculos e

dificuldades encontradas no teste diagnóstico. A investigação aqui realizada, sob a ótica da Engenharia Didática, considerou o conteúdo de logaritmo de maneira a propor atividades para melhor compreensão deste conceito. Pode-se concluir que alternativas por meio de uma sequência didática para minimizar as dificuldades no que se refere à construção do conceito de logaritmo e sua aplicabilidade foi atingido.

Referências bibliográficas

ARTIGUE, M; DOUADY, R; MORENO, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Pedro Gómez.

CARAÇA, B.J; (1984) *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa. Livraria Sá da Costa Editora.

KALMAN, D. (1997). *Elementary mathematical models: order aplenty and a glimpse of chaos*. American Universit.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. (2001). *Os logaritmos na cultura escolar brasileira*. Campinas: Gráfica da Faculdade de Educação da UNICAMP/Sociedade Brasileira de História da Matemática.

PAIS, L. C. (2001). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica.

PARRA, C. et al. (Org.). (2001). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Trad. Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas.

PERRENOUD, P. (1999). *Construir as competências desde a escola*. Tradução Charles Magne. Porto Alegre: Artes Médicas do Sul.

PERRENOUD, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas do Sul.