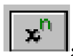
1. LANÇAR UMA BOLA PARA O AR, COM UMA PARÁBOLA…

Nesta atividade vais lançar uma bola para o ar utilizando uma função quadrática, isto é, uma função em que a variável independente surge elevada ao quadrado (sem surgir elevada a qualquer outra potência superior). Vais também aprender a construir gráficos na janela de animação.

O modelo

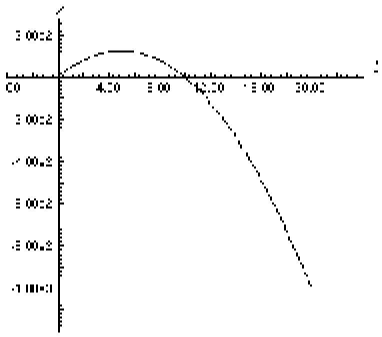
Executa o *Modellus* ou faz **Novo** no menu **Modelo**. Escreve o seguinte modelo (adiante aprenderás porque escreves este e não outro qualquer):

$$y = 50 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

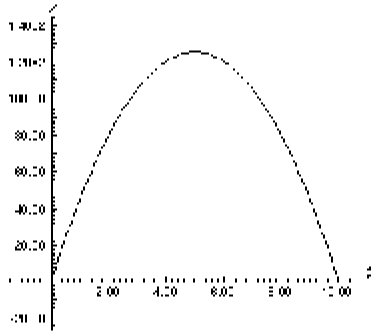
Para elevar ao quadrado podes utilizar o botão , na parte superior da janela **Modelo**.

Analisando o modelo

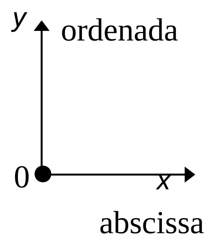
1. Depois de clicar no botão **Interpretar**, cria um novo gráfico, utilizando o menu **Janelas**, opção **Novo Gráfico**. Executa o modelo (e ajusta o gráfico), de modo a obteres um gráfico como o seguinte:



2. Observa que a função *y* vale 0 quando $t = 0$ e que volta a valer 0 quando $t = 10$. Para valores superiores de *t*, os valores de *y* são negativos.
3. Modifica o limite superior da variável independente, clicando no botão **Opções**… da janela **Controle**. Em vez de 20, atribui 10 unidades ao valor **Máx** da variável independente *t*.
4. Volta a executar o modelo e ajusta o gráfico. O gráfico de *y* é agora:



5. Analisa o gráfico. Para valores de *t* entre 0 e 10, o valor de *y* aumenta até atingir 125 ao fim de 5 unidades de *t*, diminuindo em seguida até 0. (Podes confirmar este valor criando uma tabela.).
6. A que grandeza pode corresponder *y* num lançamento vertical de bola para o ar? E *t* ?
7. Se considerarmos um sistema de eixos *xOy* (um referencial) no ponto de partida, podemos dizer que a bola, ao subir na vertical não muda o seu valor de *x* (fica sempre igual a 0). Pelo contrário, o valor de *y* aumenta com o tempo *t* até a bola atingir a altura máxima, diminuindo em seguida até 0, o ponto de partida.



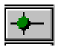
8. No modelo que estamos analisando, a variável *y* (variável dependente) pode então representar a ordenada *y* da bola no referencial *Oxy,* sendo a variável independente *t* o tempo. No SI (em todos os modelos que utilizarmos as unidades são unidades SI, salvo indicação em contrário), o tempo *t* é medido em segundos e a ordenada *y* é medida em metros.
9. Como dissemos que a bola sobe na vertical, a partir da origem, podemos acrescentar ao modelo a expressão *x* = 0 para indicar que a coordenada *x* se mantém sempre constante e igual a 0:

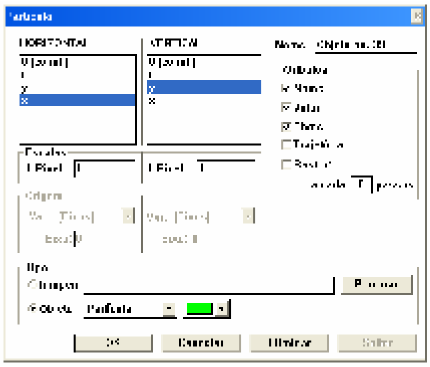
$$y = 50 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

$$x = 0$$

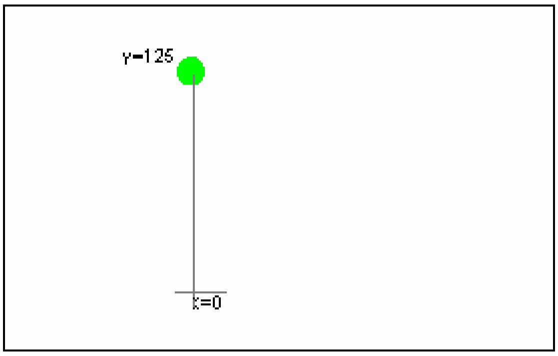
Criar uma animação da bola lançada ao ar

1. Utilizando o menu **Janelas**, cria uma nova animação na opção **Nova Animação**. (A cor de fundo das animações pode ser selecionado usando o botão .)

2. Seleciona uma bola  no coluna da esquerda da janela de animação e coloca-a aproximadamente no meio da janela. A coordenada horizontal da bola será descrita pela variável *x* e a coordenada vertical pela variável *y*. Selecione a visualização do valor das variáveis e clica em OK.



3. Executa o modelo, observando a janela de animação. Por exemplo, ao fim de 5 unidades de *t*, a janela de animação tem o seguinte aspecto:

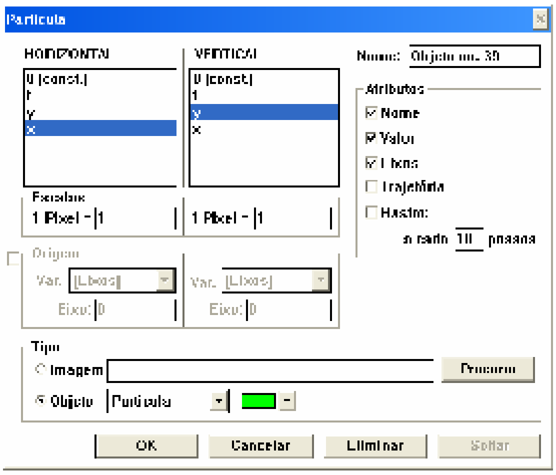


Nota: Para maior clareza na impressão, neste manual, freqüentemente o fundo aparece em branco e os valores das variáveis em preto. Observa, entretanto, que na versão 1.11 do Modellus, o valor das variáveis sempre aparece na cor branca. (Se usares fundo branco, não os verás. Dá preferência à cor preta para o fundo).

---

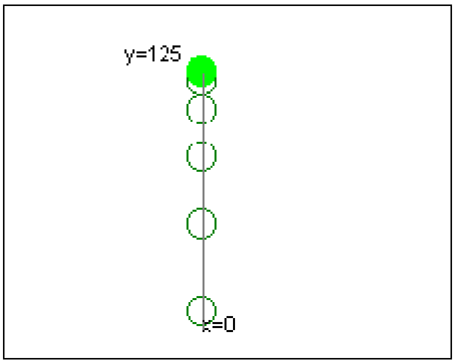
1. Como podes observar, a bola sobe durante 5 segundos, atinge a altura máxima e, em seguida, desce até o ponto de partida, onde os valores de *y* e de *x* são 0 (esse ponto é a origem do referencial *Oxy*). Repara também que o valor de *x* se manteve sempre em 0, como seria de esperar.

2. Vais agora selecionar uma opção nas características da bola na tela. Para tal, clica com o *botão direito* do *"mouse"* na bola de modo a surgir novamente a caixa com as características da bola:



3. Seleciona a opção **Rastro** na caixa **Visualização** da bola. Quando se seleciona esta opção, a bola deixa na tela um registro de 10 em 10 imagens (nota que está indicado o valor 10 na caixa à direita da opção **Rastro.**).

4. Executa o modelo. Deves obter, ao fim de *t* = 5, algo semelhante a:



5. Como o registro é deixado de 10 em 10 imagens e entre cada imagem decorrem 0.1 unidades de *t* (podes confirmar que é esse o passo na janela **Controle**, botão **Opções… Passo**) conclui-se que entre cada imagem decorre 10 x 0.1 s = 1 s. Assim:

   - a primeira imagem surge quando t = 0;

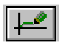
   - a segunda quando t = 1;

   - a terceira quando t = 2:

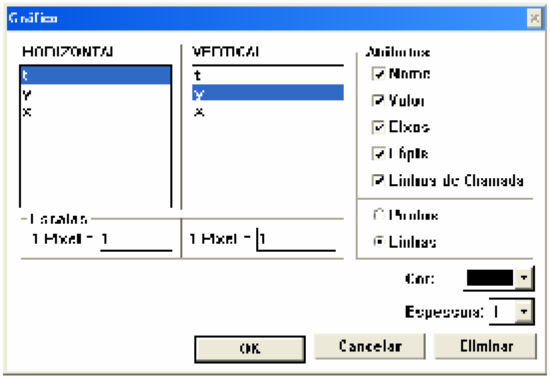
   - etc.

6. Que se pode concluir então acerca do módulo da velocidade da bola durante a subida? E durante a descida? Por quê?

Criar um gráfico na janela de animação

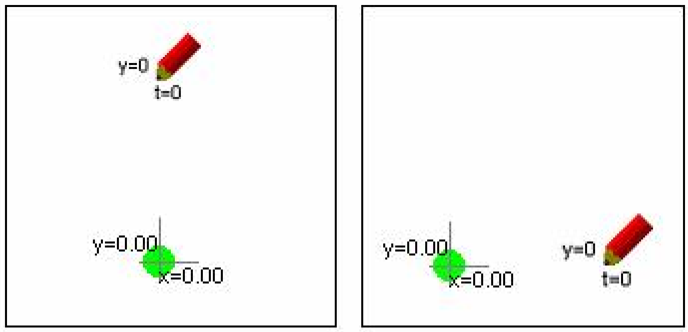
1. Clica no botão *lápis*  que está na parte esquerda da janela de animação.

2. Surge uma caixa de diálogo para indicar que variáveis queres representar graficamente:

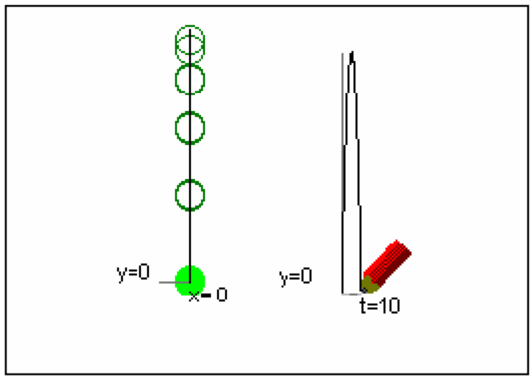


3. Seleciona na lista **Horizontal** a variável *t* e na lista **Vertical** a variável *y*. Seleciona também outra cor para o *lápis*: por exemplo, preto.

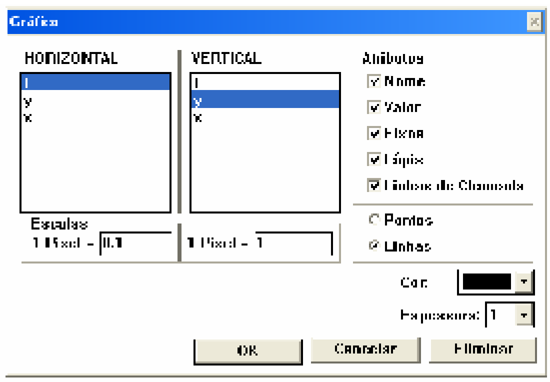
4. Clica em **OK**. A janela de animação passa a ter o aspecto da figura à esquerda. Mova o lápis para a posição em que desejas construir o gráfico (para deslocar um objeto, arrasta-se esse objeto com o *botão esquerdo* do "*mouse*"). Por exemplo, na posição mostrada na figura à direita.



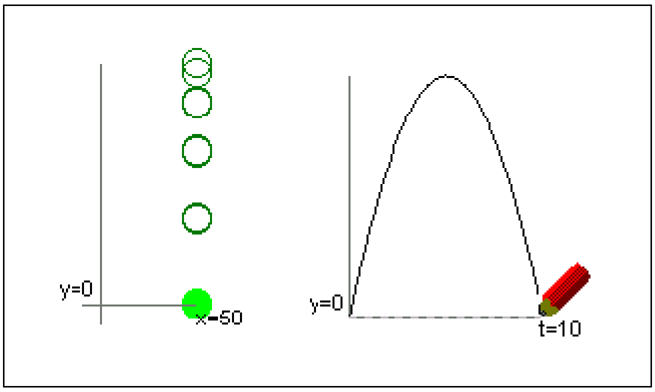
5. Executa o modelo. Obténs o seguinte, após 10 unidades de *t:*



6. Como podes observar, o gráfico traçado pelo *lápis* tem uma escala inadequada no eixo horizontal. Se diminuíres a escala, «alargas» o gráfico. Para tal, clica no *lápis* com o *botão direito* do *"mouse"* de modo a obteres novamente a caixa com as propriedades do *lápis* e faz corresponder, na escala **Horizontal**, 1 ponto a 0.1 unidades:



7. Depois de clicares OK, obténs o seguinte na janela de animação:



8. Volta a executar o modelo e observa o modo como varia a coordenada vertical durante os 10 segundos que a bola demora para subir e para descer.

Lançar a bola de um ponto diferente da origem do referencial

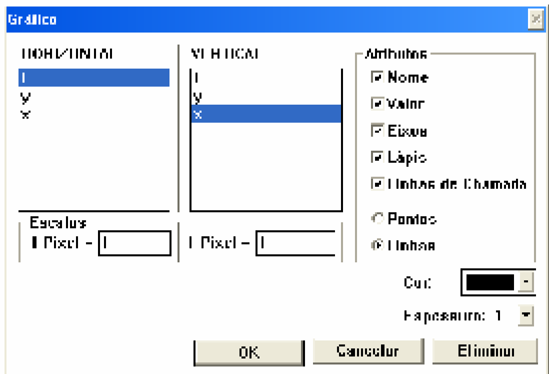
1. Vais agora analisar uma situação semelhante, mas em que a bola é lançada de outro ponto. Por exemplo, suponhamos que a bola é lançada de um ponto cujas coordenadas no instante de lançamento são x = 50 m e y = 0 m. Assim, o modelo deve ser alterado para:

$$y = 50 \times t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$

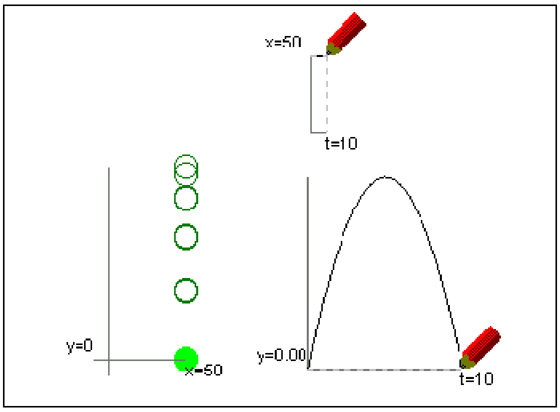
$$x = 50$$

2. Se necessário, afasta um pouco o *lápis* que já se encontra na janela de animação.

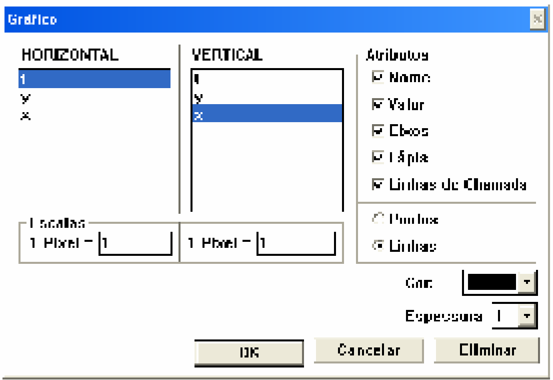
3. Acrescenta outro gráfico na animação, utilizando o botão *lápis* e indica para o eixo horizontal do gráfico o tempo t e para o eixo vertical a abscissa x. A cor do gráfico deve ser alterada para preto, se o fundo for branco:



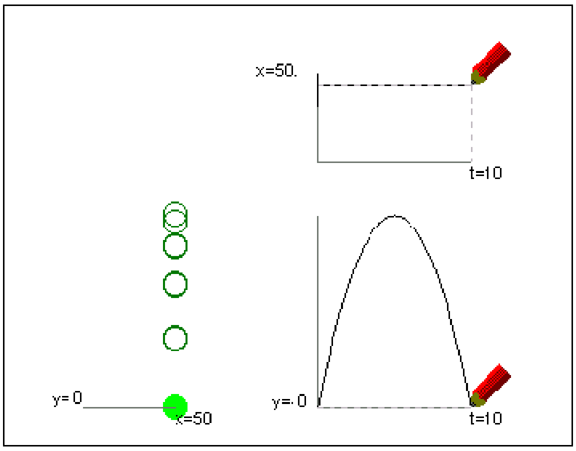
4. Depois de executares o modelo, obténs mais ou menos seguinte:



5. Como podes observar, a escala da variável t no gráfico de x em função de t é diferente da escala utilizada no gráfico de y em função de t. Para dar aos gráficos a mesma escala, clica com o botão esquerdo sobre o gráfico x em função de t e atribui à escala **Horizontal** o valor 0.1:



6. A janela de **Animação** passa a ter o seguinte aspecto:



7. Observa cuidadosamente a animação. Como varia a ordenada y à medida que o tempo t decorre entre 0 e 10 unidades? E a abscissa x?

8. Que tipo de figura geométrica é a trajetória (o *caminho percorrido*) da bola?

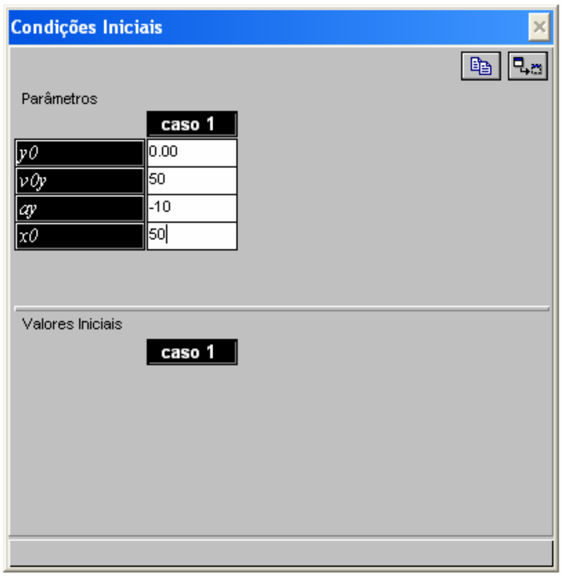
Um modelo com parâmetros

1. Volta a escrever o modelo, mas agora do seguinte modo (repara que *y0* se escreve *y* seguido do número *0*; *v0y* é a letra *v* seguida do número *0* e da letra *y*, etc; não confunde o número *0* com a letra *O* maiúscula ou minúscula):

$$y = y0 + v0y \times t + \frac{1}{2} \times ay \times t^2$$

$$x = x0$$

2. Assim que interpretares o modelo, clicando no botão **Interpretar**, surge na janela **Condições Iniciais** diversas caixas para introdução dos valores destas variáveis ou parâmetros. Atribui os seguintes valores:



3. Executa novamente o modelo, observando a janela de animação. Deves observar exatamente o mesmo que observaste da última vez, uma vez que o modelo é o mesmo.

Por vezes, é mais prático escrever o modelo utilizando parâmetros (isto é, variáveis auxiliares) e atribuindo valores a esses parâmetros. Isso é especialmente útil sempre que se quer comparar diversas situações com o mesmo modelo e vários conjuntos de parâmetros, como verás adiante.

Equação do movimento retilíneo com aceleração constante

Um movimento retilíneo é um movimento em que a trajetória é retilínea, como é o caso da subida e descida da bola, quando lançada na vertical.
Neste tipo de movimento, se considerarmos desprezível a resistência do ar, a única força que atua na bola, uma vez lançada, é a força gravitacional, que é vertical e dirigida para baixo. Além disso, é constante ao longo de todo o movimento, na subida e na descida.
Assim que inicia a subida, a bola tem uma certa velocidade inicial. À medida que sobe, a força gravitacional, que é dirigida para baixo retarda a bola — esta diminui a sua velocidade até se anular no instante em que atinge a altura máxima.
Enquanto desce, a bola continua sob ação da força gravitacional, dirigida para baixo, tal como a velocidade. Na descida, a força gravitacional faz com que o módulo da velocidade da bola aumente.

A *aceleração* é a grandeza vetorial que mede a taxa instantânea de variação da velocidade, uma grandeza vetorial. (Na atividade seguinte vais fazer uma primeira experiência com vetores). Um *vetor* é um objeto matemático que indica uma direção, um sentido e ao qual corresponde uma certa *magnitude*, *módulo* ou *intensidade*. Como verás a seguir, um vetor tem componentes num certo sistema de eixos.
No modelo

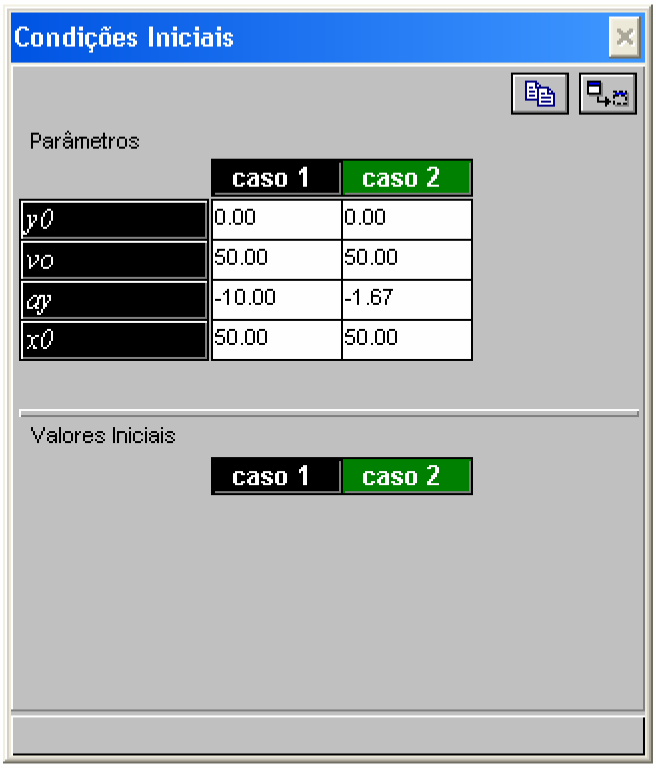
$$y = y0 + v0y \times t + \frac{1}{2} \times ay \times t^2$$

y0 representa a ordenada da bola no instante de partida (instante *0*), *v0y* a componente vertical da velocidade inicial da bola no instante *0*, e *ay* a componente da aceleração da bola (que é constante ao longo da subida e da descida, porque a força gravitacional também é constante). Na atividade 5 voltaremos a analisar este modelo com mais detalhe.

Comparando o lançamento da bola na Terra e na Lua

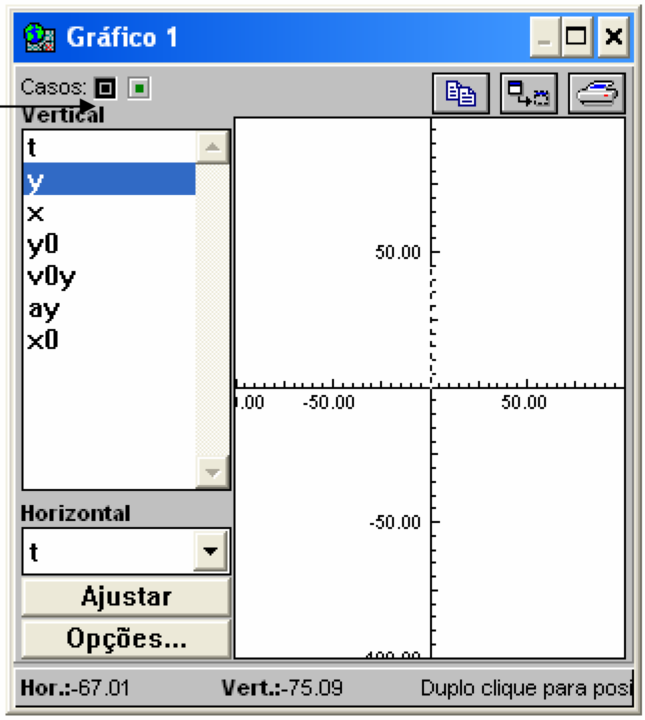
1. Na superfície da Lua, o módulo da aceleração é 1.67 unidades (metros por segundo ao quadrado ou m/s ^{2}). Se quiseres comparar o lançamento da bola na Terra e na Lua podes criar um novo **Caso** no *Modellus*. Um **Caso** é um *conjunto de valores de parâmetros*.

2. Para tal, no menu **Casos**, seleciona a opção **Acrescentar**. Obténs, na janela **Condições Iniciais**, um novo conjunto de valores, igual ao anterior. Altera, no novo conjunto de valores, o valor de *ay* para – 1.67:



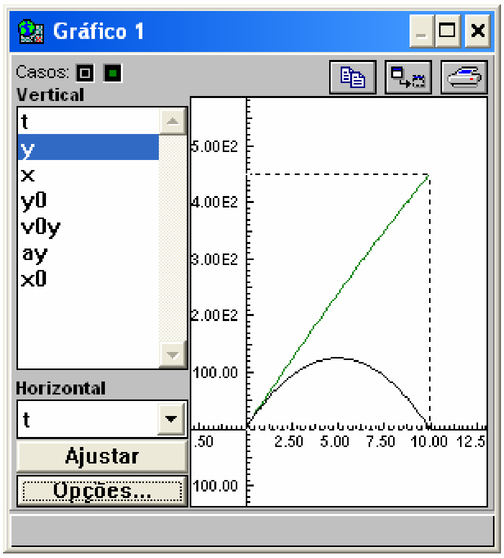
3. Utilizando o menu **Janelas**, seleciona a opção **Novo Gráfico**. Observa os pequenos quadradinhos coloridos no topo da janela, logo à direita da palavra **Casos**. Clica sobre o segundo quadradinho para veres o gráfico referente ao

Casos



segundo caso:

4. Executa o modelo e clica no botão **Ajustar**. Obténs:



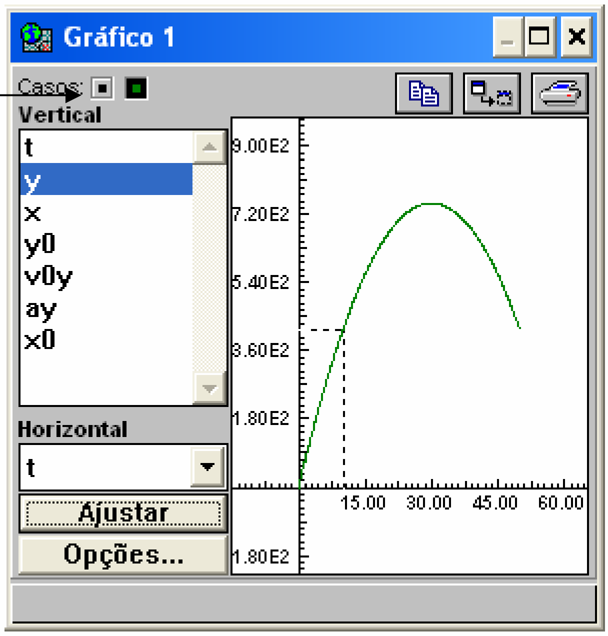
5. Como interpretar este gráfico? Repara que, na Lua, o peso de um certo corpo é menor que o peso desse mesmo corpo na Terra, uma vez que o corpo na Lua é atraído por uma força gravitacional menor do que na Terra. Logo, se a bola for lançada com igual velocidade, deve subir mais alto! Nota que 10 s depois do lançamento, a bola na Lua ainda não iniciou a descida…

6. Vamos «dar mais tempo» ao modelo. Utilizando o botão **Opções…** da janela **Controle**, aumenta o limite superior da variável independente *t* de 10 para 50 unidades.

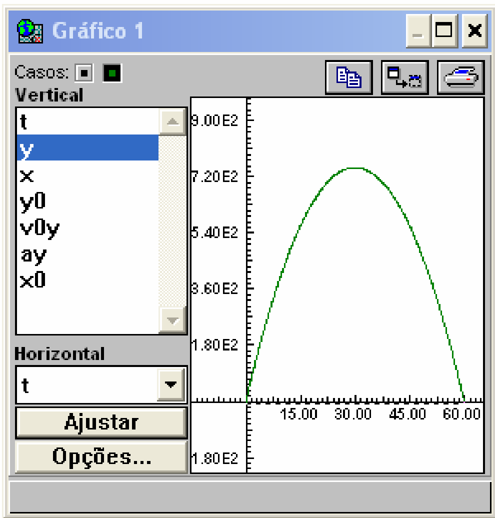
7. Executa novamente o modelo e clica no quadradinho na janela de gráficos referente ao primeiro caso de modo a veres apenas o gráfico de *y* referente ao segundo caso:

8. Como podes ver no gráfico, ao fim de 50 s a ordenada vertical ainda não

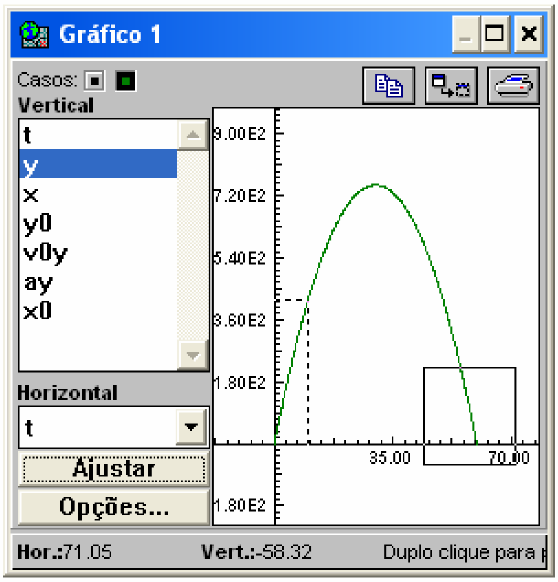
O primeiro caso foi <<desligado>>.



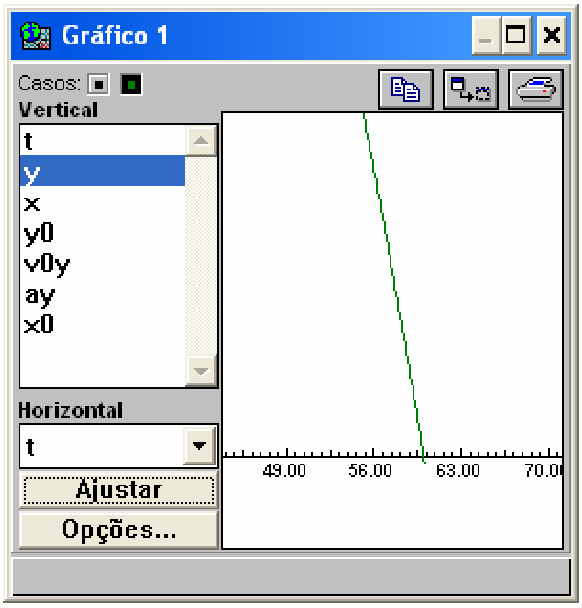
voltou ao valor inicial, o valor $y = 0$, que corresponde ao ponto de partida. É necessário aumentar mais o limite superior de *t*. Aumenta esse valor para 60 (no botão **Opções…** da janela de **Controle**) e continua a execução do modelo. Obténs o seguinte gráfico:



9. Como podes observar neste gráfico, o valor de *y* é aproximadamente 0 quando $t = 60$. Podes melhorar esta estimativa fazendo *zoom* sobre o gráfico na zona próxima de $t = 60$. Para tal, arrasta o *“mouse”* com o botão esquerdo pressionado nessa zona:



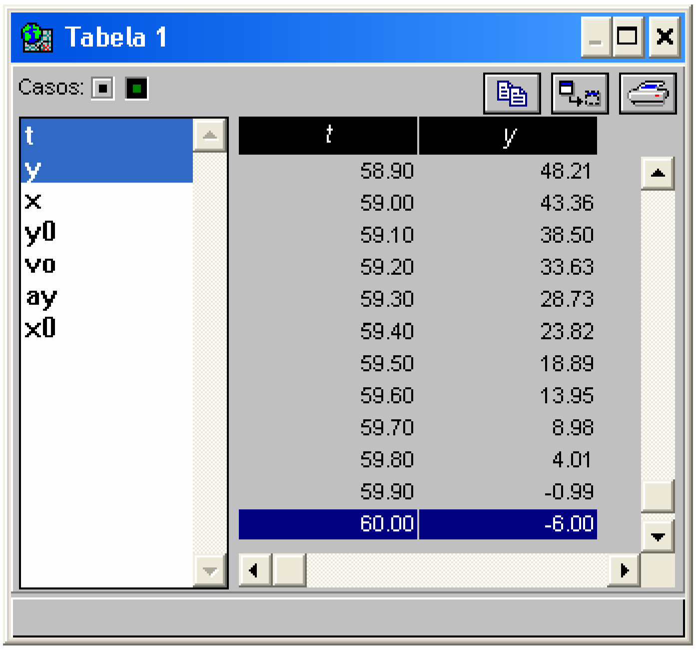
10. Obténs essa zona ampliada:



11. Podes voltar a fazer *zoom*, mais perto de $t = 60$:

12. Como podes observar no gráfico, o valor y é nulo para um valor de t superior a 59 s e inferior a 60 s, sendo o verdadeiro valor mais perto de 60 s do que de 59 s.

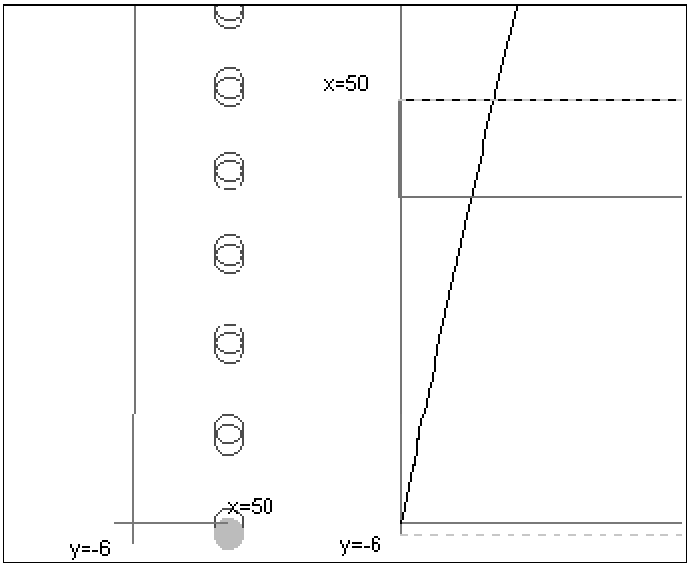
13. Portanto, podemos dizer que, na Lua, a bola demorava aproximadamente 60 s a voltar ao ponto de partida. E que altura atingia? (Se necessário, cria uma tabela de resultados para obteres a resposta).



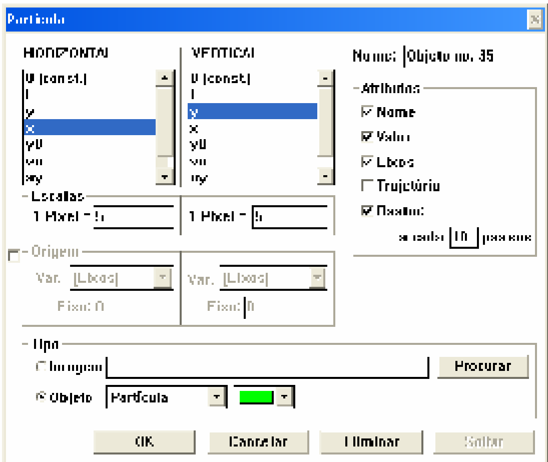
t	*y*
58.90	48.21
59.00	43.36
59.10	38.50
59.20	33.63
59.30	28.73
59.40	23.82
59.50	18.89
59.60	13.95
59.70	8.98
59.80	4.01
59.90	-0.99
60.00	-6.00

Animação do lançamento na Lua

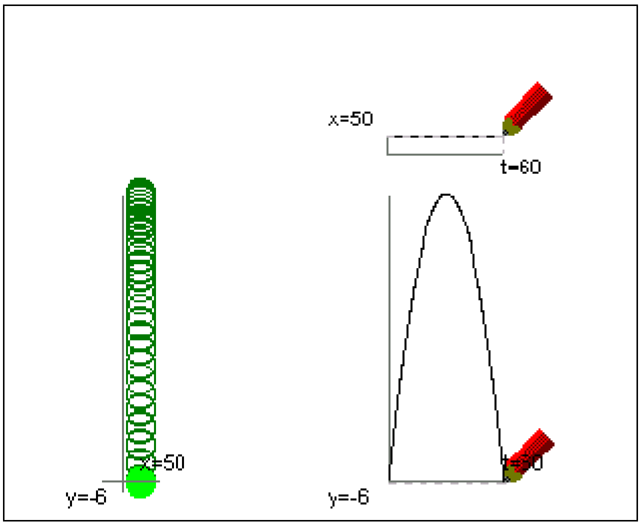
1. Como podes observar na janela de animação, se selecionares o **Caso 2** (verde) no topo da janela, as escalas utilizadas na animação do movimento e dos gráficos não são muito adequadas:



2. É necessário, pois, mudar estas escalas. Clica com o botão direito sobre a bola e muda a escala **Horizontal** e **Vertical** para 1 ponto =5 unidades:



3. Muda também as escalas dos dois gráficos para valores adequados. Por exemplo, na escala **Horizontal** pode ser 1 ponto = 1 unidade e na escala **Vertical** 1 ponto = 5 unidades. Depois de executares o modelo, deves obter algo semelhante a:



Experimenta

Qual seria a altura máxima da bola se fosse lançada, em condições idênticas, nos seguintes planetas (para cada um está indicado o respectivo *módulo* da aceleração da gravidade local):

1. Marte (3.7 m/s $^{2)}$?
2. Vênus (8.9 m/s ^{2})?
3. Júpiter (24.8 m/s ^{2})?