

# Introdução à Astronomia

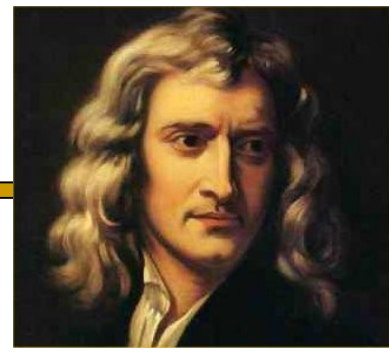
---

## **Leis de Newton e Forças Gravitacionais**

Rogério Riffel

# Leis de Newton

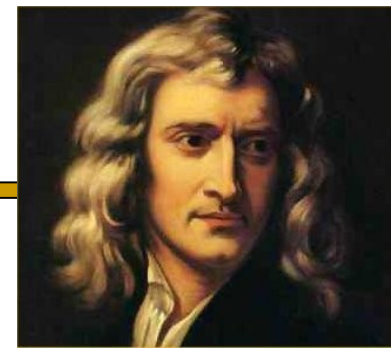
<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>



- Newton era adepto das ideias de Galileo.
- Galileo: “Um corpo que se move, continuará em movimento a menos que uma força seja aplicada e que o force a parar”
- Foi uma comprovação experimental de Galileo.
- Galileo, que descobriu os satélites de Júpiter, comunicou seus dados a Kepler, que verificou que eles obedeciam às Três Leis de Kepler, porém com um valor da constante K diferente na terceira Lei.
- 60 anos mais tarde Newton deu uma explicação completa ao movimento e como as forças atuam (1665).

# Leis de Newton

<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>

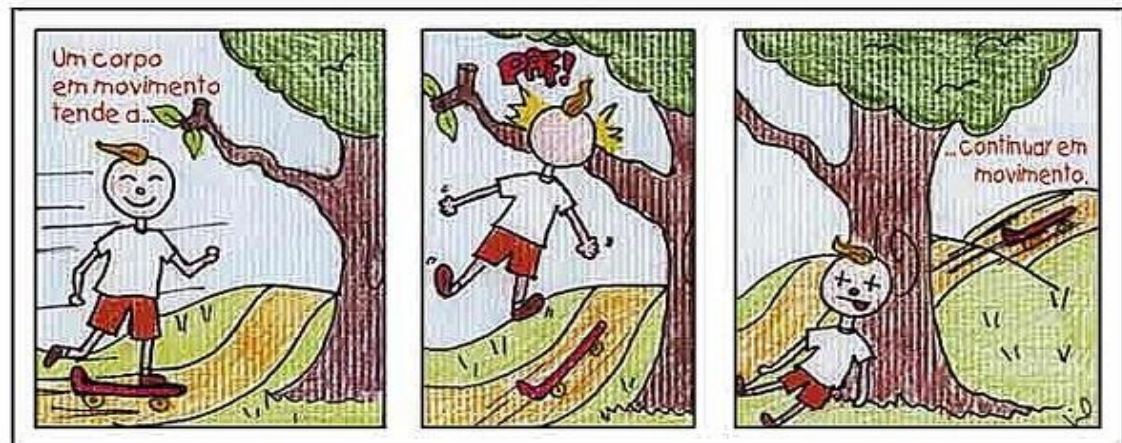


- Primeira Lei de Newton: Lei da Inércia

“Na ausência de forças externas, um objeto em repouso permanece em repouso, e um objeto em movimento permanece em movimento, ficando em movimento retilíneo e com velocidade constante. Esta propriedade do corpo que resiste à mudança, chama-se **inércia**. A medida da inércia de um corpo é seu momentum.”

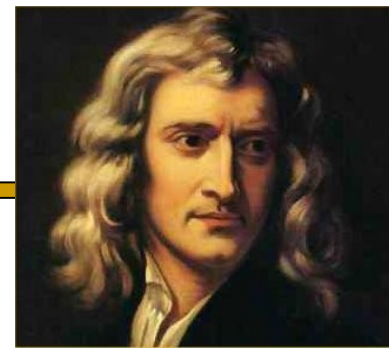
$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{constante se } \vec{F} = 0$$

Referencial Inercial.



# Leis de Newton

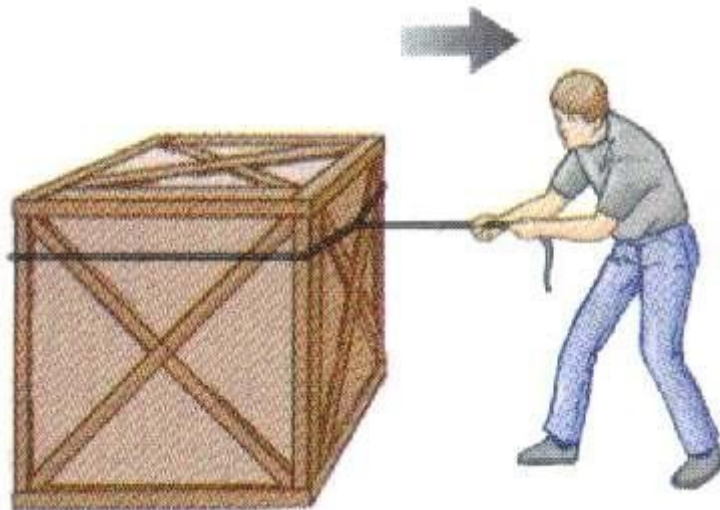
<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>



- Segunda Lei de Newton: Lei da Força

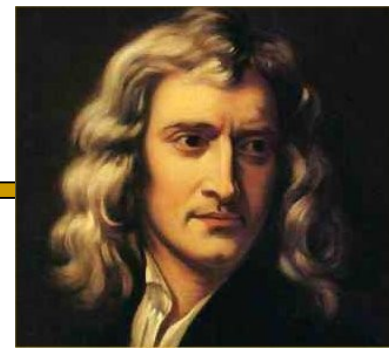
“A força líquida aplicada a um objeto é igual à massa do objeto vezes a aceleração causada ao corpo por esta força. A aceleração é na mesma direção da força.”

$$\vec{F} = m \times \vec{a} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



# Leis de Newton

<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>



- Segunda Lei de Newton: Lei da Força.

“A força líquida aplicada a um objeto é igual à massa do objeto vezes a aceleração causada ao corpo por esta força. A aceleração é na mesma direção da força.”

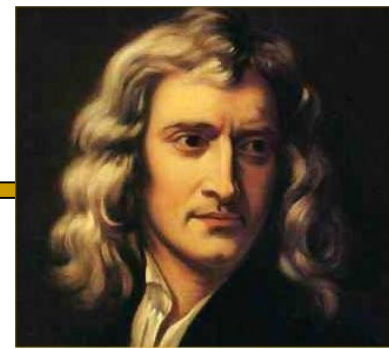
$$\vec{F} = m \times \vec{a} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Taxa de Variação da  
Velocidade  
com o tempo

Taxa de Variação do  
momentum  
com o tempo

# Leis de Newton

<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>



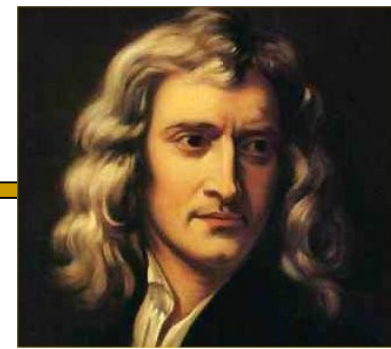
- Terceira Lei de Newton: Ação e Reação

“Para cada ação existe uma reação igual e oposta.”



# Leis de Newton

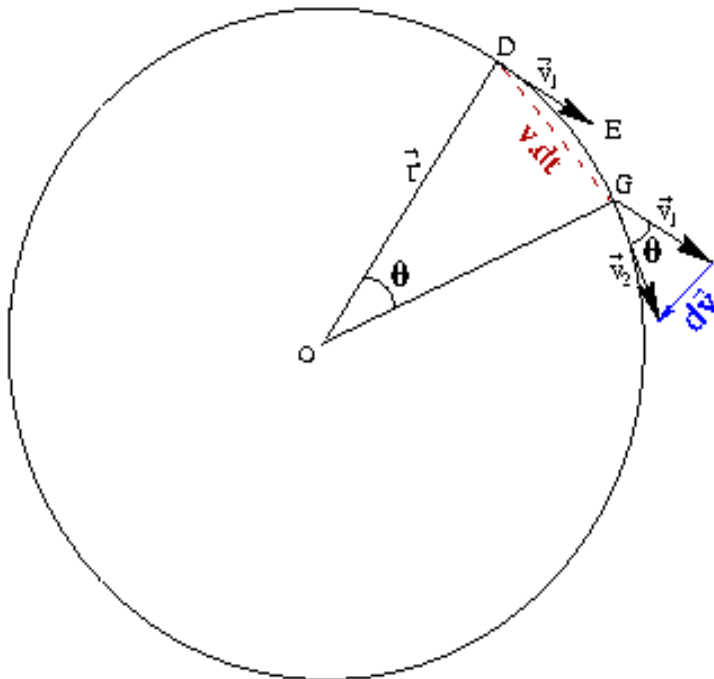
<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>



- Lei da Gravitação Universal

Como foi que Newton descobriu a Lei da Gravitação Universal?  
Considerando o movimento da Lua em torno da Terra e as leis de Kepler.

Aceleração em Orbitas Circulares



No Quadro

$$\theta = \frac{v \Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

# Leis de Newton

<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>

- Lei da Gravitação Universal

A força centrípeta que o Sol exerce sobre um planeta de massa  $m$ , que se move com velocidade  $v$  à uma distância  $r$  do Sol, é dada por:

$$F = m \frac{v^2}{r}.$$

Para uma órbita circular o período  $P$  do planeta é dado por:

$$P = \frac{2\pi r}{v} \implies v = \frac{2\pi r}{P}$$



# Leis de Newton

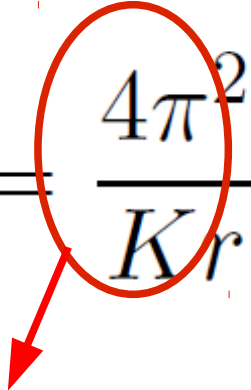
<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>

- Lei da Gravitação Universal

Lembrando da terceira lei de Kepler:

$$P^2 = K r^3$$

Onde a constante K depende apenas das unidades de P e r:

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{K r^3} = \frac{4\pi^2}{K r} \implies v^2 \propto \frac{1}{r}.$$


Constante

# Leis de Newton

<http://www.astro.ufrgs.br/bib/newton.htm>

- Lei da Gravitação Universal

Seja  $m$  a massa do planeta e  $M$  a massa do Sol. Substituindo-se esta velocidade na expressão da força centrípeta exercida pelo Sol no planeta, a força pode então ser escrita como:

$$F \propto \frac{m}{r^2}; \quad \text{Pela terceira lei de Newton:} \quad F \propto \frac{M}{r^2}$$

Assim Newton deduziu que:

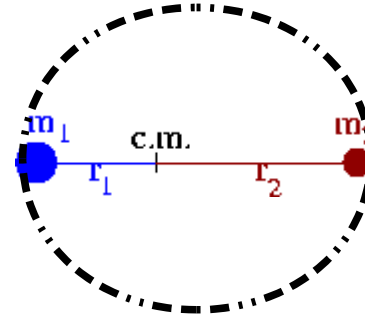
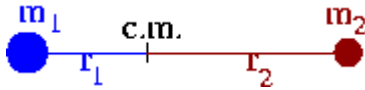
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$G$  = Constante Gravitacional

$$G = 6,67428(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

# Derivação da “Constante” K

- Suponha dois corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  orbitando em torno do centro de massa.



Atração Gravitacional entre eles:

$$F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2}$$

Força centrípeta em cada um:

$$F_1 = \frac{m_1v_1^2}{r_1}$$

$$F_2 = \frac{m_2v_2^2}{r_2}$$

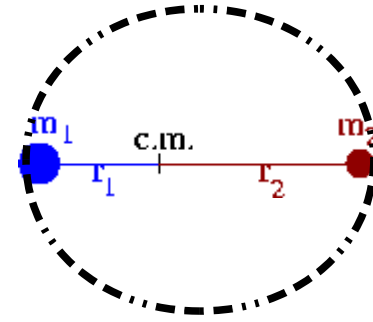
A velocidade média da partícula  $m_1$  é:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} \implies v_1^2 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{P^2}$$

O Mesmo é  
válido para  
 $m_2$

# Derivação da “Constante” K

- Pela terceira lei de Newton



Para partícula 1:

$$F_1 = F_2 = F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_1v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2m_1r_1}{P^2}$$

Para partícula 2:

$$F_1 = F_2 = F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_2v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2m_2r_2}{P^2}$$

# Derivação da “Constante” K

- Pela terceira lei de Newton

Para partícula 1:

$$F_1 = F_2 = F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_1v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2m_1r_1}{P^2}$$

Para partícula 2:

$$F_1 = F_2 = F_G = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{m_2v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2m_2r_2}{P^2}$$

Eliminando-se  $m_1$  na primeira e  $m_2$  na segunda e somando-se, obtemos:

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{(r_1 + r_2)^2} = \frac{4\pi^2(r_1 + r_2)}{P^2},$$

# Derivação da “Constante” K

A expressão anterior pode ser escrita como:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} (r_1 + r_2)^3$$

Como:

$$P^2 = K a^3$$

Logo:

$$K = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

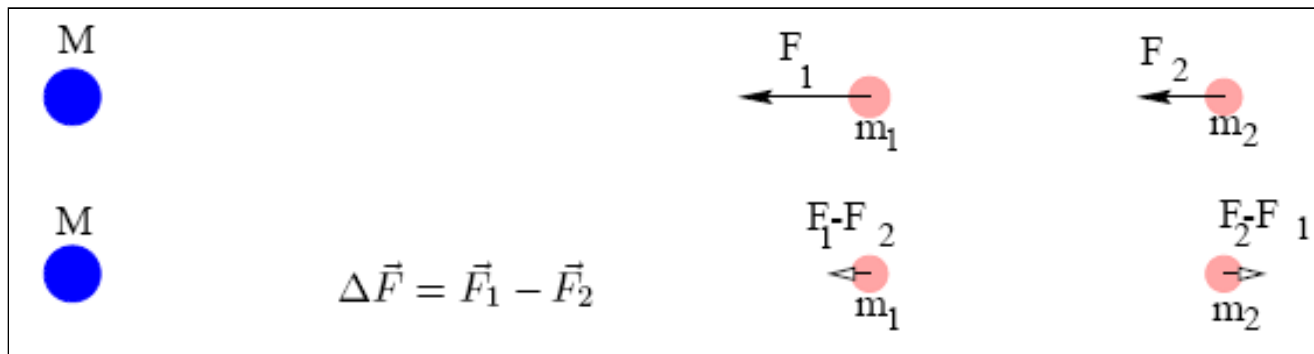
A constante de kepler não é uma constante, pois depende das massas.

$$(M_{\odot} + m_p) \left( \frac{P^2}{a^3} \right)_{\odot} = (M_J + m_s) \left( \frac{P^2}{a^3} \right)_J = \textit{constante}$$

# Parte II

# Derivação da força diferencial

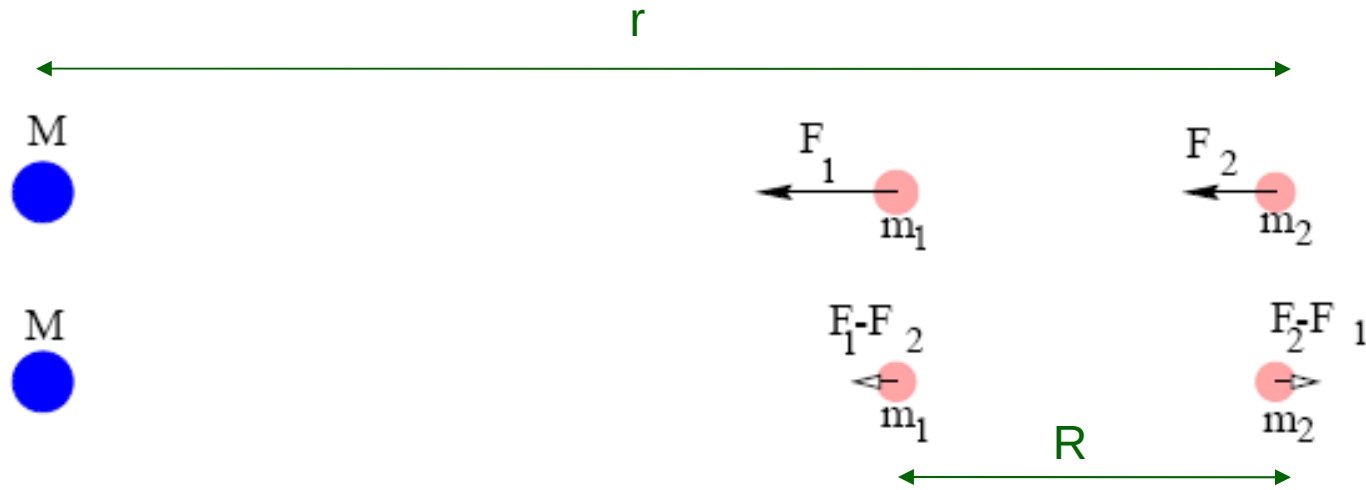
- A *força gravitacional diferencial* é a diferença entre as forças exercidas em duas partículas vizinhas por um terceiro corpo, mais distante;
- Responsáveis por fenômenos como a precessão e as marés;



- A força diferencial tende a separar as duas partículas, pois em relação ao centro de massa elas se afastam.



# Derivação da força diferencial



$$\Delta F = F_1 - F_2$$

$$F_1 = \frac{GMm_1}{(r - R)^2}$$

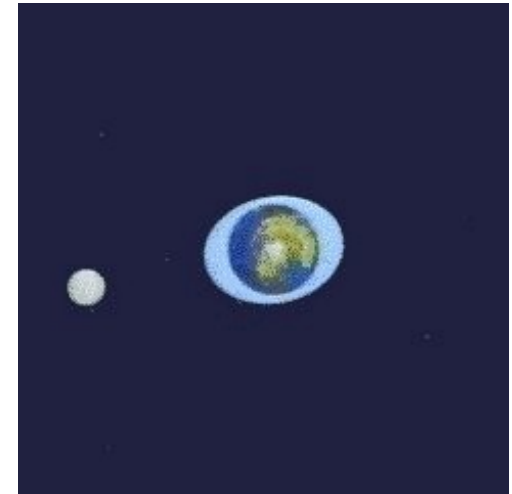
$$F_2 = \frac{GMm_2}{r^2}$$

$$\Delta F = \frac{2GMm}{r^3}R$$

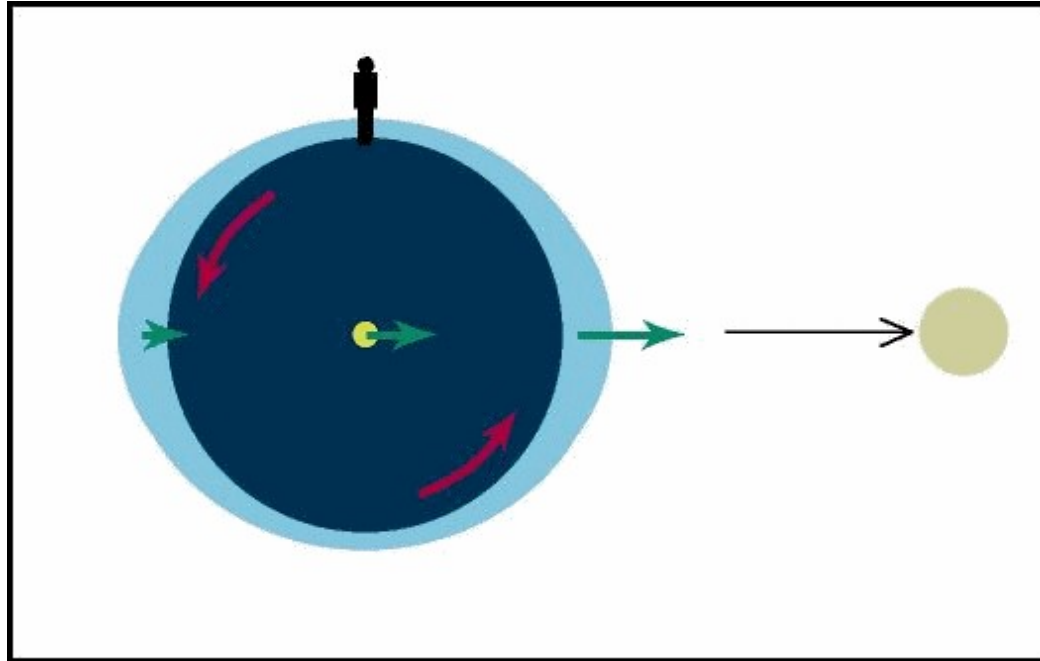
Ver livro texto ou  
hipertexto

# Marés

- Atração gravitacional exercida pelo Sol e Lua na Terra;
- A atração gravitacional sentida por cada ponto da Terra devido à Lua (Sol) depende da distância do ponto a Lua;
- Em relação ao centro da Terra, um lado está sendo puxado na direção da Lua e o outro sendo puxado na direção contrária.

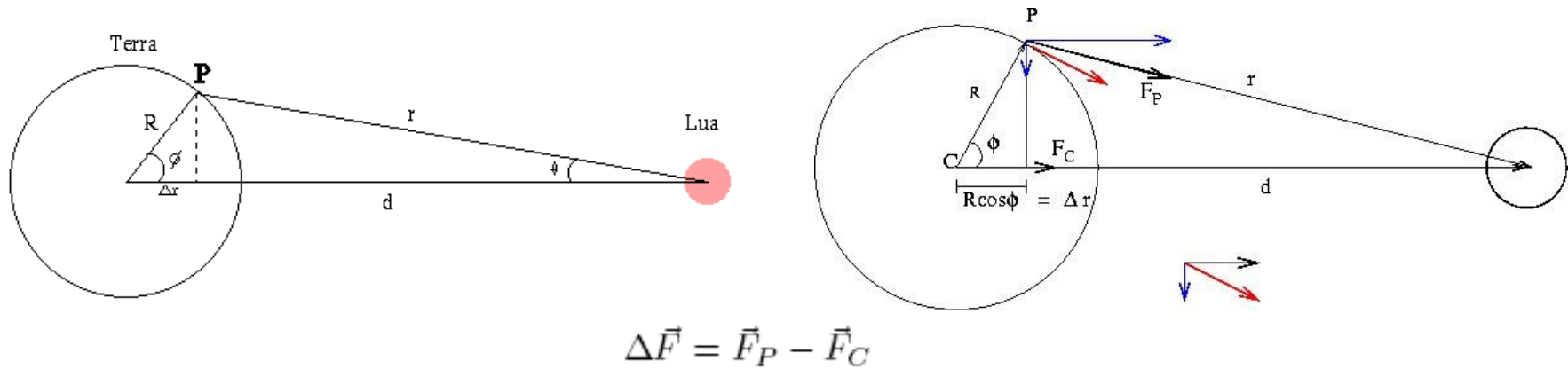


# Marés

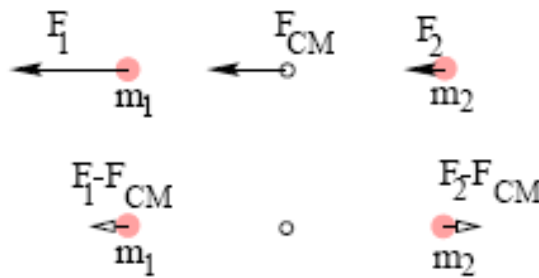


As marés acontecem duas vezes a cada 24h 48min, que é a duração do dia lunar

# Marés



Como  $r$  é muito maior do que  $R$ ,  $\theta$  é muito pequeno e  $F_P$  é quase paralela a direção de  $F_C$ .



$$\Delta F = \frac{2GMm}{r^3} \Delta r$$

$$\Delta F \propto \frac{M}{d^3} R$$

# Marés na Terra pela Lua e pelo Sol

$$\Delta F \propto \frac{M}{d^3} R$$

$$\frac{dF_{\odot}}{dF_L} = \frac{M_{\odot}}{M_L} \left( \frac{d_L}{d_{\odot}} \right)^3 = \frac{2 \times 10^{30} \text{ kg}}{7,35 \times 10^{22} \text{ kg}} \left( \frac{384\,000 \text{ km}}{149\,600\,000 \text{ km}} \right)^3 = 0,46$$

A força de maré aplicada pela Lua na Terra é mais de 2 vezes maior do que a aplicada pelo Sol.

# Marés e a rotação sincronizada da Lua

$$dF_{(T \rightarrow L)} = \frac{2GM_{\text{Terra}}m_{\text{partícula}}}{d_{L-T}^3} R_{\text{Lua}}$$

Força de maré causada pela Terra em uma partícula na Lua

$$dF_{(L \rightarrow T)} = \frac{2GM_{\text{Lua}}m_{\text{partícula}}}{d_{L-T}^3} R_{\text{Terra}}$$

Força de maré causada pela Lua em uma partícula na Terra

$$dF_{(T \rightarrow L)} = \frac{M_{\text{Terra}}}{M_{\text{Lua}}} \frac{R_{\text{Lua}}}{R_{\text{Terra}}} dF_{(L \rightarrow T)} \simeq 20dF_{(L \rightarrow T)}$$

A força de maré causada pela Terra na Lua é aproximadamente 20 vezes maior do que a força de maré causada pela Lua na Terra.

# Marés e a rotação sincronizada da Lua

---

- Acredita-se, que no passado o período de rotação da Lua era menor do que o seu período de translação em torno da Terra;
- Ao girar, ela tentava arrastar consigo os bojos de maré, que sempre ficavam alinhados na direção da Terra;
- Movimento relativo entre diferentes partes da Lua, que gerava atrito, que por sua vez tendia a frear a rotação.
- Rotação sincronizada com a translação: Marte, Phobos e Deimos; cinco luas de Júpiter; 9 luas de Urano; a lua Tritão de Netuno; Plutão-Caronte.

# Limite de Roche

---

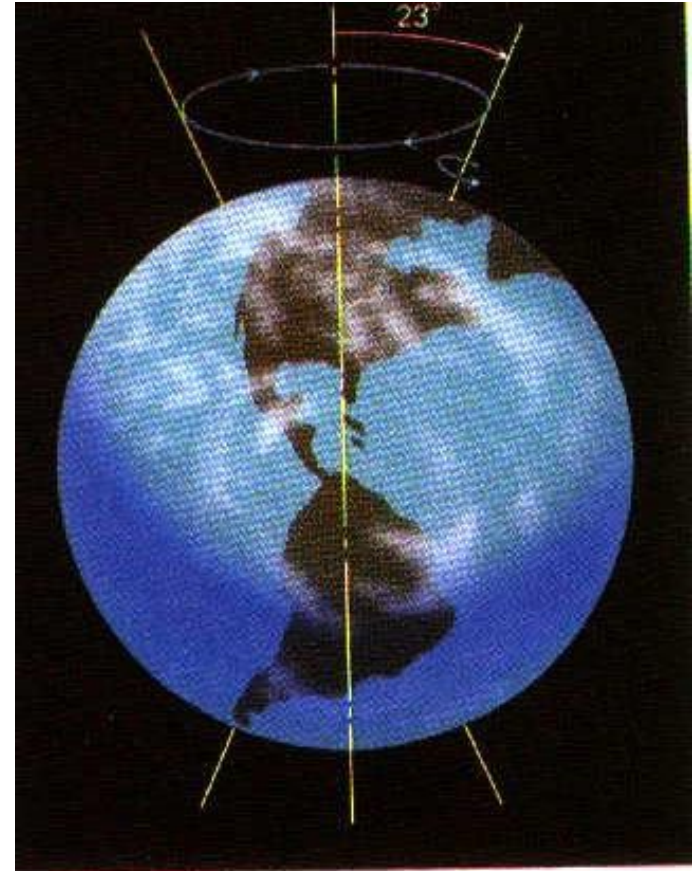
- É a distância mínima do centro do planeta que um satélite fluido pode chegar sem se tornar instável frente a rompimento por maré.

$$d = 2,44 \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3} R.$$



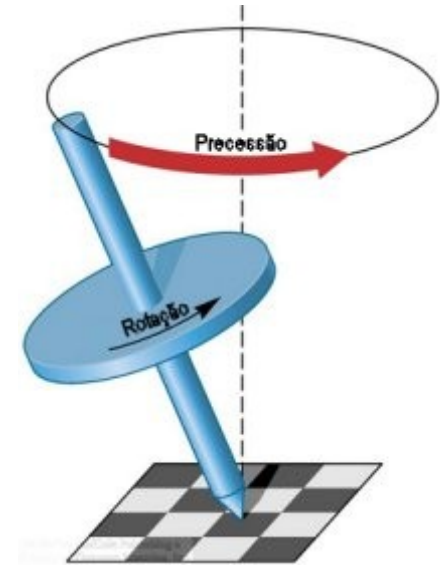
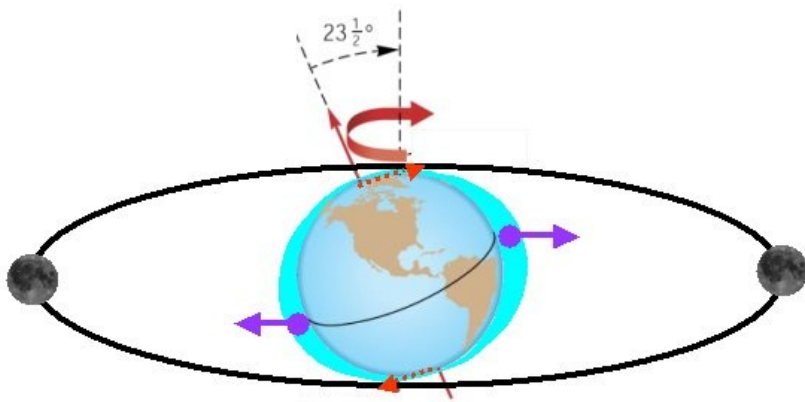
# Precessão

- A Terra não é perfeitamente esférica, mas achatada nos pólos e bojuda no equador ( $d_E$  é  $40 \text{ km} > d_P$ );
- O plano de equador terrestre, e portanto o plano do bojo equatorial, está inclinado  $\sim 23^\circ$  em relação a eclíptica, que por sua vez está  $\sim 5^\circ$  em relação ao plano da órbita da Lua;
- As forças diferenciais (mais importantes nos bojos) tentem não apenas achatá-la mais ainda, mas também tendem a “endireitar” o seu eixo, alinhando-o com o eixo da eclíptica.



# Precessão

- Como a Terra está girando, o eixo da Terra não se alinha com o eixo da eclíptica, mas *precessiona* em torno dele, da mesma forma que um pião posto a girar precessiona em torno do eixo vertical ao solo



$$\vec{N} = \vec{r} \times m\vec{g}.$$

Torque

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

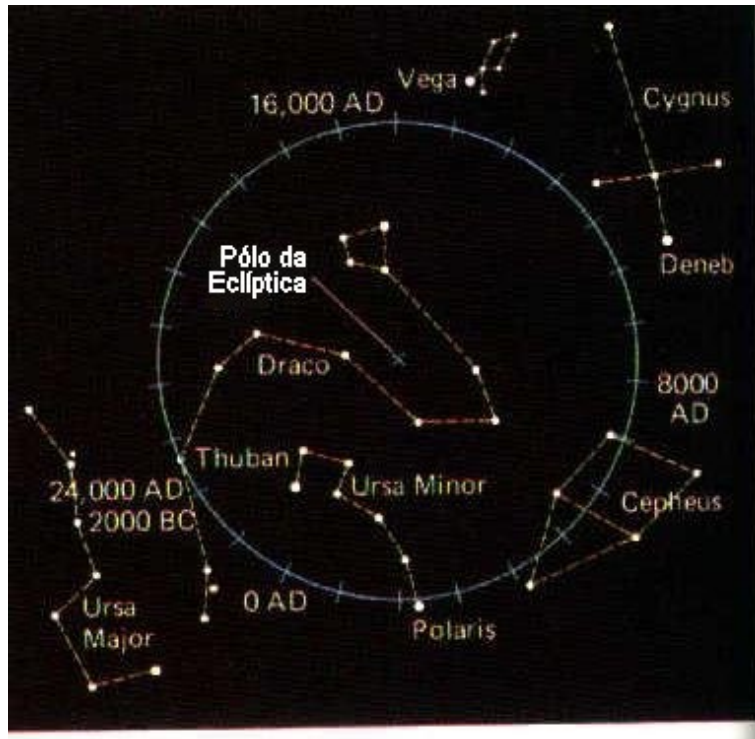
$$d\vec{L} = \vec{N} dt$$

Varição do momentum angular

Como  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{N}$  são perpendiculares o torque não altera o módulo de  $\mathbf{L}$ , mas apenas sua direção, fazendo-o precessionar em torno do eixo perpendicular ao solo.

# Precessão

- No caso da Terra, **as forças diferenciais gravitacionais da Lua e do Sol produzem um torque** que tende a alinhar o eixo de rotação da Terra com o eixo da eclíptica, mas como esse torque é perpendicular ao momentum angular de rotação da Terra, **seu efeito é mudar a direção do eixo de rotação, sem alterar sua inclinação.**



Variação do pólo Norte celeste em relação ao pólo da eclíptica

Cada pólo celeste se move lentamente em torno do respectivo pólo da eclíptica, descrevendo uma circunferência em torno dele com raio de  $23,5^\circ$ .

O tempo necessário para descrever uma volta completa é 25 770 anos.

Atualmente o Pólo Celeste Norte está nas proximidades da estrela Polar, na constelação da Ursa Menor, mas isso não será sempre assim. Daqui a cerca de 13000 anos ele estará nas proximidades da estrela Vega, na constelação de Lira.

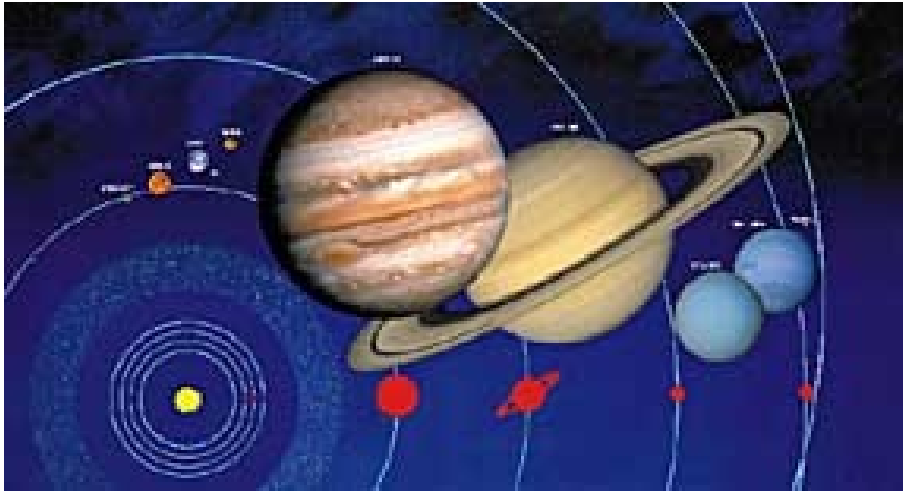
# Precessão

---

- A precessão não tem nenhum efeito importante sobre as estações, uma vez que o eixo da Terra mantém sua inclinação de  $23,5^\circ$  em relação ao eixo da eclíptica enquanto precessiona em torno dele .
- Como o ano do nosso calendário é baseado nos equinócios, a primavera continua iniciando em setembro no hemisfério sul, e em março no hemisfério norte.
- A única coisa que muda são as estrelas visíveis no céu durante a noite em diferentes épocas do ano.
- A intensidade das estações pode ser alterada. Atualmente é **verão** no hemisfério Sul quando o Sol está no **periélio** e **inverno** no hemisfério Sul quando o Sol está no **afélio**. Em ~13000 anos a situação se reverterá.

**Nutação:** Componente não circular (bamboleio) do movimento do pólo da terra em torno do pólo da eclíptica, causada principalmente por pequenas variações na inclinação da órbita da lua e pelo deslocamento da linha dos nodos da órbita. Principal componente:  $9,5''$  de amplitude e período 18,613 anos.

# O Sistema Solar



- Sol
- Planetas com suas luas e anéis
- Asteróides
- Cometas

Tabela 14.1: Massa no Sistema Solar

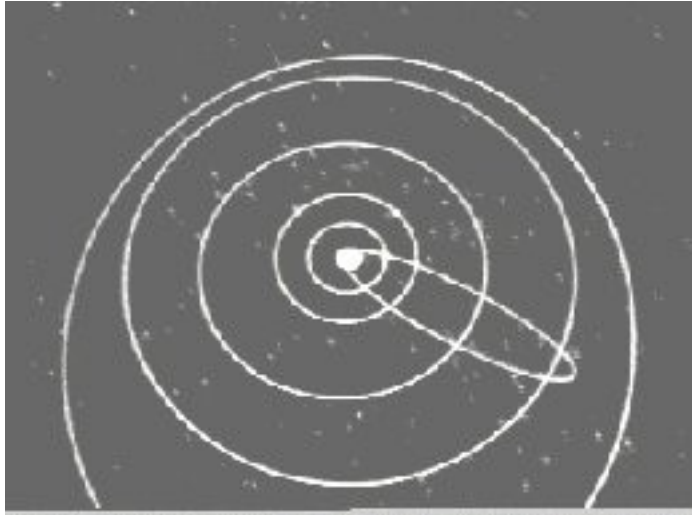
Componente	Massa
Sol	99,85%
Júpiter	0,10%
Demais planetas	0,04%
Cometas	0,01% (?)
Satélites e anéis	0,000 05%
Asteróides	0,000 000 2%
Meteoróides e poeira	0,000 000 1% (?)

Tabela 14.2: Composição Química da Atmosfera do Sol

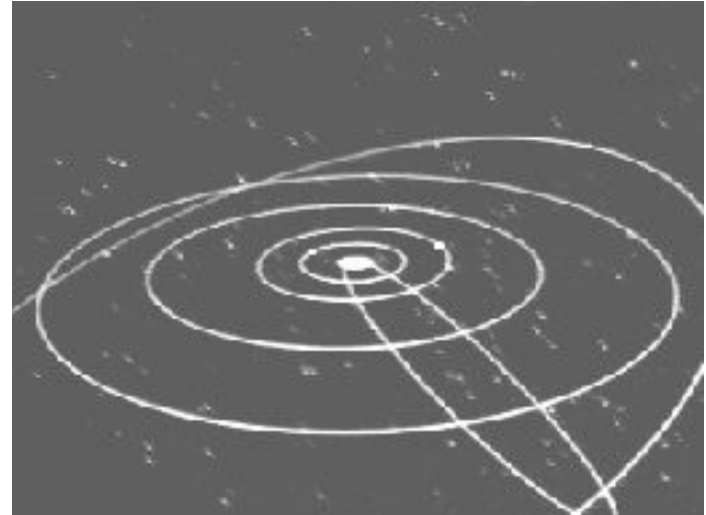
Elemento	Z	A	Percentagem em massa	Percentagem em número de partículas
H	1	1	70,57 %	91,2%
He	2	4	27,52%	8,7%
O	8	16	0,9592%	0,078%
C	6	12	0,3032%	0,043%
Ne	10	20	0,1548%	
Fe	26	56	0,1169%	
N	7	14	0,1105%	
Si	14	28	0,0653%	
Mg	12	24	0,0513%	
S	16	32	0,0396%	
Ne	12	24	0,0208%	
Mg	12	26	0,0079%	
Ar	18	36	0,0077%	
Fe	26	54	0,0072%	
Mg	12	25	0,0069%	
Ca	20	40	0,0060%	
Al	13	27	0,0058%	
Ni	28	58	0,0049%	
C	6	13	0,0037%	
He	2	3	0,0035%	
Si	14	29	0,0034%	
Na	11	23	0,0033%	
Fe	26	57	0,0028%	
Si	14	30	0,0024%	
H	1	2	0,0023%	

## Composição Química da Atmosfera do Sol

# O Sistema Solar



Órbitas dos planetas externos em torno do Sol e do cometa Halley



A órbita de Plutão é inclinada  $17^\circ$  em relação ao plano médio dos outros planetas