Raciocínios geométricos

Prof. Fernando Lang da Silveira – IF-UFRGS

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

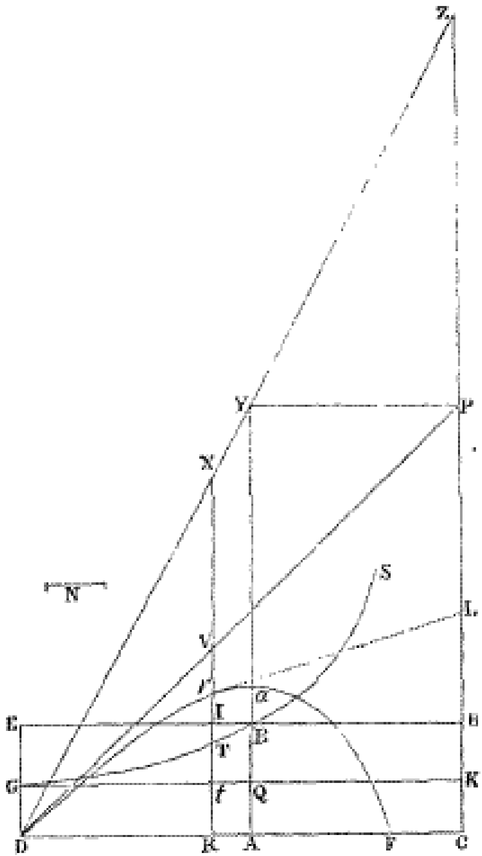
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

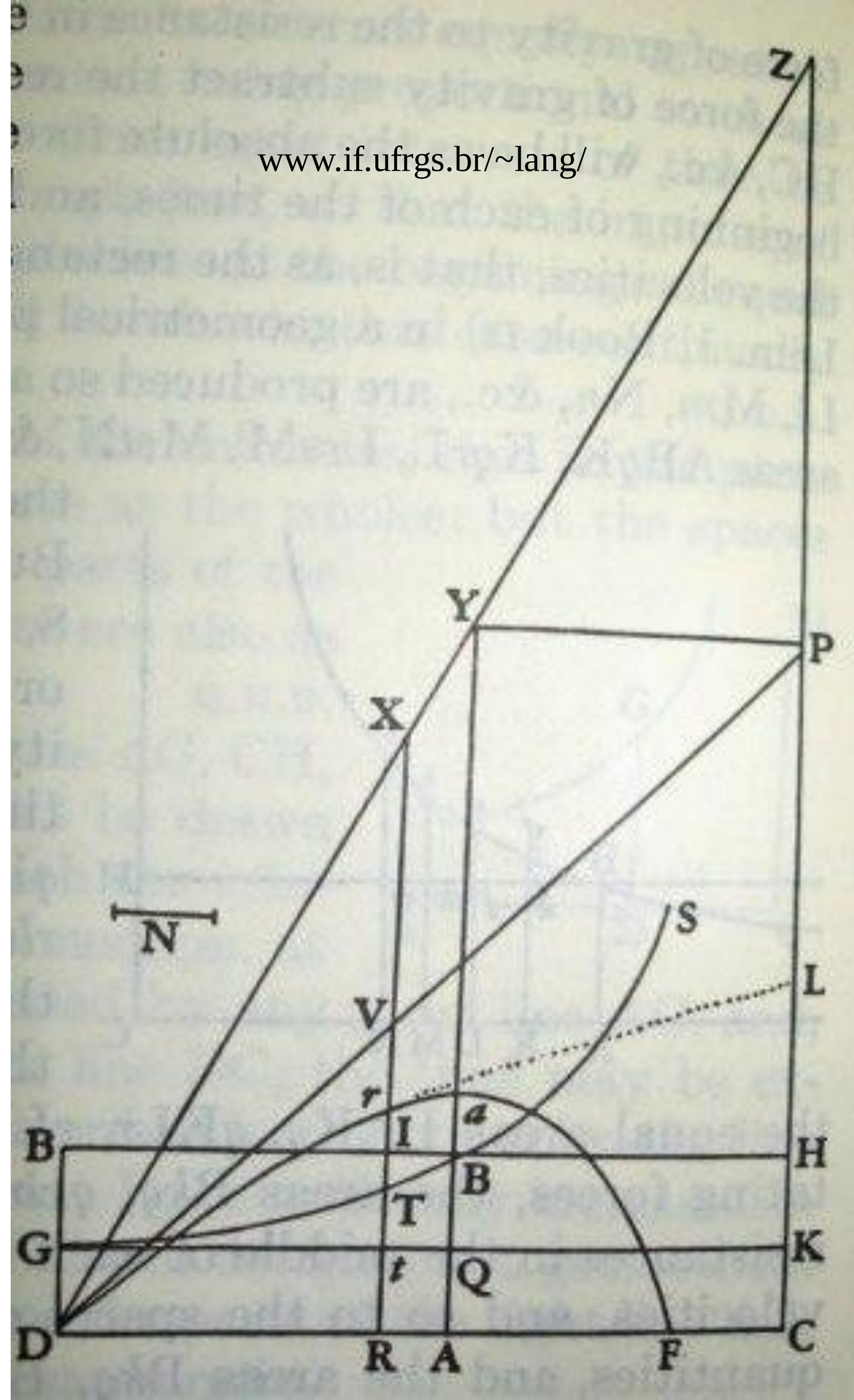
secando DC in A, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. Et inde datur curva $DraF$.

Corol. 5. Et contra, si datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia medii in locis singulis r. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia medii sub initio motus, tum latus rectum parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.



Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ sit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; & ex aucta velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illa simplici, ideoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam $DraF$ ex phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, CDp & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, assumpta quacunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis SM.

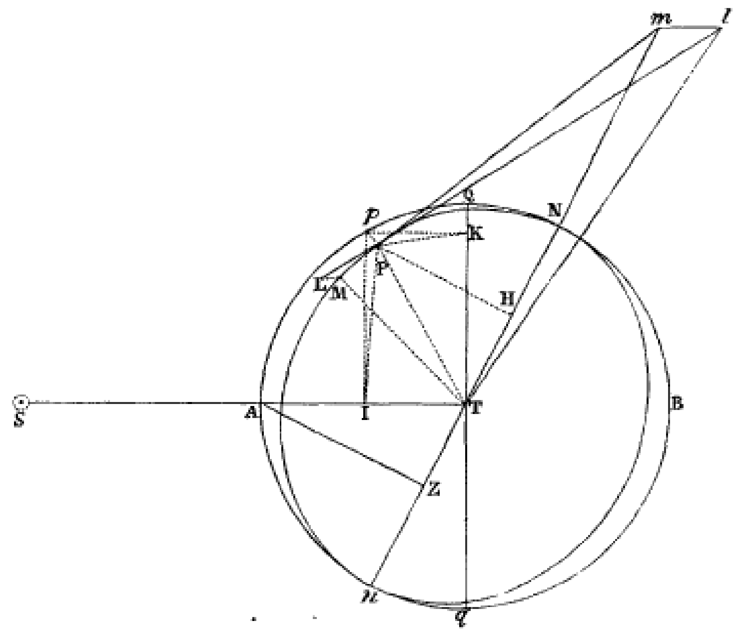


excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

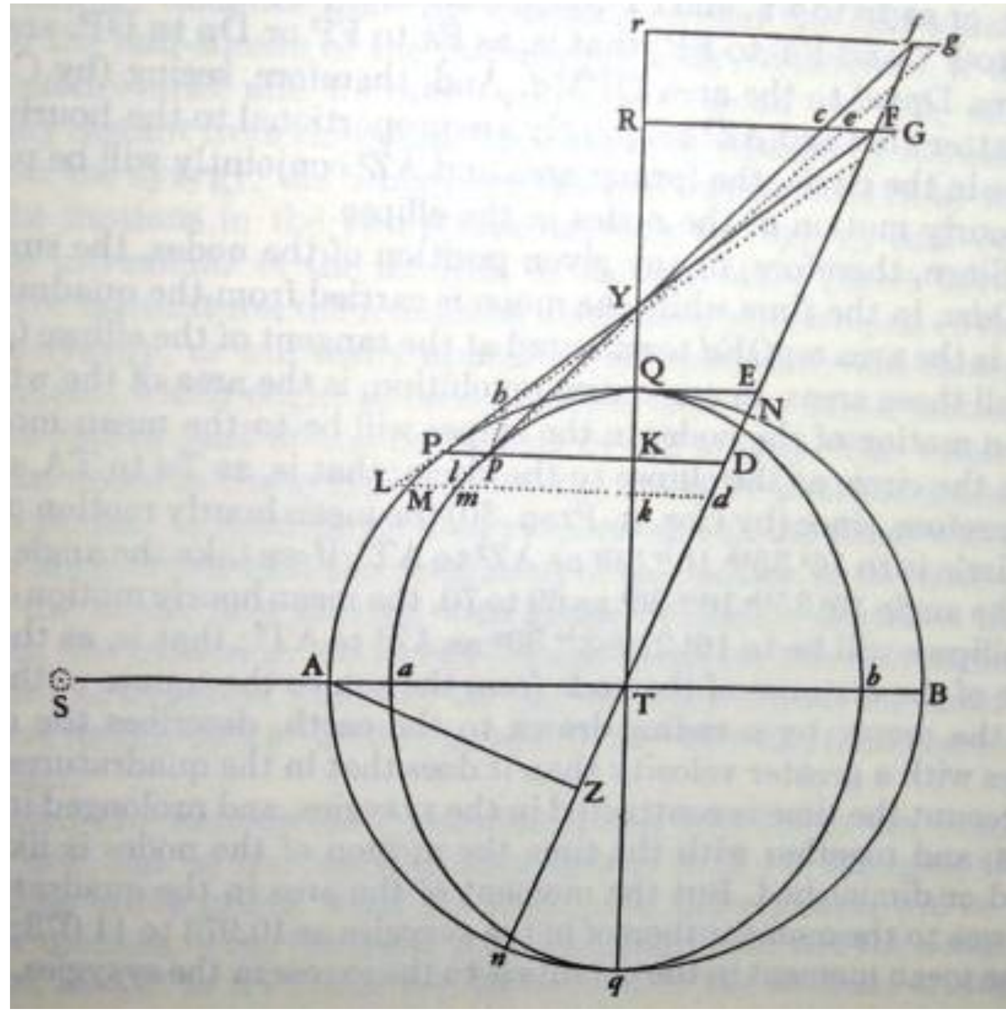
PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

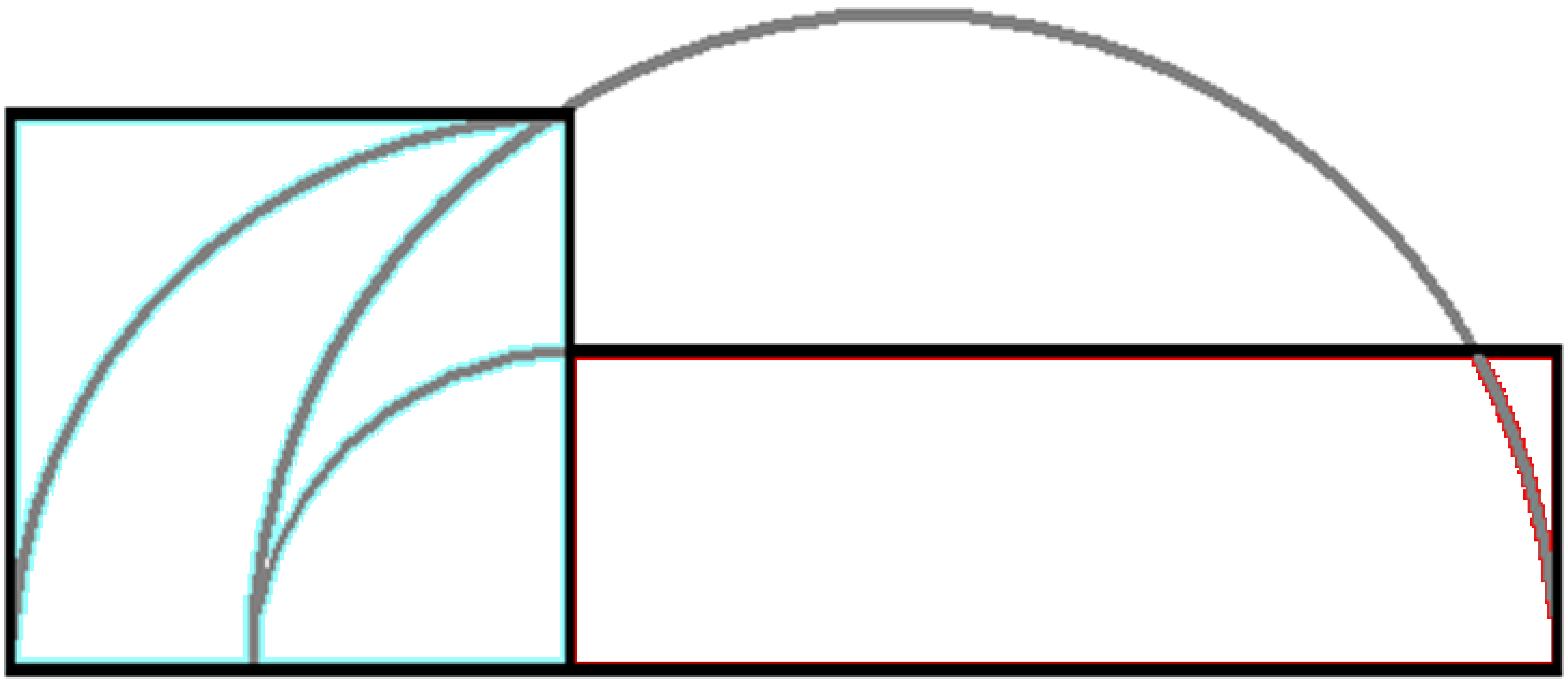
Designet S solem, T terram, P lunam, NPn orbem lunæ, Npn vestigium orbis in plano eclipticæ; N, n nodos, $nTNm$ lineam nodorum infinite productam; PI, PK perpendicula demissa in lineas ST, Qq; Pp perpendiculum demissum in planum eclipticæ; AB syzygias lunæ in plano eclipticæ; AZ perpendiculum in lineam



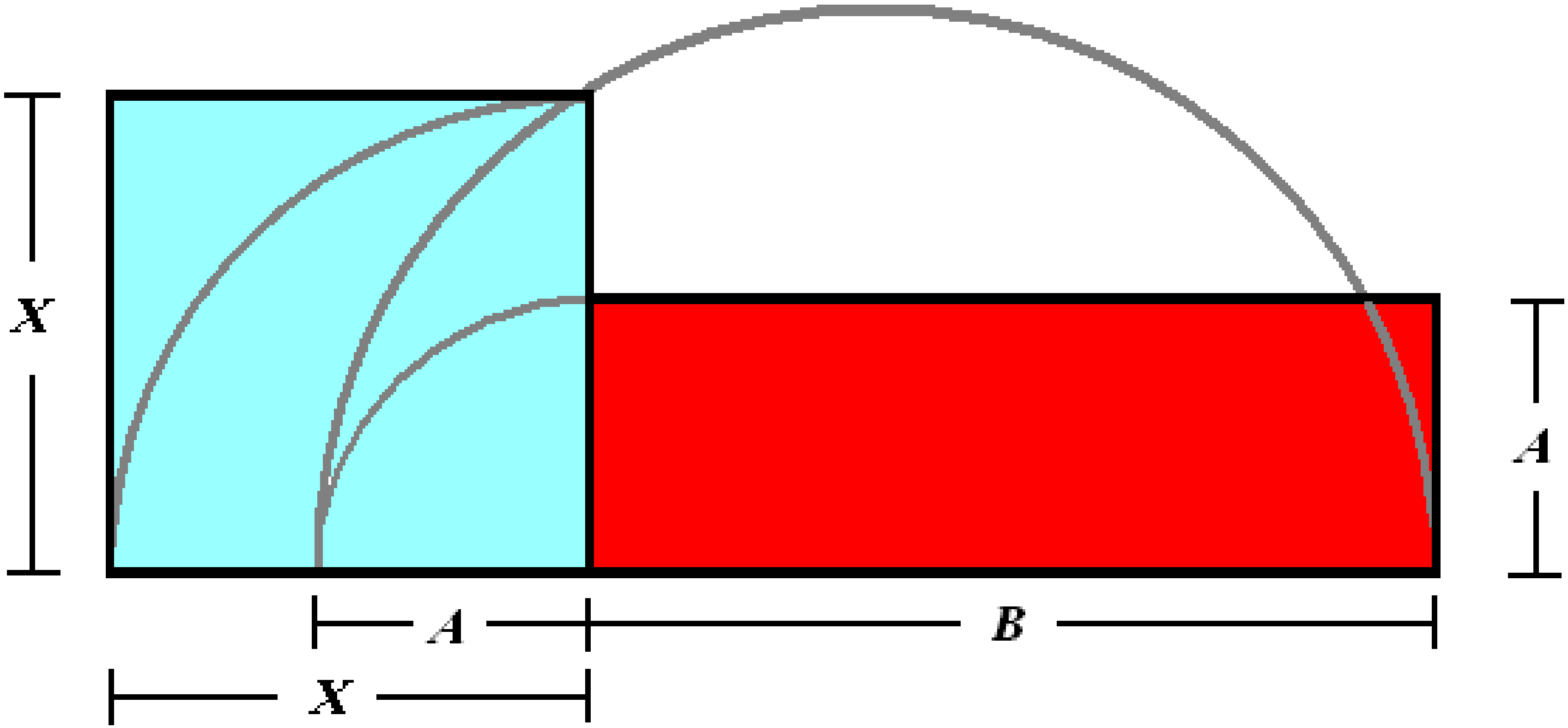
nodorum Nn; Q, q quadraturas lunæ in plano eclipticæ, & pK perpendiculum in lineam Qq quadraturis interjacentem. Vis solis ad perturbandum motum lunæ (per prop. XXV) duplex est, altera lineæ LM in schemate propositionis illius, altera lineæ MT proportionalis. Et luna vi priore in terram, posteriore in solem secundum lineam



O que representa o diagrama?



O que representa o diagrama?



As linhas curvas são arcos de circunferência.

Os antigos matemáticos gregos (Pitágoras, Tales, Euclides, ...) desenvolveram a GEOMETRIA.

Essa ciência era muito valorizada, especialmente por Platão (428/7 – 348/7 A. C.). No pórtico de sua Academia encontrava-se a seguinte frase:

*Quem não conhece **GEOMETRIA**, aqui não entra.*

Os negociantes e os guerreiros devem aprender Logística (técnica de computação).

O filósofo deve aprender Aritmética e Geometria *"porque deve subir acima do mar de mudanças e captar o verdadeiro ser"* (Platão).

Teoria dos Dois Mundos: o ***Mundo das Idéias ou Formas*** e o ***Mundo Sensível***.

O ***Mundo Sensível*** é uma sombra do ***Mundo das Idéias***.

Conhecer é recordar (a *teoria da anamnese ou da recordação* e a *teoria da reencarnação*).

A Matemática está no *Mundo das Idéias*.

Os antigos gregos não conheciam a Álgebra abstrata. Os seus raciocínios matemáticos, as suas provas, as suas demonstrações eram geométricas.

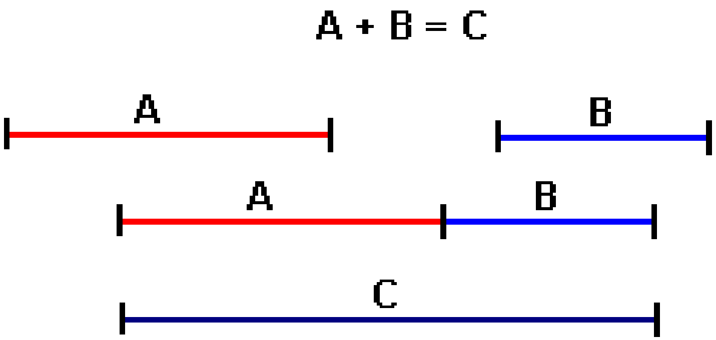
Um antigo *geômetra* grego não entenderia a seguinte expressão:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Entretanto, ele sabia demonstrar *geometricamente* este produto notável.

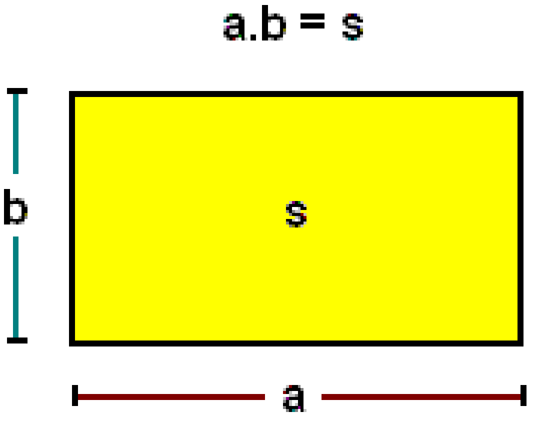
EXEMPLOS DE RACIOCÍNIOS GEOMÉTRICOS:

SOMAR DUAS GRANDEZAS É CONSTRUIR UM SEGMENTO DE RETA PELA JUSTAPOSIÇÃO DE DOIS SEGMENTOS.



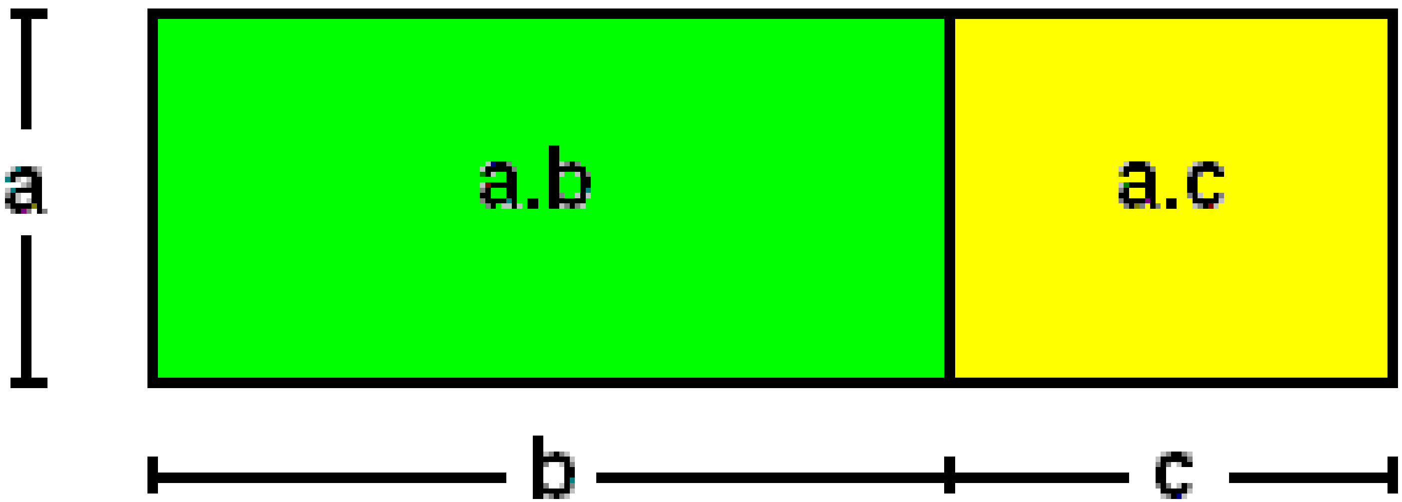
MULTIPLICAR DUAS GRANDEZAS É CALCULAR A ÁREA DE UM RETÂNGULO.

www.if.ufrgs.br/~lang/



DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA:

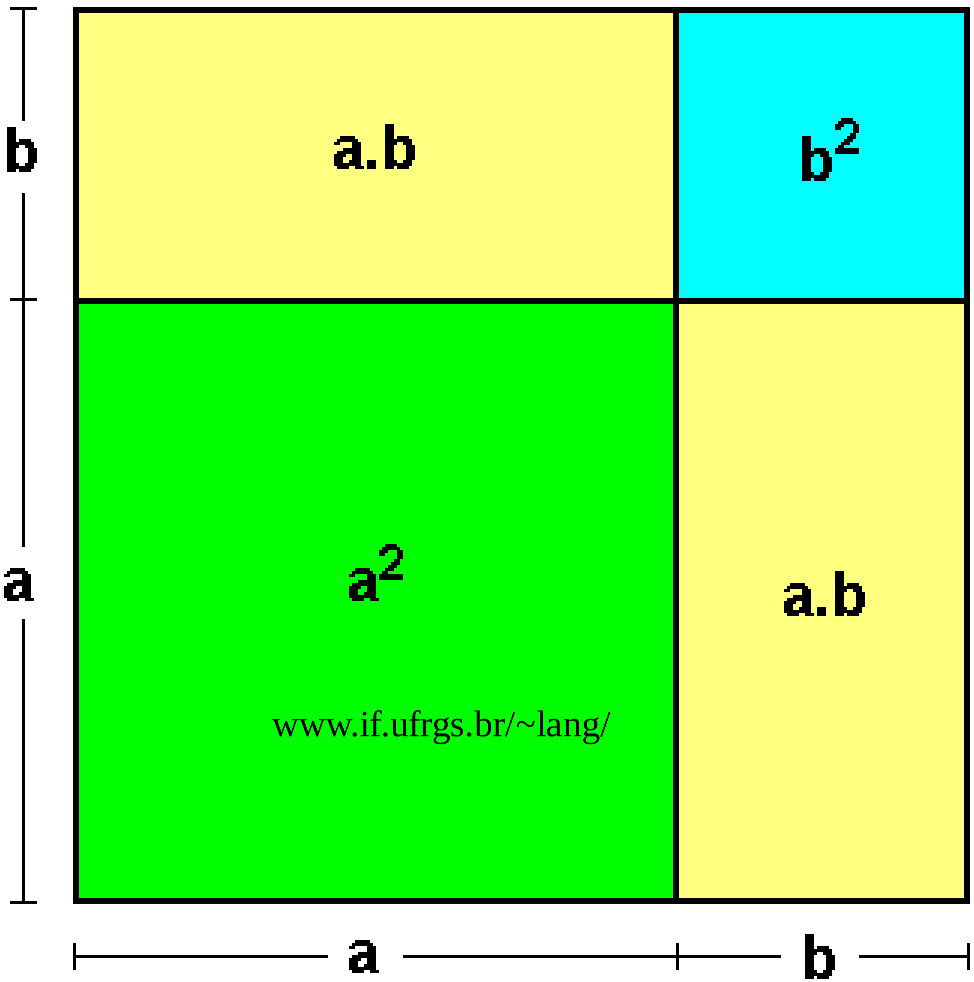
$$a.(b + c) = a.b + a.c$$



www.if.ufrgs.br/~lang/

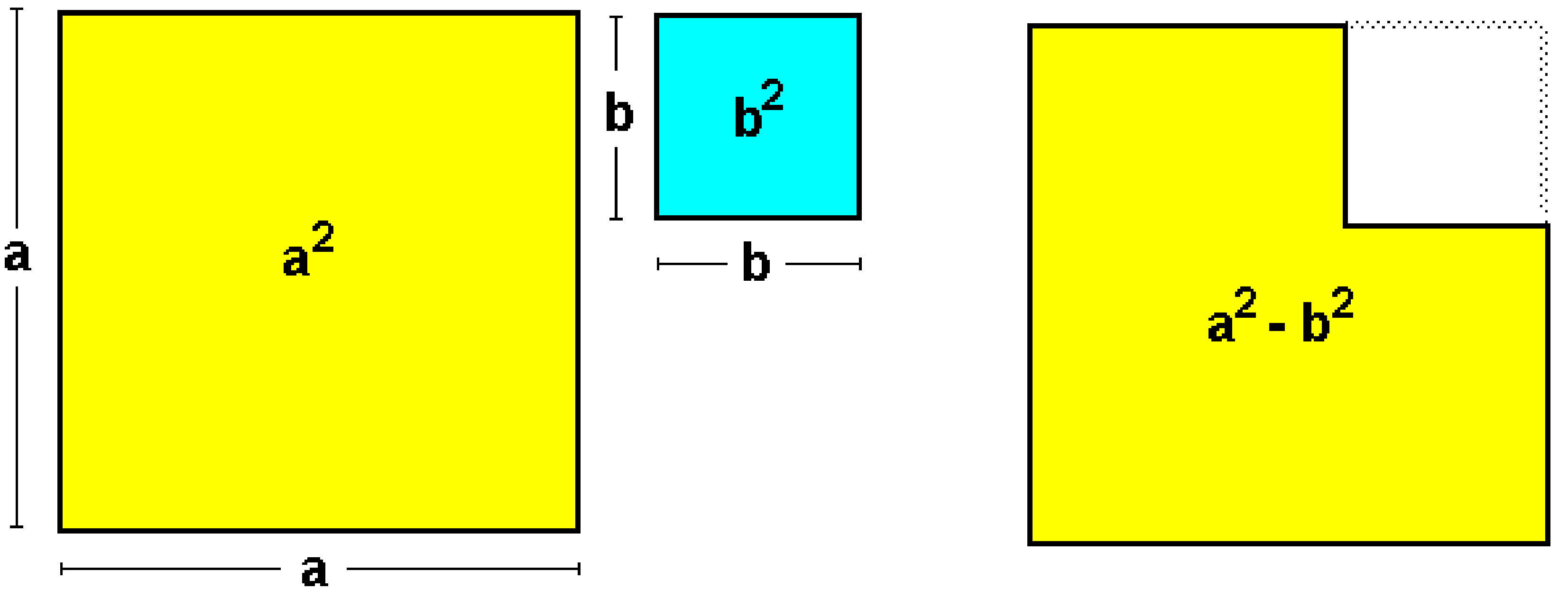
A demonstração **geométrica** do produto notável

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



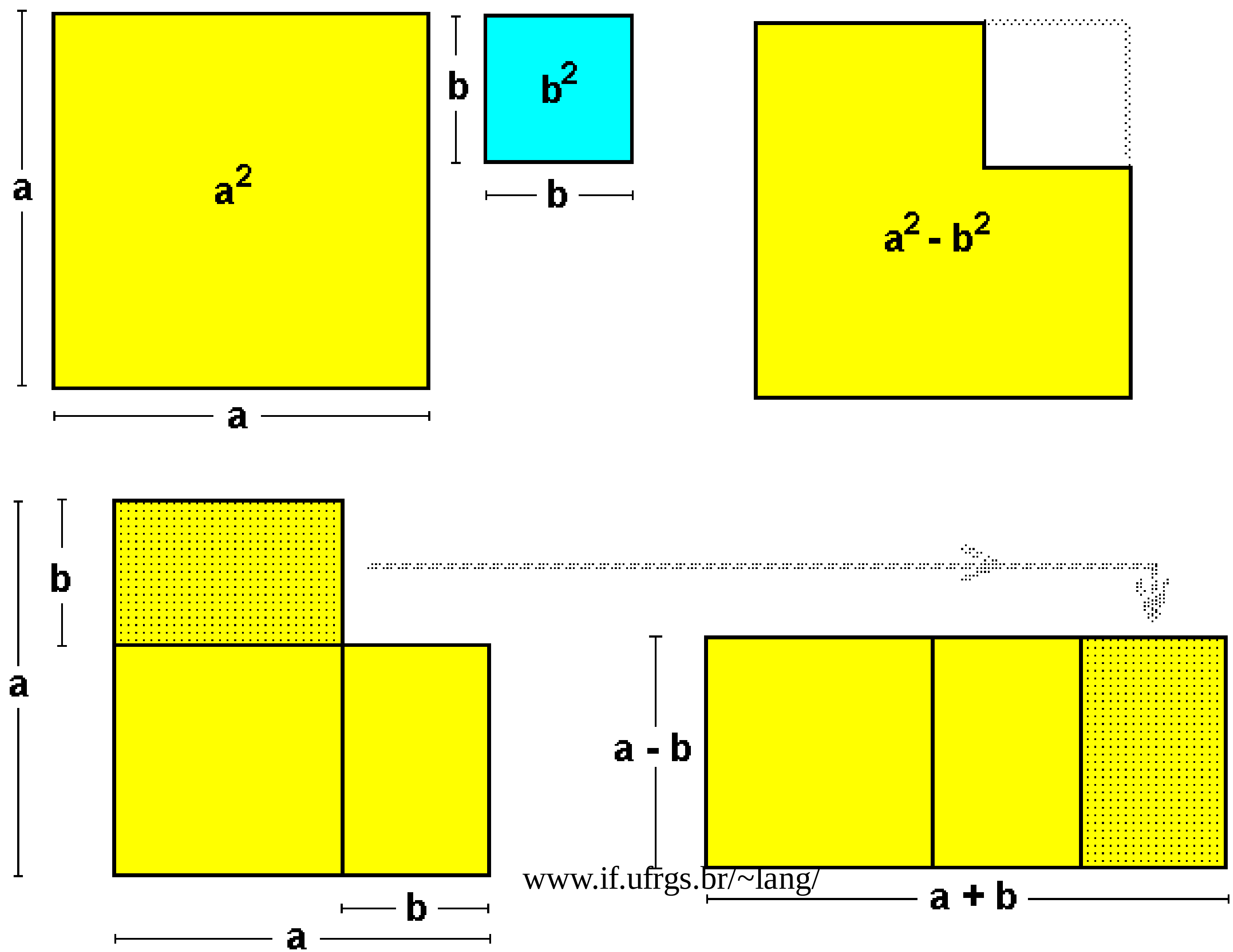
A demonstração **geométrica** do produto notável

$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$



A demonstração **geométrica** do produto notável

$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$



www.if.ufrgs.br/~lang/

Como se eleva um número ao quadrado?

A regra de Pitágoras para encontrar o quadrado de um número inteiro N:

N^2 é a soma dos N primeiros números ímpares.

Exemplos:

$$3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$$

Inteiro	Quadrado	Ímpar
		1
1	1	
		3
2	4	
		5
3	9	
		7
4	16	
		9
5	25	
		11
6	36	
		13
7	49	
		15
8	64	
		17
9	81	

Regra de Pitágoras

$1 = 1$

$4 = 1 + 3$

$9 = 1 + 3 + 5$

$16 = 1 + 3 + 5 + 7$

$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

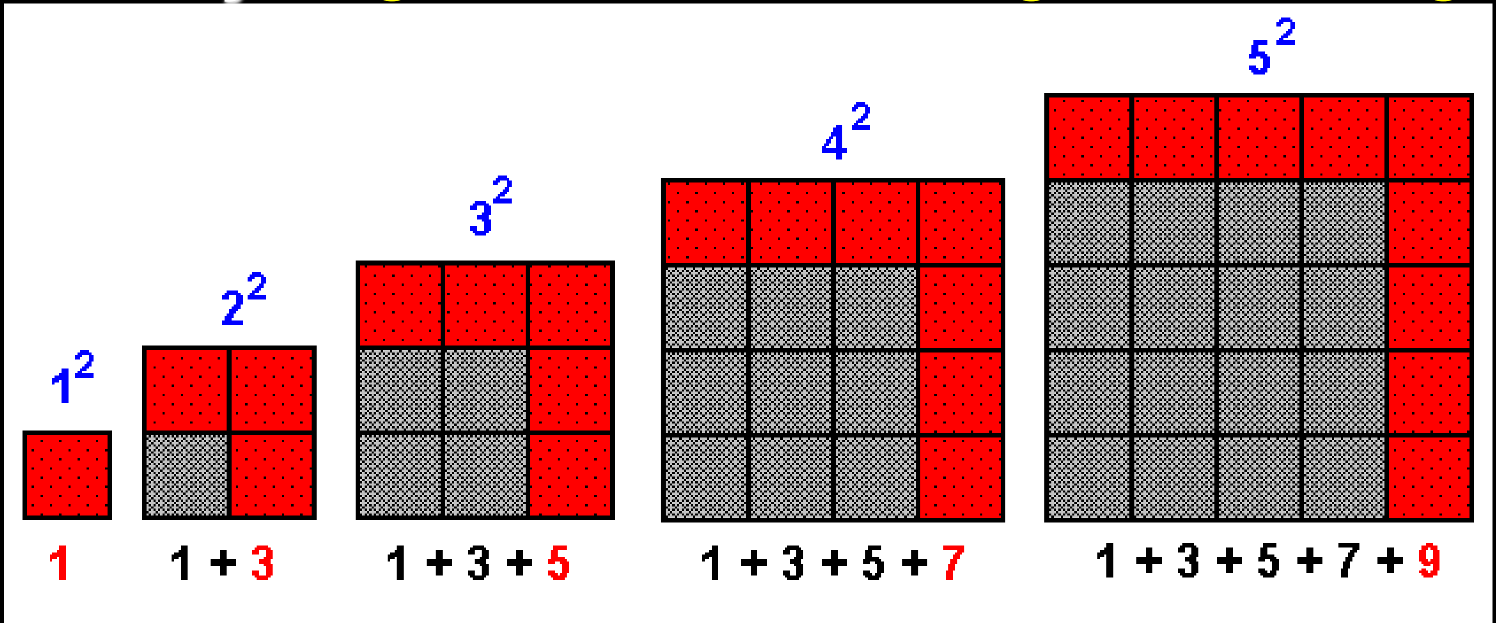
$36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

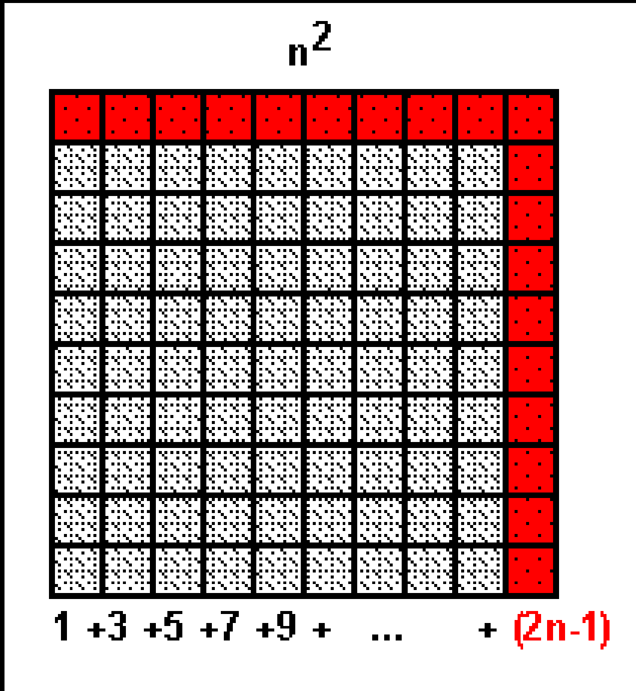
$49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + . . . + 13$

$64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + . . . + 15$

$81 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + . . . + 17$

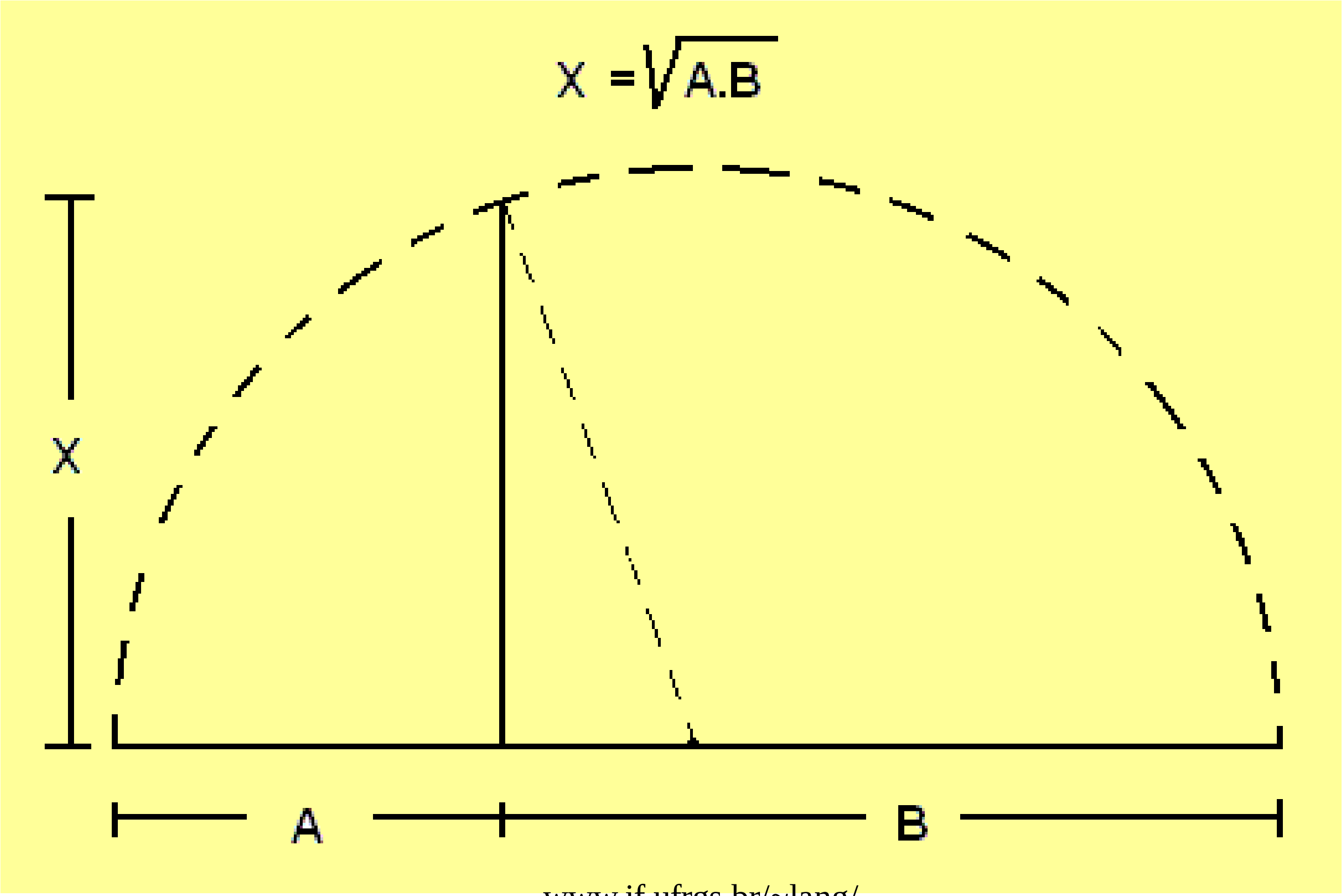
Demonstração geométrica da regra de Pitágoras:





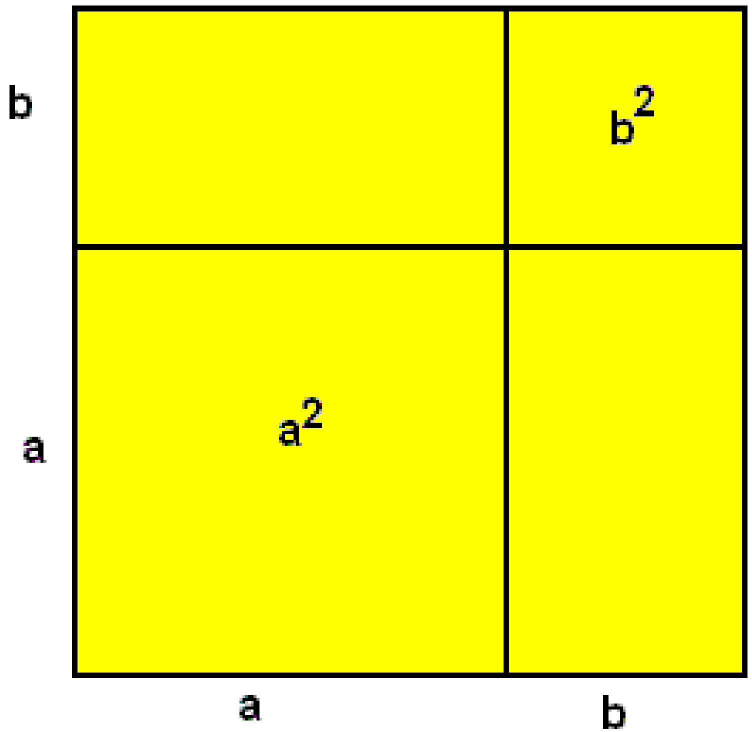
www.if.ufrgs.br/~lang/

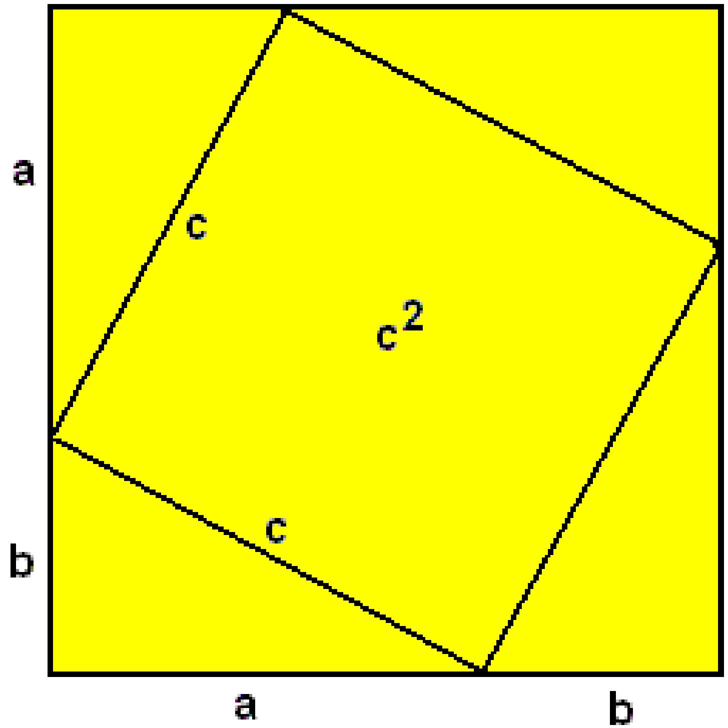
Extraindo geometricamente a raiz quadrada do produto de dois números



www.if.ufrgs.br/~lang/

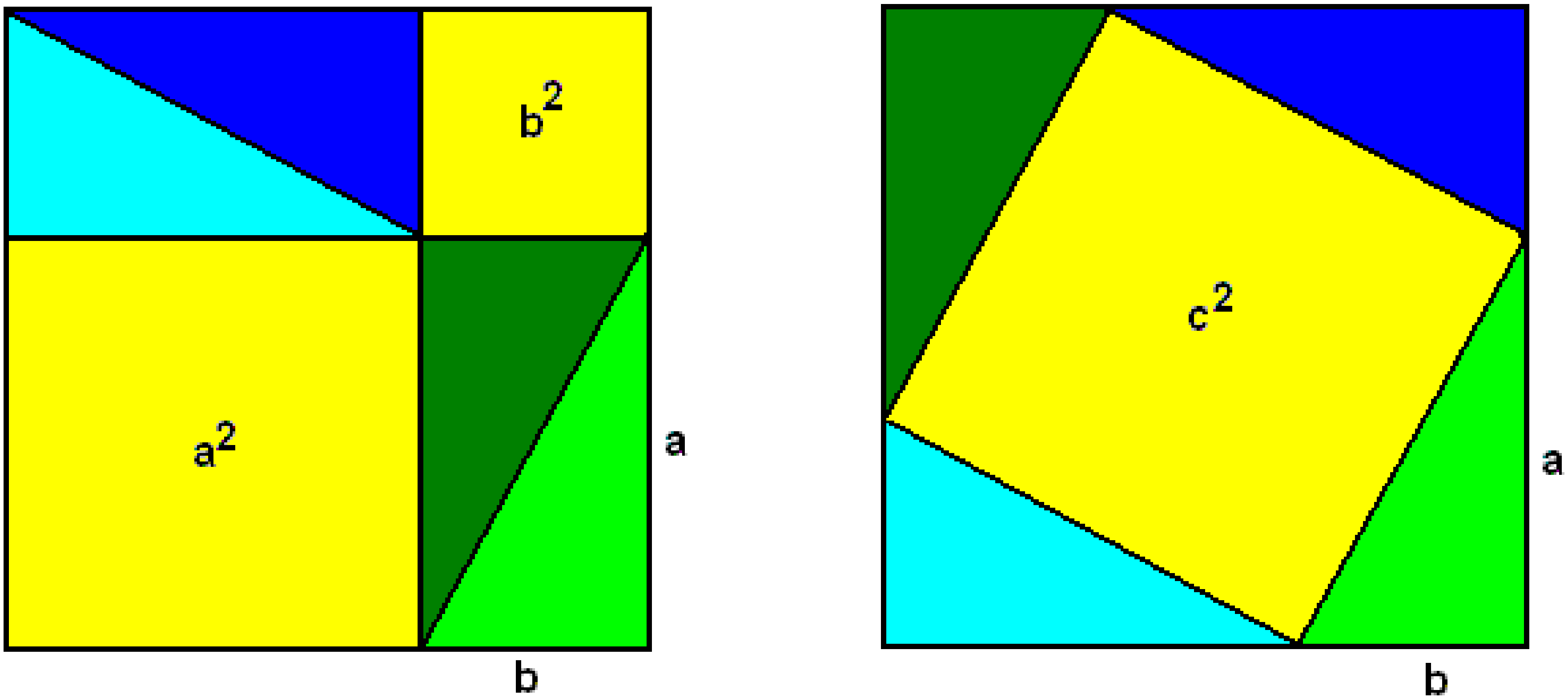
Demonstração do Teorema de Pitágoras





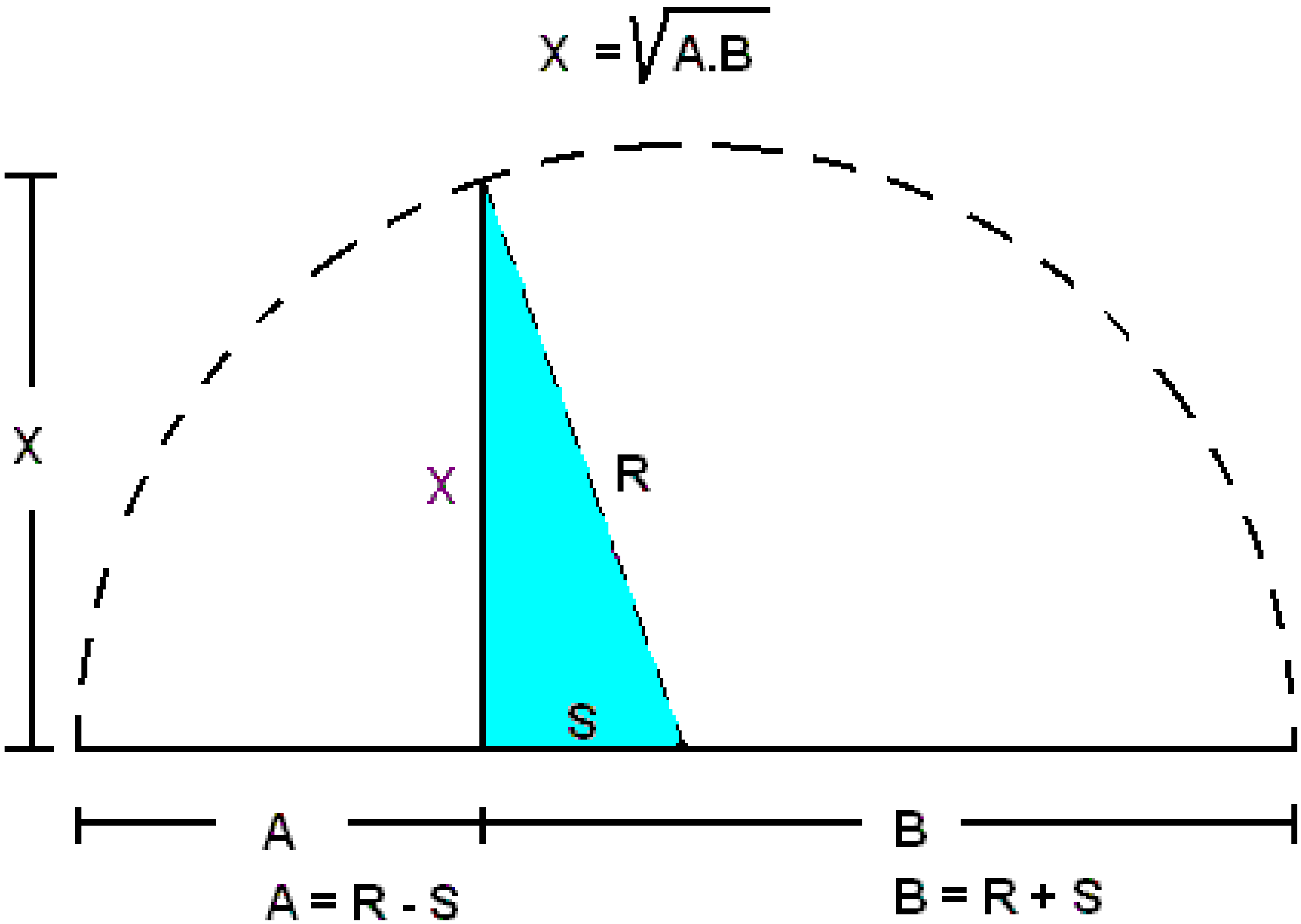
www.if.ufrgs.br/~lang/

Demonstração do Teorema de Pitágoras

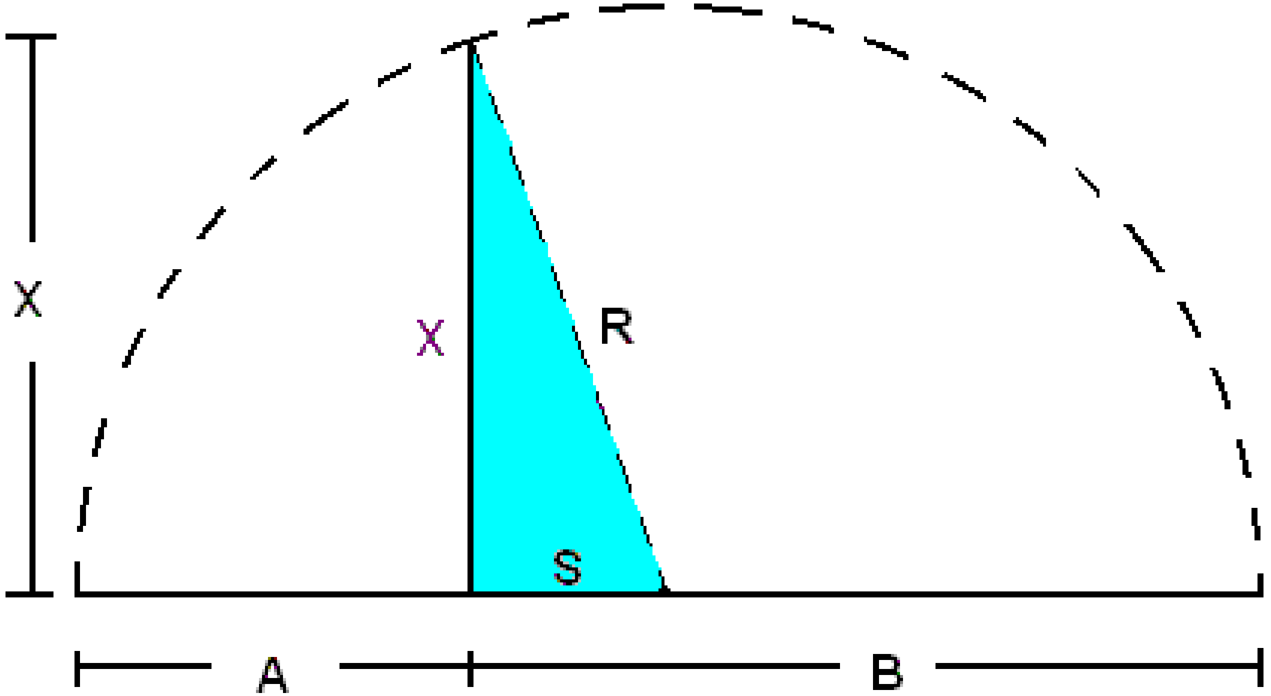


$$a^2 + b^2 = c^2$$

www.if.ufrgs.br/~lang/


X = √A.B
X
X
R
S
A
A = R - S
B
B = R + S

$$X = \sqrt{A.B}$$



www.if.ufrgs.br/~lang/

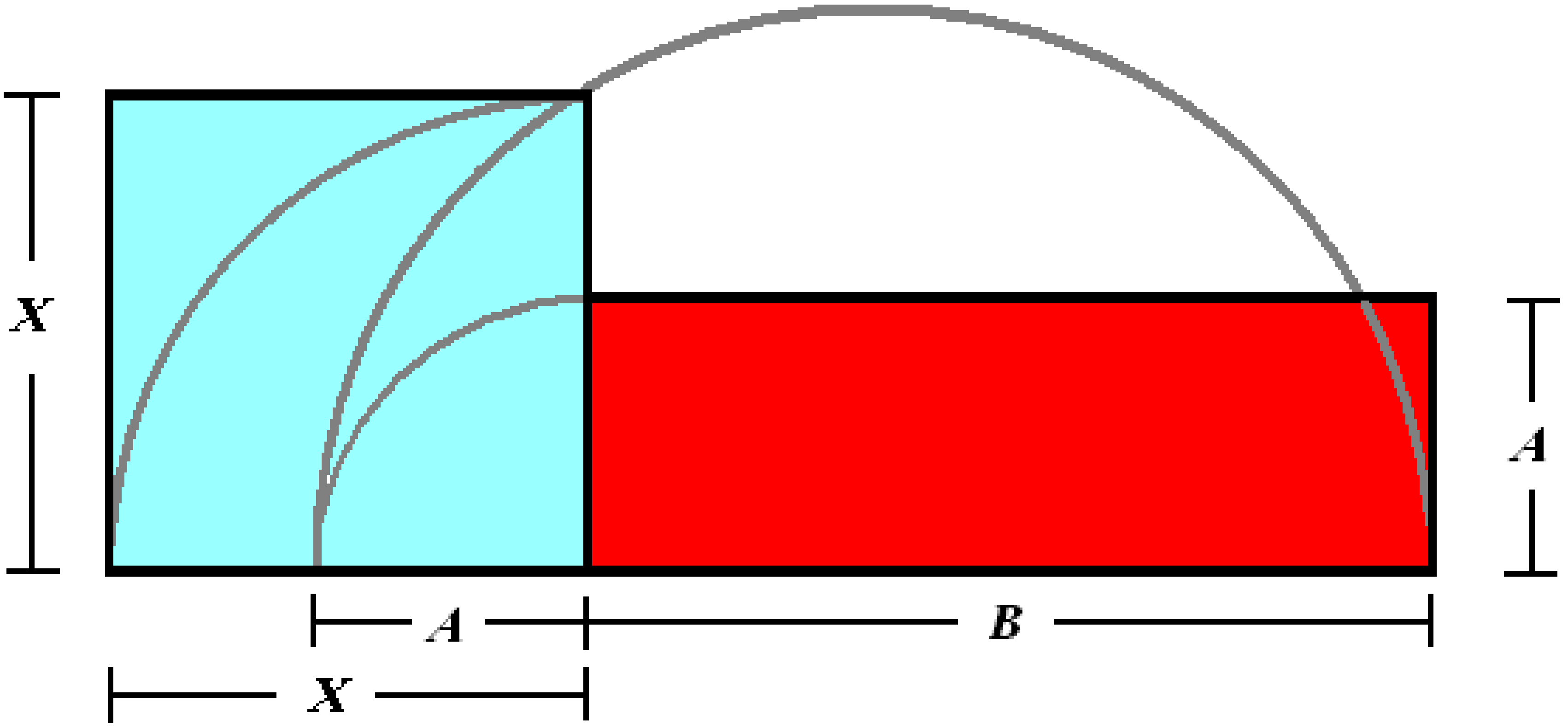
$$X^2 = R^2 - S^2$$

$$X^2 = (R - S).(R + S)$$

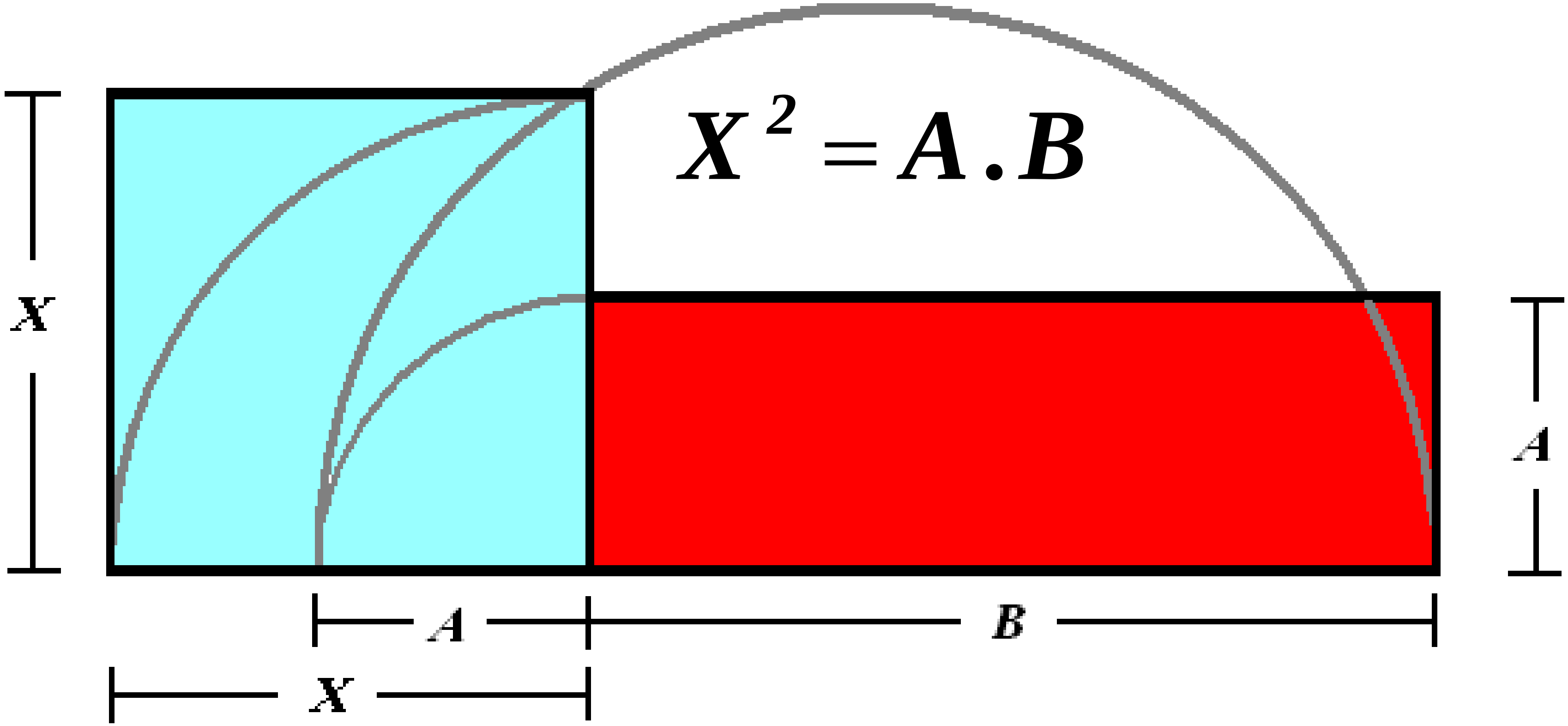
$$X^2 = A.B$$

$$X = \sqrt{A.B}$$

O que representa o diagrama?



As linhas curvas são arcos de circunferência.



O diagrama representa a construção, com régua e compasso, de um quadrado com área igual à área de um dado retângulo.

Ou, representa a construção de um segmento comprimento **X** que é a média geométrica de dois segmentos com comprimentos **A** e **B**.

www.if.ufrgs.br/~lang/

Algoritmo para encontrar a raiz quadrada de um número *N*

1 – Inicie com um número X_1 como aproximação de X.

$$\sqrt{N} = \sqrt{X^2} \cong X_1$$

Exemplifiquemos com a raiz quadrada de 300. Podemos iniciar com X_1 = 15. Ou seja, a raiz quadrada de 300 é aproximadamente 15.

$$\sqrt{300} = \sqrt{17{,}3205^2} \cong 15$$

2 – Subtraia de N o valor de X_1 ao quadrado e divida por duas vezes X_1.

$$a_1 = \frac{N - X_1^{\ 2}}{2.X_1} = \frac{300 - 15^2}{2.15} = \frac{300 - 225}{30} = 2{,}5$$

2 – Subtraia de N o valor de X_1 ao quadrado e divida por duas vezes X_1.

$$a_1 = \frac{N - X_1^{\ 2}}{2.X_1} = \frac{300 - 15^2}{2.15} = \frac{300 - 225}{30} = 2,5$$

3 – Adicione o valor a_1, encontrado na etapa anterior, a X_1.
Este novo valor X_2 é uma melhor aproximação da raiz quadrada de N.

$$\sqrt{N} = \sqrt{X^{\ 2}} \cong X_1 + a_1$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{17,32^2} \cong 15 + 2,5 = 17,5$$

4 – Repita o procedimento a partir do passo 2 e assim sucessivamente.

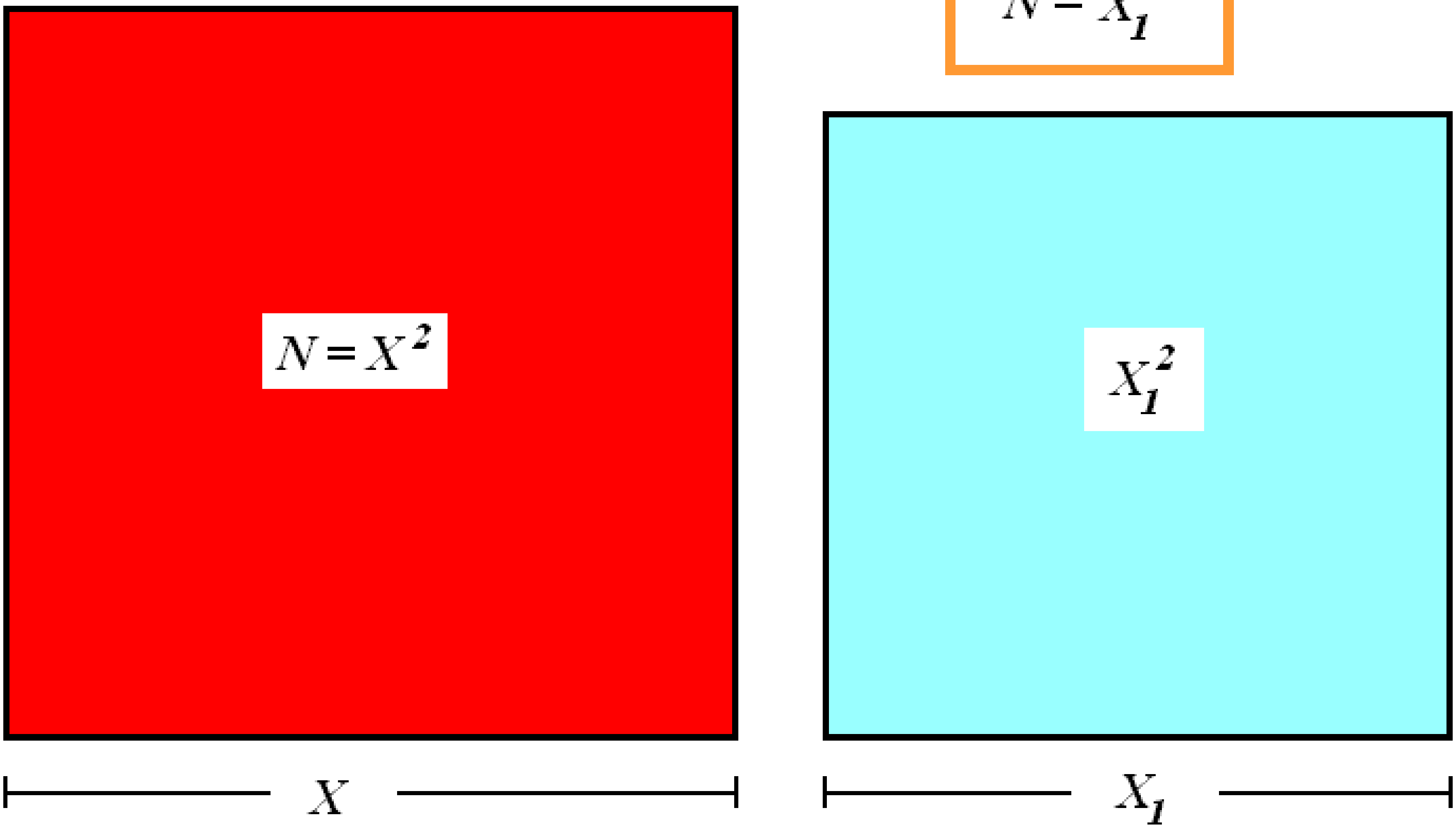
$$\sqrt{300} \cong X_1 = 15 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{300-15^2}{2.15} = 2,5 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 15 + 2,5 = 17,5$$

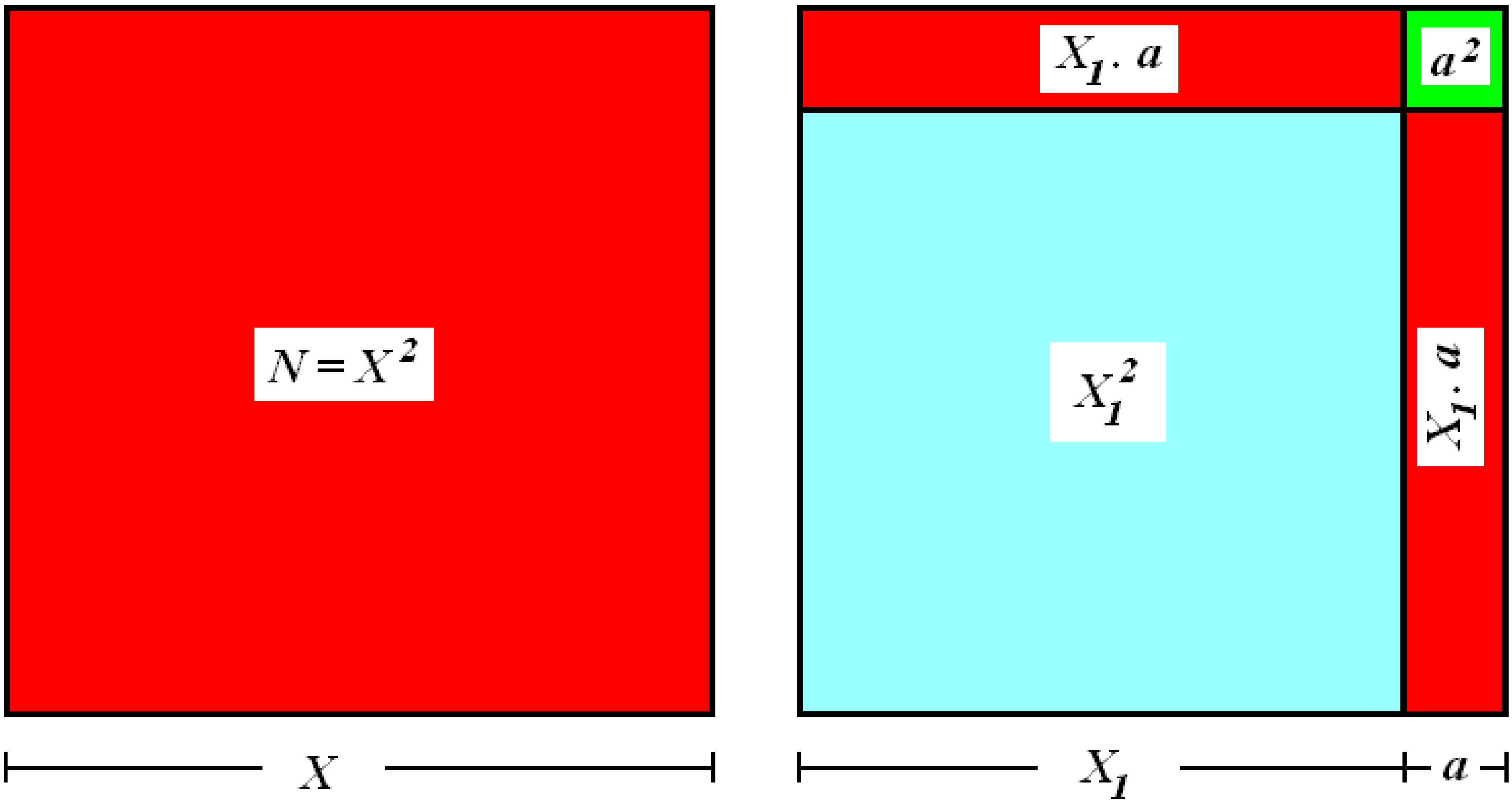
$$\sqrt{300} \cong X_2 = 17,5 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{300-17,5^2}{2.17,5} = -0,2 \quad \Rightarrow \quad X_3 = 17,5 - 0,2 = 17,3$$

$$\sqrt{300} \cong X_3 = 17,3 \quad \Rightarrow a_3 = \frac{300-17,3^2}{2.17,3} = 0,02 \quad \Rightarrow \quad X_4 = 17,3 + 0,02 = 17,32$$

$$\sqrt{300} \cong X_4 = 17,32 \quad \Rightarrow a_4 = \frac{300-17,32^2}{2.17,3} = 0,0005 \Rightarrow X_5 = 17,32 + 0,0005 = 17,3205$$

$$\boxed{N \cong X_1^2}$$





$$N - X_1^2 \cong X_1 . a + X_1 . a$$

$$a \cong \frac{N - X_1^2}{2X_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{N} = \sqrt{X^2} \cong X_1 + a$$

$$\sqrt{300} \cong X_1 = 150 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{300-150^2}{2.150} = -74 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 150-74 = 76$$

$$\sqrt{300} \cong X_2 = 76 \quad \Rightarrow a_2 = \frac{300-76^2}{2.76} = -36 \quad \Rightarrow \quad X_3 = 76-36 = 40$$

$$\sqrt{300} \cong X_3 = 40 \quad \Rightarrow a_3 = \frac{300-40^2}{2.40} = -16 \quad \Rightarrow \quad X_4 = 40-16 = 24$$

$$\sqrt{300} \cong X_4 = 24 \quad \Rightarrow a_4 = \frac{300-24^2}{2.24} = -6 \quad \Rightarrow \quad X_5 = 24-6 = 18$$

$$\sqrt{300} \cong X_5 = 18 \quad \Rightarrow a_5 = \frac{300-18^2}{2.18} = -0{,}7 \quad \Rightarrow \quad X_6 = 18-0{,}7 = 17{,}3$$

$$\sqrt{300} \cong X_6 = 17{,}3 \quad \Rightarrow a_6 = \frac{300-17{,}3^2}{2.17{,}3} = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad X_7 = 17{,}3+0{,}02 = 17{,}32$$

$$\sqrt{300} \cong X_7 = 17{,}32 \quad \Rightarrow a_7 = \frac{300-17{,}32^2}{2.17{,}3} = 0{,}0005 \Rightarrow \quad X_8 = 17{,}32+0{,}0005 = 17{,}3205$$