Determinando a aceleração gravitacional[1]

Fernando Lang da Silveira
Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
Av. Bento Gonçalves, 9500. Caixa Postal 15051, CEP 91501-970.
Porto Alegre. RS. Brasil.
Endereço eletrônico: lang@if.ufrgs.br

RESUMO. Apresenta-se uma breve história das primeiras determinações da aceleração gravitacional. São discutidos teoricamente dois métodos, de Bessel e de Kater, e se relatam os resultados obtidos com eles para o valor da aceleração gravitacional em Porto Alegre.

1. Introdução

Este trabalho tem por objetivos relatar uma breve história das primeiras determinações da aceleração gravitacional e discutir, teoricamente, dois métodos que podem ser utilizados para determiná-la com bastante precisão. São apresentados resultados da aplicação destes dois métodos na obtenção do valor da aceleração gravitacional em Porto Alegre.

2. Sobre as primeiras determinações da aceleração gravitacional

Quase não é exagerado dizer que a nova física – de Galileu, Descartes, Newton – começou com o movimento de queda dos corpos. Galileu (1564-1642) afirmou que o movimento de queda dos corpos -*"num meio cuja resistência fosse nula"*, ou seja, em *"um espaço totalmente vazio de ar e de qualquer outro corpo"*(Galilei, 1988; p.69) - é um movimento uniformemente variado com a mesma aceleração para todos os corpos. Galileu nunca obteve, com razoável grau de precisão, o valor desta aceleração: suas estimativas levaram a um valor cerca de 4 m/s^2. Como poderia Galileu saber que na queda livre dos corpos a aceleração é a mesma para todos eles, se não tinha condições de determiná-la precisamente?

O padre Mersenne (1588-1648) fez diversas tentativas de determinar a aceleração gravitacional <u>medindo tempos de queda</u> (Koyré, 1988). Seus resultados levaram-no a valores bastante maiores do que o de Galileu: da ordem de 8 m/s^2. Estas e outras tentativas de obter a aceleração gravitacional, com razoável grau de precisão, esbarraram na inexistência de um método confiável para medir intervalos de tempo. Naquela época não havia ainda relógios precisos. Galileu relatou experimentos nos quais o tempo era medido através da determinação da massa de água que fluía de um tanque (Galilei, 1988); já Mersenne utilizou pêndulos na medida dos tempos. Segundo Koyré (1988; p.297) houve uma *"situação paradoxal no momento do nascimento da ciência moderna: posse de leis matemáticas exatas e impossibilidade de aplicá-las porque não era realizável uma medida precisa da grandeza fundamental da dinâmica, isto é, do tempo"*.

Huygens (1629–1695) refez o último experimento de Mersenne, em 1659, encontrando valores entre 9 e 10 m/s^2 (Koyré, 1988). Conscientizou-se que enquanto não fosse construído um cronômetro confiável não poderia medir com precisão o tempo de queda. Com o intuito de utilizar um pêndulo para medir tempos enfrentou, teoricamente, o problema de determinar a curva que o pêndulo devia descrever para que o período fosse independente da amplitude - a curva tautócrona - (Boyer,1974); a utilização de um pêndulo que tivesse período independente da amplitude era crucial para determinações precisas de intervalos de tempo. Galileu acreditava, <u>erradamente</u>, que a curva tautócrona era a circunferência, sendo o período de um pêndulo circunferencial o mesmo para qualquer amplitude. Ainda em 1659, Huygens demonstrou teoricamente que a curva tautócrona era a ciclóide. A resolução teórica desse problema lhe deu também <u>a relação entre o período do pêndulo e a aceleração gravitacional</u>; essa relação não era procurada originalmente por Huygens, que pretendia simplesmente encontrar a curva tautócrona. Conhecida essa relação, abriu-se um novo caminho para a obtenção da aceleração gravitacional, que não mais exigia a medida de tempos de queda: <u>a partir da medida do período e do comprimento do pêndulo era possível se obter a aceleração gravitacional</u>. Utilizando então um pêndulo com cerca de 15,7 cm, que realizava 4464 pequenas oscilações (oscilações de pequena amplitude) em uma hora (Huygens também demonstrara que para as pequenas amplitudes de um pêndulo não cicloidal o período era constante), determinou a aceleração gravitacional como sendo aproximadamente 9,5 m/s^2 .

Em 1666, Newton (1642-1727) abordou um problema que Galileu, em 1632, no seu *"Diálogos sobre os dois principais sistemas do mundo"* já havia tentado resolver. Uma das argumentações contra o sistema copernicano, mais especificamente, contra o movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo, dizia que a "força centrífuga" atuando sobre objetos na superfície da Terra, os lançaria para longe. Galileu já se empenhara em refutar tal argumento e afirmara, <u>erradamente</u>, que não importando qual fosse a velocidade de rotação da Terra, não se afastariam de sua superfície (Koyré,1986).

Newton, em 1666, já deduzira a fórmula que permitia calcular a força no movimento circular e procurou comparar a aceleração centrípeta de um corpo em rotação junto com a Terra com a aceleração gravitacional (Westfall, 1995). Para tanto necessitava conhecer o valor da aceleração gravitacional; não satisfeito com a estimativa de Galileu (cerca de 4 m/s^2) e provavelmente desconhecendo o resultado de Huygens (sabe-se que a obra de Huygens que trata de relógios de pêndulo - o célebre *Horologium oscillatorium* - foi publicada em 1673 (Boyer, 1974)), calculou o valor da aceleração gravitacional utilizando um pêndulo cônico. O experimento foi realizado com um pêndulo com aproximadamente 2,05 m de comprimento, descrevendo uma trajetória circular na horizontal, tal que o pêndulo ficava inclinado 45 graus

[1] Publicado em *Revista de Ensenãnza de la Física*, Córdoba, <u>10</u>(2): 29-35, 1995.

(Westfall, 1995). Ele utilizou a relação que existe entre a força centrípeta e a aceleração gravitacional nesse movimento: a partir do período de rotação do pêndulo cônico determinou a força centrípeta e desta, a aceleração gravitacional. O valor que encontrou foi aproximadamente 10,2 m/s^2. Estimou então que a razão entre a aceleração centrípeta no equador da Terra e a aceleração gravitacional era ligeiramente maior do que 1:350. Ficava assim superada uma das objeções contra o movimento diário da Terra.

Até hoje, determinações precisas da aceleração gravitacional continuam a ser realizadas com pêndulos.. A seguir serão apresentados dois métodos, envolvendo pêndulos, que permitem medidas bastante precisas.

3. O método de Bessel

É comum em disciplinas introdutórias de Física Geral, seja no segundo grau ou na universidade, encontrar-se um experimento que visa a obtenção da aceleração gravitacional utilizando um "pêndulo simples". A conhecida equação do pêndulo simples afirma que, para pequenas amplitudes – quando então vale a aproximação linear –, o período depende apenas do comprimento do pêndulo simples e da aceleração gravitacional. A atividade experimental consiste em construir um "pêndulo simples" (usualmente uma pequena esfera de metal suspensa por um fio), medindo o período e o comprimento, calculando, finalmente, a aceleração gravitacional.

Assumindo uma atitude crítica em relação a esta proposta, nota-se que qualquer sistema real constituído por uma pequena esfera suspensa por um fio não é um "pêndulo simples" mas um pêndulo físico: a massa do pêndulo está distribuída e não localizada em um ponto, como se imagina na dedução da equação do pêndulo simples. Ainda que a massa do fio seja desprezível e que a esfera possua densidade constante, demonstra-se facilmente que o comprimento do pêndulo simples equivalente (o comprimento do pêndulo simples que tem o mesmo período do pêndulo físico) é maior do que a distância do ponto de suspensão ao centro de gravidade da esfera (Silveira, 1992). Prova-se que o comprimento do pêndulo simples equivalente é:

$$L = D + \frac{2}{5}\frac{R^2}{D} \qquad (1)$$

onde:

L- comprimento do pêndulo simples equivalente.
D- distância do ponto de suspensão ao centro de gravidade da esfera.
R- raio da esfera.

Desta forma, quando se quiser obter uma estimativa para a aceleração gravitacional, com razoável grau de precisão, um dos problemas a ser enfrentado experimentalmente é o da determinação do comprimento do pêndulo simples equivalente (importante insistir que este não é a distância entre o ponto de suspensão e o centro de gravidade da esfera). A aceleração gravitacional, em função do período e deste comprimento (para pequenas amplitudes, quando vale a aproximação linear), é dada pela equação abaixo:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \qquad (2)$$

onde:

g- aceleração gravitacional.
T- período do pêndulo.

A diferença entre L e D, de acordo com a equação 1, depende de R e de D. A forma de diminuir esta diferença é tornar R bastante menor do que D. Por exemplo, se a esfera tiver raio da ordem de alguns centímetros e a distância D for da ordem de metro, a diferença entre L e D é da ordem de décimo de milímetro. Ou seja, para essas dimensões, a menos que se deseje conhecer L com erro inferior a décimo de milímetro, pode-se tomar D por L na equação 2. Entretanto, determinar o comprimento D, mesmo com precisão de milímetro, é difícil pois o centro da esfera não é reconhecível diretamente.

Bessel, no início do século XIX, idealizou um método para determinar a aceleração gravitacional com um "pêndulo simples", que não requer o conhecimento da localização do centro de gravidade da esfera. O procedimento proposto por Bessel baseia-se no fato de que é possível medir a diferença de comprimento que um pêndulo sofre, sem conhecer os seus respectivos comprimentos. Ou seja, constrói-se um pêndulo com grande comprimento, digamos da ordem de 3 m e se determina experimentalmente o seu período; em seguida, encurta-se o pêndulo, digamos para 2 m aproximadamente, medindo-se esse encurtamento e o novo período. É fácil demonstrar a partir da equação 2, aproximando-se L por D, que a aceleração gravitacional é:

$$g = 4\pi^2 \frac{d}{\left(T_1^2 - T_2^2\right)} \qquad (3)$$

onde:

d – diferença ($D_1 - D_2$) entre os dois comprimentos.
T_1 e T_2 – períodos do pêndulo.

A fim de determinar a aceleração gravitacional no Campus do Vale da UFRGS, construímos um pêndulo com uma esfera de chumbo de aproximadamente 2 cm de raio, suspensa for um fio fino de aço. O comprimento inicial do pêndulo foi cerca de 3 m. Colocamo-lo a oscilar com pequena amplitude, menor do que 2º (para amplitudes de até 2,3º vale a aproximação linear para o período com precisão até décimos de milésimo de segundo, se o período for da ordem de segundos (Silveira, 1992)) e medimos o tempo de 40 oscilações (no final das 40 oscilações a amplitude já era tão pequena que dificultava a observação); repetimos esse procedimento 25 vezes. Em seguida, encurtamos o fio por 111,1 cm, medindo 25 vezes o tempo de 40 oscilações (o processo todo durou em torno de 2 horas). Obtivemos no final os seguintes resultados:

$$\bar{T}_1 = 3{,}5870 \text{ s} \qquad S_{\bar{T}_1} = 0{,}0006 \text{ s}$$

$$\bar{T}_2 = 2{,}8977 \text{ s} \qquad S_{\bar{T}_2} = 0{,}0006 \text{ s}$$

$$\bar{d} = 111{,}1 \text{ cm} \qquad S_{\bar{d}} = 0{,}1 \text{ cm}$$

Os valores discriminados ao lado das médias (primeira coluna) são as respectivas estimativas de erro (desvio padrão da média para os períodos e menor divisão da escala da trena no caso do comprimento). Utilizando a conhecida expressão para a propagação dos erros (Vuolo, 1992), tem-se que, nesse caso, o erro na aceleração gravitacional é dado por:

$$S_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{2\bar{g}\bar{T}_1}{\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2} S_{\bar{T}_1}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{g}\bar{T}_2}{\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2} S_{\bar{T}_2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{g}}{\bar{d}} S_{\bar{d}}\right)^2} \qquad (4)$$

Substituindo-se em 4 os valores referidos acima, encontra-se:

$$S_{\bar{g}} = 2 \text{ cm/s}^2 .$$

Visto que a equação 3 fornece $\bar{g} = 981$ cm/s², pode-se finalmente afirmar, no nível de confiança de 68%, que o verdadeiro valor da aceleração gravitacional no Campus do Vale da UFRGS está compreendido entre 979 cm/s² e 983 cm/s² .

4. O método de Kater

Para qualquer pêndulo físico existem infinitos conjuntos de quatro eixos coplanares e paralelos a um eixo que passa pelo centro de massa ou centro de gravidade (o centro de massa e o centro de gravidade são coincidentes quando o campo gravitacional que atua sobre o corpo é uniforme), tais que os períodos sejam iguais. Dois a dois, esses quatro eixos são eqüidistantes do eixo que passa pelo centro de massa; pode ocorrer que algum(ns) desses eixos não intercepte(m) o pêndulo, localizando-se fora do mesmo. Se o eixo que passa pelo centro de massa estiver entre dois eixos não eqüidistantes do centro de massa, então a distância entre esses dois eixos é igual ao comprimento do pêndulo simples equivalente (a demonstração dessa afirmação, bem como das anteriores, pode ser encontrada em textos de mecânica do terceiro grau, por exemplo, Savéliev (1984), Symon (1972) e Timoner e outros (1973)). Esta propriedade está representada na Figura 1.

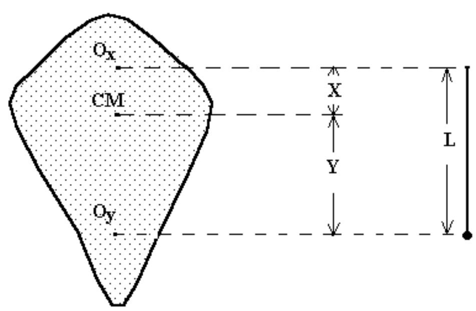

FIGURA 1. Pêndulo físico e pêndulo simples equivalente.
X e **Y** - distâncias dos eixos paralelos $\mathbf{O_x}$ e $\mathbf{O_y}$ ao centro de massa **CM.**
L - comprimento do pêndulo simples equivalente.

Experimentalmente, é possível se determinar com grande precisão dois desses eixos: procura-se dois eixos, não eqüidistantes do centro de massa, em torno dos quais os períodos de oscilação sejam praticamente iguais. A localização dos dois eixos pode ser feita com o grau de precisão que se deseje, bastando para isso que se meçam os períodos a partir do tempo de um grande número de oscilações de pequena amplitude. Como o corpo é posto a oscilar, ora em torno de um eixo, ora em torno de outro eixo, ficando o centro de massa entre eles, alguns autores chamam-no "pêndulo reversível" (Timoner e outros; 1973). Em seguida, mede-se a distância entre os dois eixos, o que também pode ser feito com pequeno erro. Calcula-se então a aceleração gravitacional pela equação do pêndulo simples, a equação 2**.** Note-se que esta interessante propriedade dos dois eixos dispensa o conhecimento da distribuição de massa do pêndulo.

Na prática utiliza-se um pêndulo com distribuição de massa fortemente assimétrica. A Figura 2 dá a idéia do pêndulo. Ele possui uma pequena massa que tem posição ajustável (não representada na figura). Inicia-se o experimento localizando dois eixos em torno dos quais os períodos são aproximadamente iguais. Fixa-se os dois eixos, alterando depois a posição da pequena massa até que os dois períodos sejam tão parecidos quanto se deseje. Esse processo é demorado, ocorrendo por tentativas, levando muitas horas se for necessária uma grande precisão.

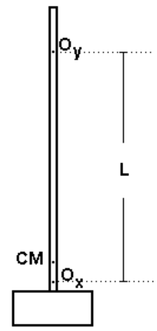

FIGURA 2 – O pêndulo de Kater ou pêndulo reversível.

O experimento que realizamos, após os ajustes iniciais, envolveu a tomada de cinqüenta medidas do tempo de 70 pequenas oscilações para cada um dos eixos (após as 70 oscilações a amplitude era tão pequena que se tornava impraticável observar mais oscilações; iniciávamos cada série com amplitude não superior a 2º para que a equação 2, que é uma aproximação linear, valesse para a precisão que desejávamos obter na determinação dos períodos (Silveira, 1992)). A duração total do experimento foi de mais de quatro horas. Os resultados obtidos, para as médias e as respectivas estimativas de erro, foram os seguintes:

$$\bar{T}_1 = 1{,}3961 \text{ s} \qquad S_{\bar{T}_1} = 0{,}0003 \text{ s}$$

$$\bar{T}_2 = 1{,}3967 \text{ s} \qquad S_{\bar{T}_2} = 0{,}0002 \text{ s}$$

$$\bar{L} = 48{,}381 \text{ cm} \qquad S_{\bar{L}} = 0{,}003 \text{ cm}$$

O período a ser utilizado na equação 2 é a média dos dois períodos medidos. Utilizando a conhecida expressão para a propagação dos erros, tem-se que, nesse caso, o erro na aceleração gravitacional é dado por:

$$S_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\bar{g}}{\frac{\bar{T}_1+\bar{T}_2}{2}} S_{\bar{T}_1}\right)^2 + \left(\frac{\bar{g}}{\frac{\bar{T}_1+\bar{T}_2}{2}} S_{\bar{T}_2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{g}}{\bar{L}} S_{\bar{L}}\right)^2} \qquad (5)$$

Substituindo-se em 5 os valores referidos acima, encontra-se:

$$S_{\bar{g}} = 0{,}3 \text{cm/s}^2 .$$

Visto que a equação 2 fornece $\bar{g} = 979{,}5$ cm/s^2, pode-se finalmente afirmar, no nível de confiança de 68%, que o verdadeiro valor da aceleração gravitacional no Campus do Vale da UFRGS está compreendido entre 979,2 cm/s^2 e 979,8 cm/s^2 .

5. Conclusão

O pêndulo de Kater ou pêndulo reversível, utilizado pela primeira vez em 1819, continua até hoje sendo usado em medidas bastante precisas da aceleração gravitacional, tais como as que os geólogos fazem com objetivos de prospectar materiais abaixo da superfície da Terra. O fabricante do pêndulo fornece ao usuário o comprimento do pêndulo simples equivalente, dispensando o trabalhoso processo de localização dos dois eixos, permitindo a determinação da aceleração gravitacional com o pêndulo oscilando em torno de apenas um eixo. O método de Bessel tem o inconveniente de que, a cada vez, a diferença no comprimento e os respectivos períodos devem ser medidos; além disso; não permite medidas com o grau de precisão do método de Kater. Assim, na Geologia o método de Bessel é preterido a favor do de Kater. Caso se deseje aumentar muito a precisão, outras variáveis que em nossos exemplos foram desprezadas, deverão ser consideradas, acarretando uma série de correções: forças resistivas do meio e atrito no eixo; variações do período com a amplitude; variações no comprimento por dilatação térmica; cooscilação da suspensão do eixo;... .

É importante notar que os erros obtidos nessas duas medidas da aceleração gravitacional, principalmente na segunda, são pequenos (partes em mil no primeiro caso e partes em dez mil no segundo caso). Dificilmente estes experimentos poderiam ser propostos, com tal grau de precisão, como atividade de laboratório de Física Geral, devido ao longo e tedioso processo de determinação dos períodos. Caso se tolere erros maiores do que os obtidos, é possível em uma atividade de laboratório de Física Geral, realizar um dos experimentos.

Uma consideração deve aqui ser feita. Na verdade quando falamos em "aceleração gravitacional" estamos nos referindo à "aceleração gravitacional aparente", ou seja, à aceleração em um sistema de referência em rotação junto com a Terra. Recordamos que Newton já determinou a diferença entre ambas quando se empenhava em refutar uma importante objeção contra o movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo (conforme vimos na secção 2). Sabe-se que a diferença entre os dois valores pode chegar a ser da ordem de 3 cm/s^2 (no equador ela é aproximadamente esta) dependendo do local na Terra; esta diferença torna-se empiricamente importante quando o método utilizado na sua determinação envolve erros iguais ou menores do que 3 cm/s^2.

A história das determinações da aceleração gravitacional nos esclarece que, contrariamente à epistemologia empirista, o conhecimento científico não começa com medidas. Galileu nunca teve condições de medir com razoável grau de precisão a aceleração de um corpo em queda e, entretanto, afirmou que ela era a mesma para todos os corpos. Esta história também nos mostra que o aumento na precisão das determinações da aceleração gravitacional sempre foi antecedido de importantes avanços teóricos. Sem uma "boa" teoria não é possível a realização de medidas sofisticadas, ou, como tantos epistemólogos já insistiram, *"todo o nosso conhecimento é impregnado de teoria, inclusive nossas observações"* (Popper, 1975; p. 75).

BIBLIOGRAFIA

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
GALILEI, G. *Duas novas ciências.* São Paulo: Nova Stella, 1988.
KOYRÉ, A. *Estudos galilaicos.* Lisboa: Dom Quixote, 1986.
______ *Estudios de historia del pensamiento científico.* México: Siglo Veintiuno, 1988.
POPPER, K. R. *Conhecimento objetivo.* São Paulo: EDUSP, 1975.
SAVÉLIEV, I. V. *Curso de Física Geral.* Moscou: MIR, 1984.
SILVEIRA, F. L. Considerações sobre o artigo "Métodos numéricos no ensino da Física Experimental". *Caderno Catarinense de Ensino da Física*, Florianópolis, 9(1):86-90, 1992.
SYMON, K. R. *Mechanics.* Menlo Park: Addison-Wesley, 1972.
TIMONER, A. , MAJORANA, F. S. E HAZOFF, W. *Manual de laboratório de Física.* São Paulo: Edgard Blücher, 1973.
VUOLO, J. H. *Fundamentos da teoria de erros.* São Paulo: Edgard Blücher, 1992.
WESTFALL, R. S. *A vida de Isaac Newton.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

Agradecimentos
Agradeço às professoras Maria Cristina Varriale e Maria Teresinha Xavier Silva e ao professor Rolando Axt pela leitura crítica que permitiu o aprimoramento deste trabalho.