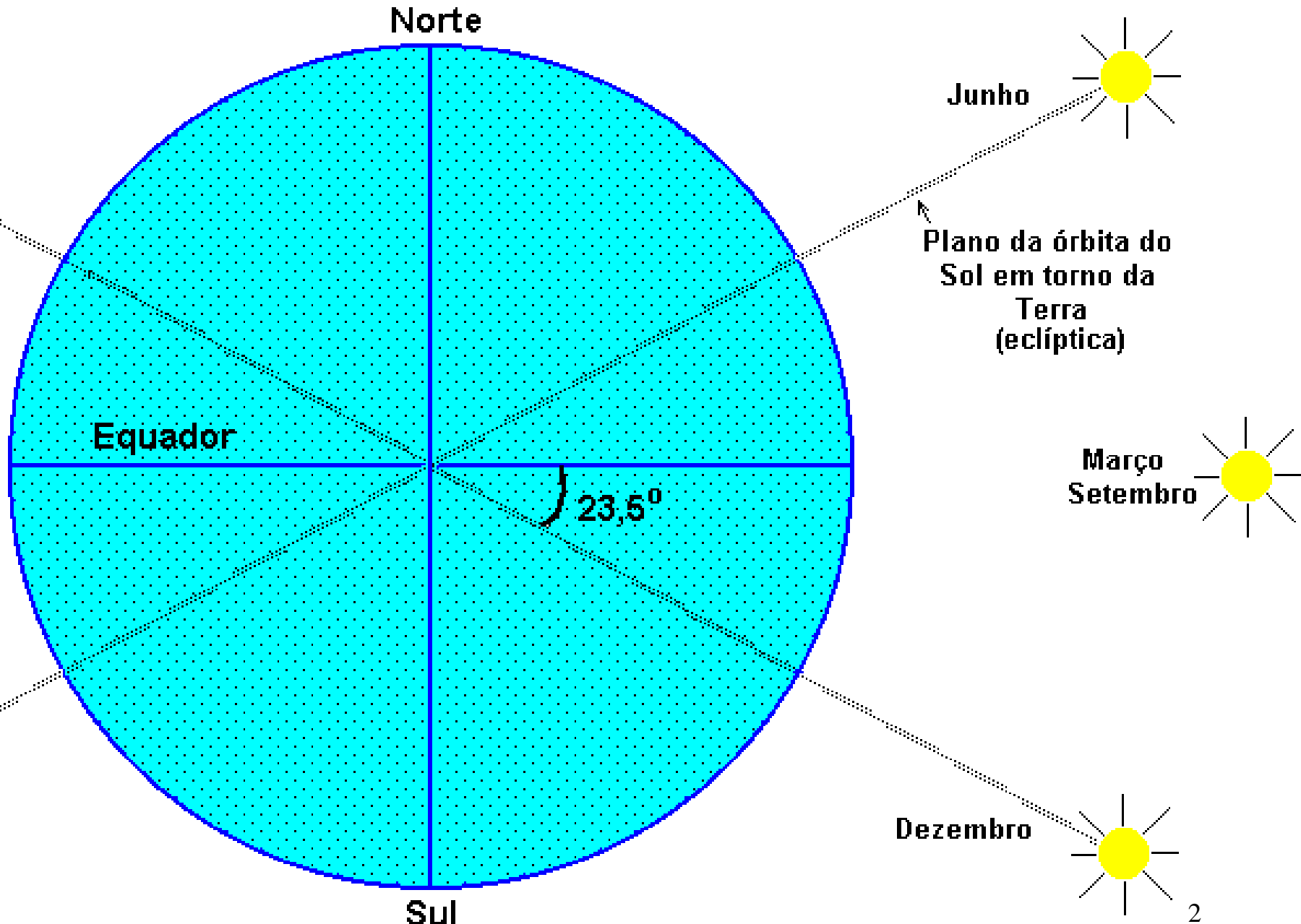


A GEOMETRIA DOS ANTIGOS GREGOS E A DETERMINAÇÃO DAS DIMENSÕES COSMOLÓGICAS

Prof. Fernando Lang da Silveira – IF-UFRGS

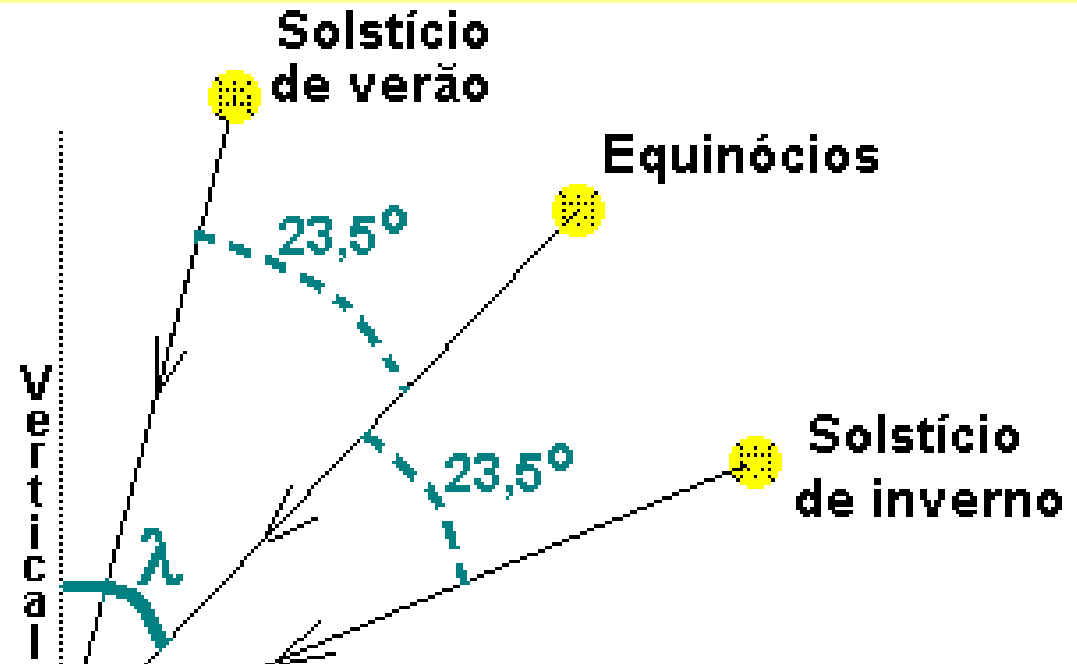
Movimento diário e anual do Sol em relação à Terra



A elevação do Sol ao meio-dia depende da latitude e da data (dia, mês)

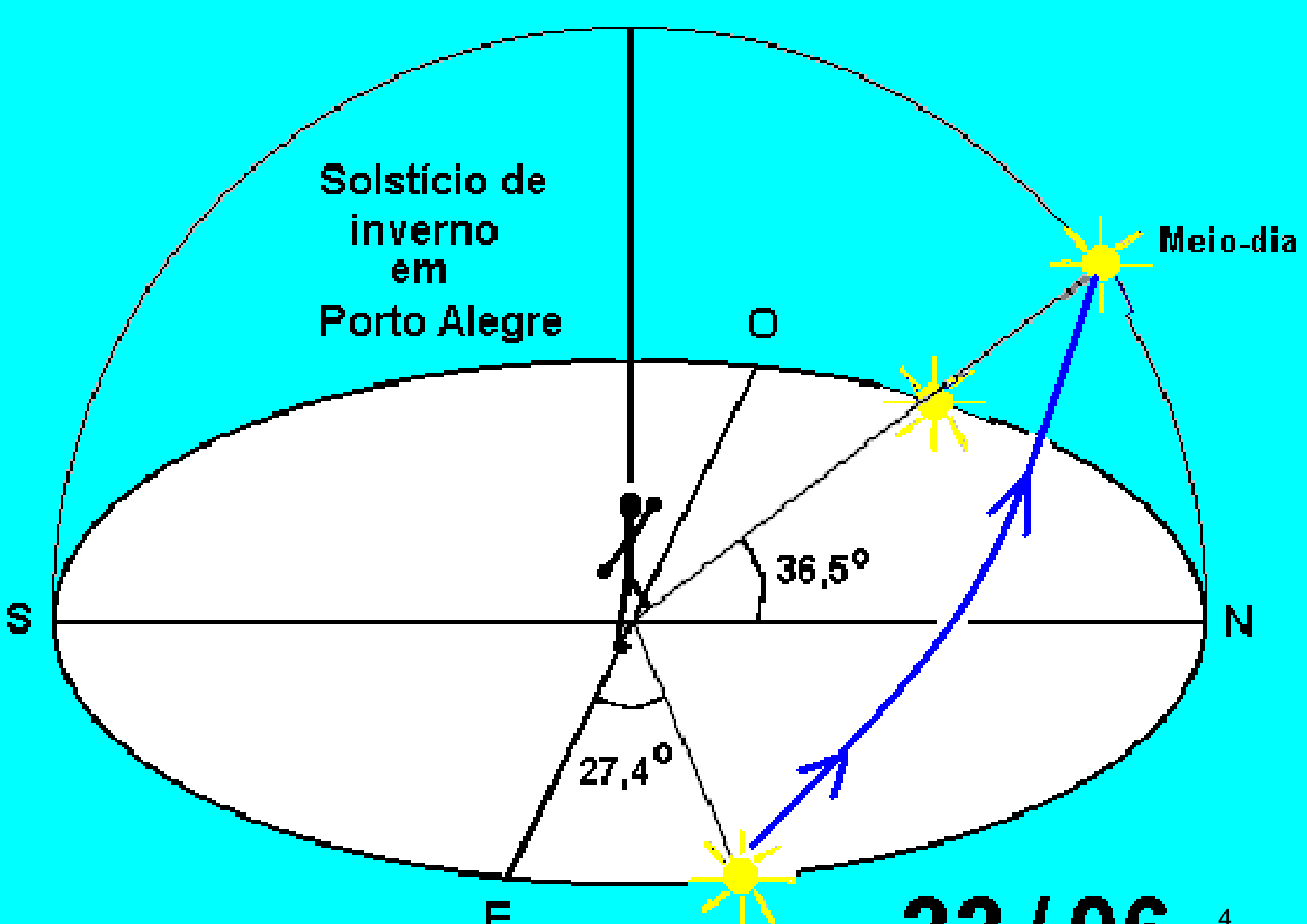
Elevação do Sol ao meio-dia

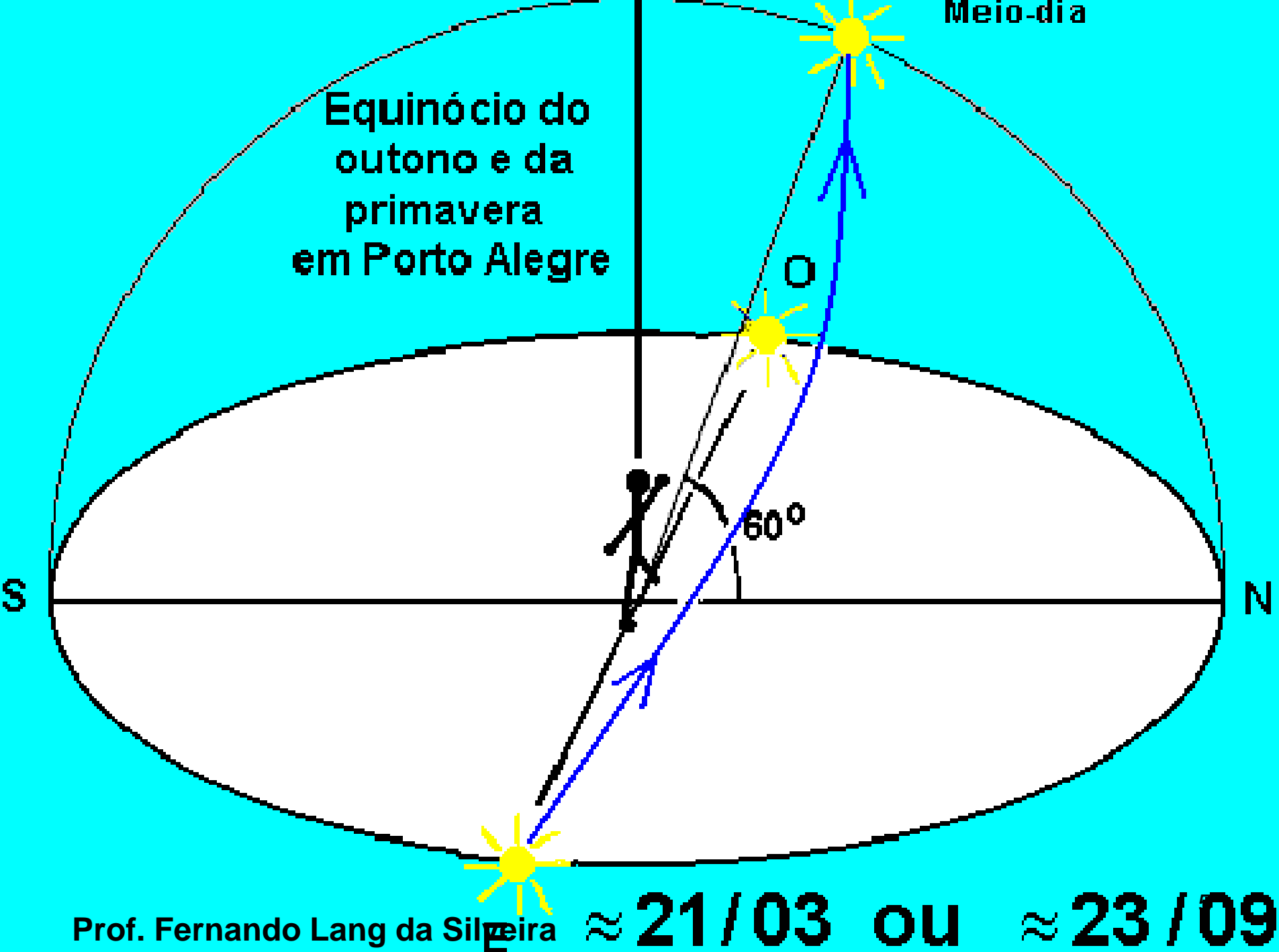
λ - Latitude

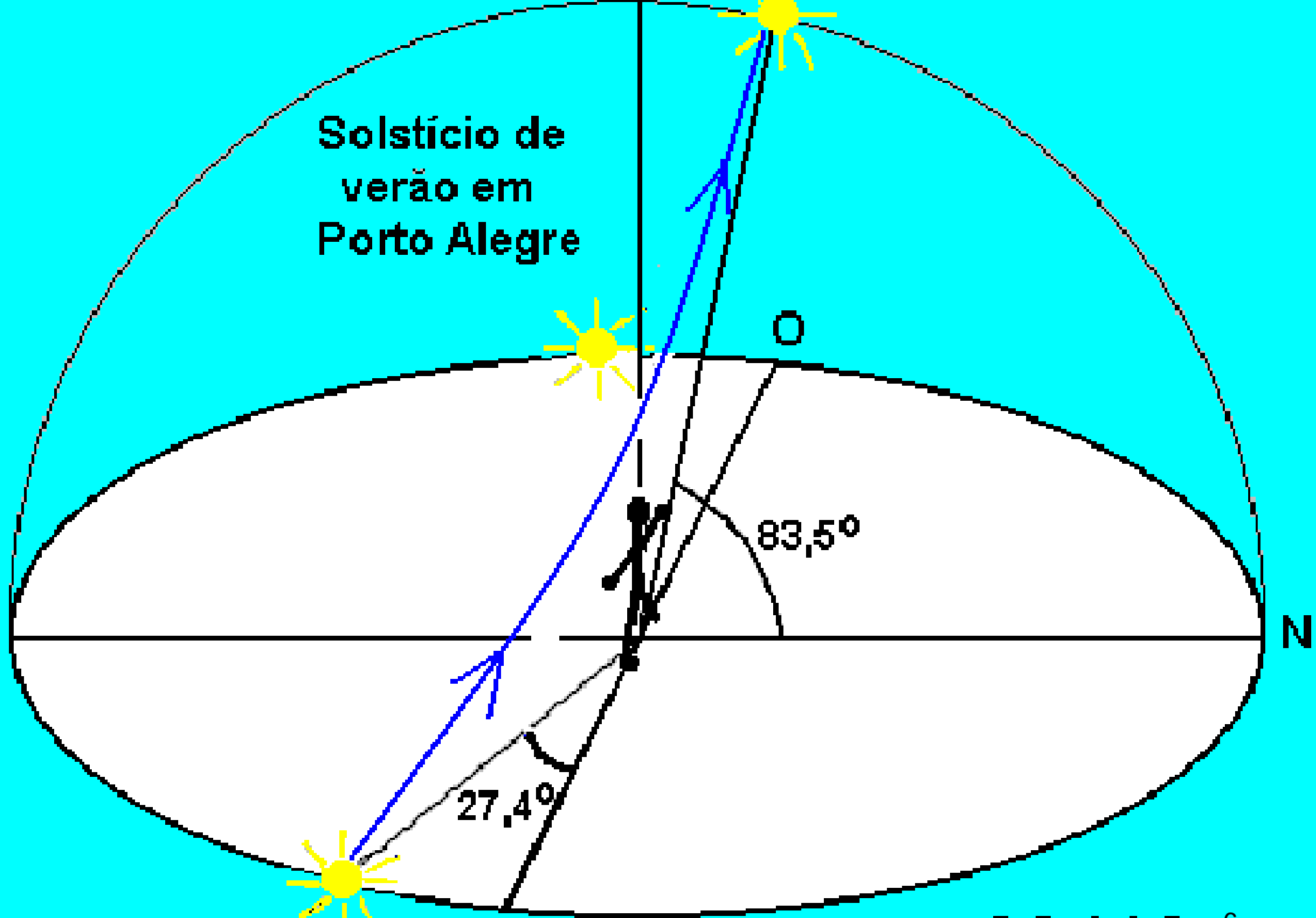


Prof. Fernando Lang da Silveira

Sul \longrightarrow Norte







Solstício de
verão em
Porto Alegre

$83,5^\circ$

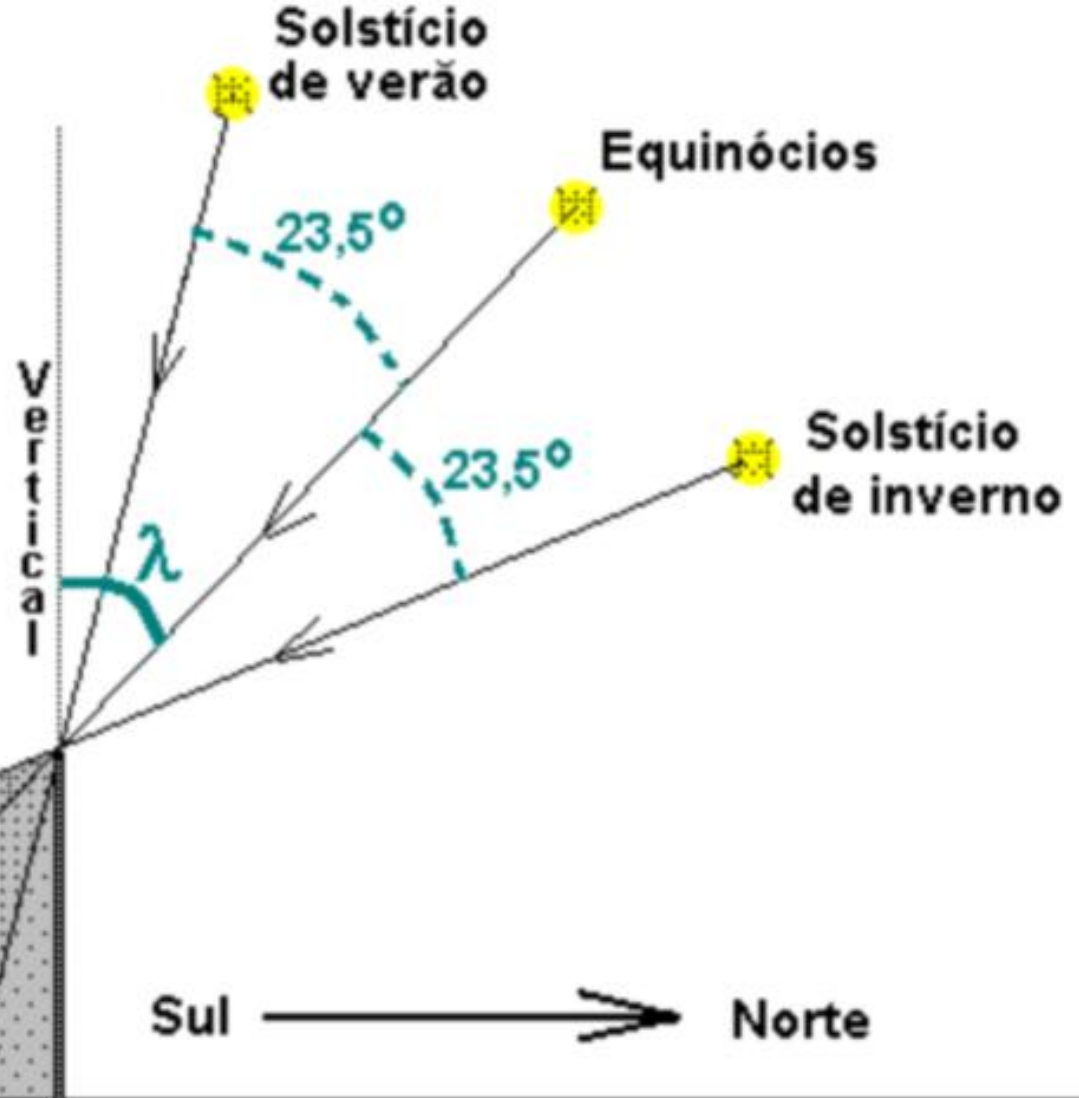
$27,4^\circ$

N

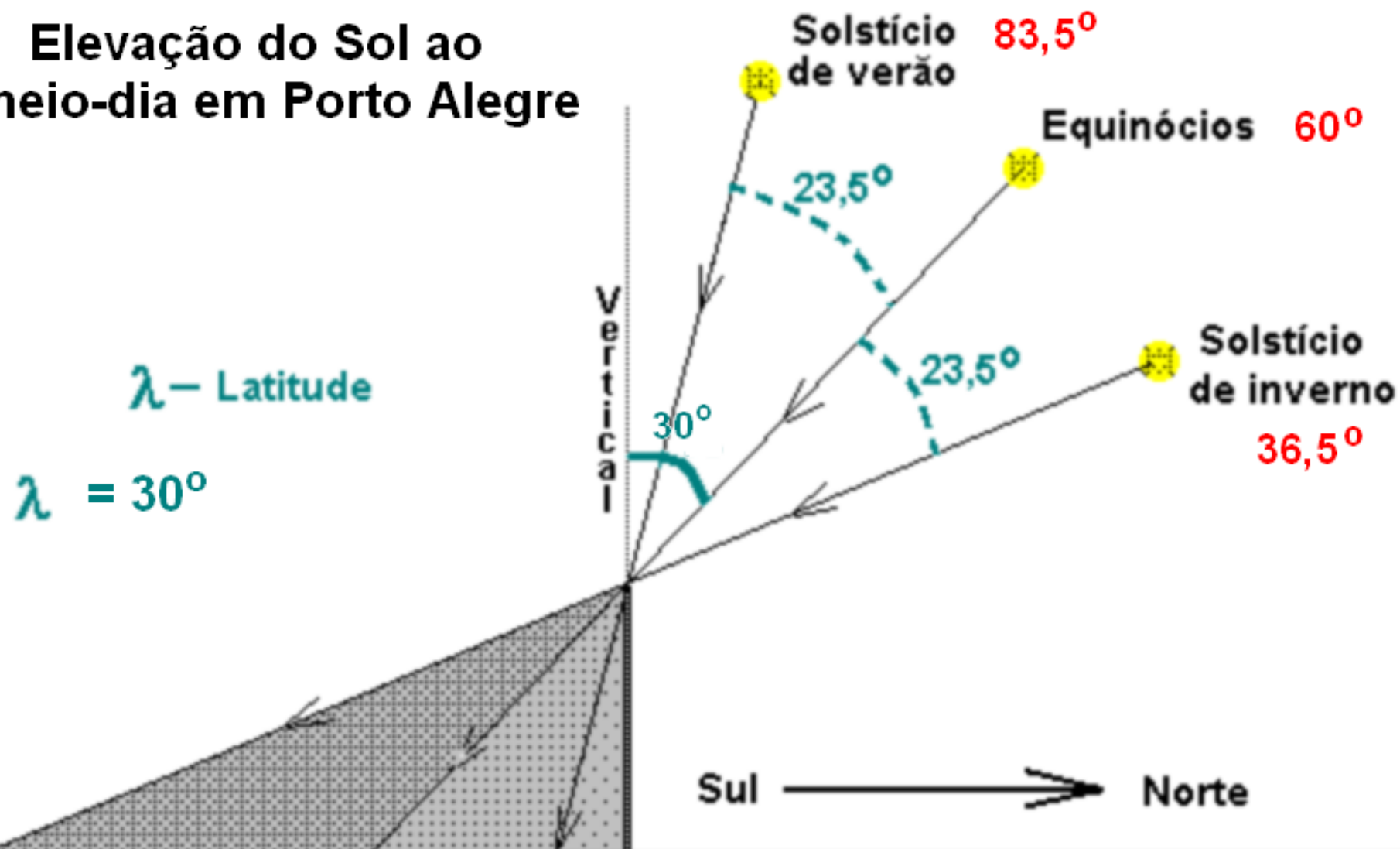
E

Elevação do Sol ao meio-dia

λ - Latitude



Elevação do Sol ao meio-dia em Porto Alegre



**Distância entre
Alexandria e Siena:
834 km**

**Diferença em
latitude:
7,3°**

Alexandria - 31,4 graus

Cairo

Siena - 24,1 graus

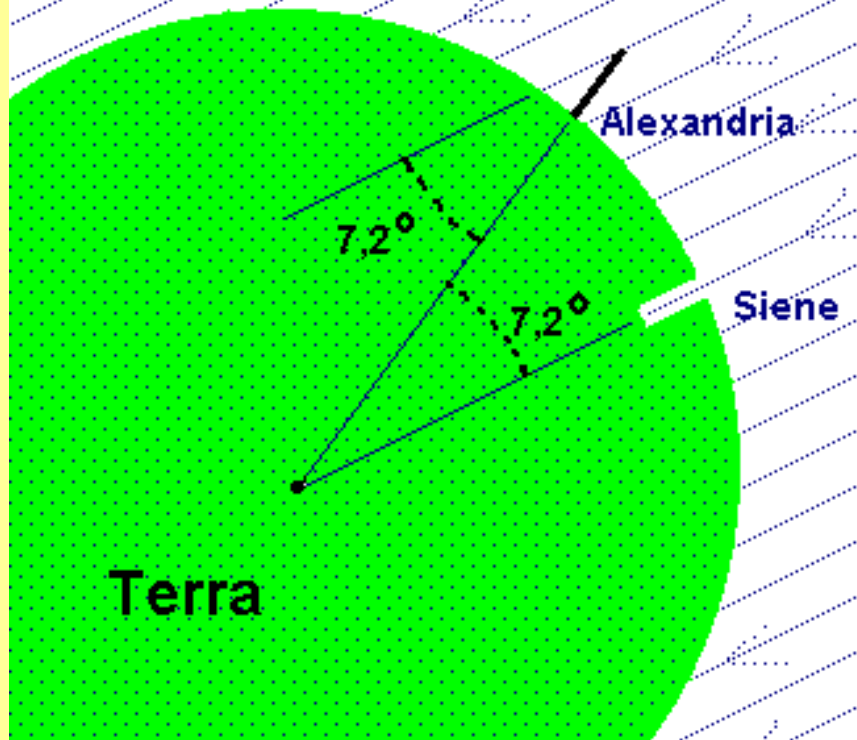
Egito

Aswan, Egito

US Dept of State Geographer
© 2011 Google
Map Data © 2011 AND
© 2011 Europa Technologies

476 km
Prof. Fernando Lang da Silveira

Ao meio-dia em Siene e Alexandria



Prof. Fernando Lang da Silveira

Eratóstenes (século III A. C.), bibliotecário da grande coleção de manuscritos de Alexandria, sabia que no solstício de verão em Siene, ao meio-dia, o Sol iluminava o fundo de um poço (Siene localizava-se no Trópico de Câncer). Em Alexandria, que está ao Norte de Siene, uma estaca vertical projetava sombra a aproximadamente $7,2^\circ$ com a vertical.

Eratóstenes

**Distância entre
Alexandria e Siena:
5000 estádios ou
cerca de 800 km**

**Diferença em
latitude:
7,2°**

Alexandria - 31,4 graus

Cairo

Siena - 24,1 graus

Egito

Aswan, Egito

US Dept of State Geographer
© 2011 Google
Map Data © 2011 AND
© 2011 Europa Technologies

11

A distância entre Siene e Alexandria é igual a $1/50$ da circunferência da Terra pois o ângulo de $7,2^\circ$ é $1/50$ de 360° .

A distância entre Siene e Alexandria, medida pelos betamitas – agrimensores que faziam medidas contando seus passos –, a mando de Alexandre o Grande, resultou em 5.000 estádios. Portanto, a circunferência da Terra era 50×5.000 ou 250.000 estádios.

Prof. Fernando Lang da Silveira

1 estádio \approx 0,16 km

250.000 estádios \approx 40.000 km.

No início do século XX foi descoberto um texto de 1688 na Biblioteca do Vaticano que se constitui em uma transcrição do texto original de Aristarco de Samos (310 A. C. - ?):

Aristarco nos tamanhos e distâncias do Sol e da Lua

ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΥ ΣΑΜΙΟΥ

Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης,

B I B Λ Ι Ο Ν.

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

Τῆς Συναγωγῆς ΒΙΒΛΙΟΥ Β'

Ἀπόσπασμα.

ARISTARCHI SAMII

De Magnitudinibus & Distantiis Solis & Lunæ,

L I B E R.

Nunc primum Græce editus cum Federici Commandini versione Latina, notisq; illius & Editoris.

PAPPI ALEXANDRINI

SECUNDI LIBRI

MATHEMATICÆ COLLECTIONIS,

Fragmentum,

Haëtenus Desideratum.

E Codice MS. edidit, Latinum fecit,

Notisque illustravit

JOHANNES WALLIS, S. T. D. Geometriæ

Professör Savilianus; & *Regalis Societatis*

Londini, Sodalis.

O X O N I Æ,

E T H E A T R O S H E L D O N I A N O,

1688.

ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΥ ΠΕΡΙ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ
ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΙΟΥ ΚΑΙ ΣΕΛΗΝΗΣ

ARISTARCO NOS TAMANHOS E DISTÂNCIAS DO SOL E DA LUA

(ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ)

(HIPÓTESES)

α'. Τὴν σελήνην παρὰ τοῦ ἡλίου τὸ φῶς λαμβάνειν.

5 β'. Τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν
τῆς σελήνης σφαιῖραν.

γ'. Ὄταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνεται, νεύειν εἰς
τὴν ἡμετέραν ὄψιν τὸν διορίζοντα τό τε σκιερὸν καὶ τὸ
λαμπρὸν τῆς σελήνης μέγιστον κύκλον.

10 δ'. Ὄταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνεται, τότε αὐτὴν
ἀπέχειν τοῦ ἡλίου ἔλασσον τεταρτημορίου τῷ τοῦ τεταρ-
τημορίου τριακοστῷ.

ε'. Τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο.

15 ς'. Τὴν σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πεντεκαιδέκατον μέρος
ζωδίου.

As hipóteses de Aristarco

1 – A Lua recebe a sua luz do Sol.

2 – A Terra está no centro da órbita circular da Lua.

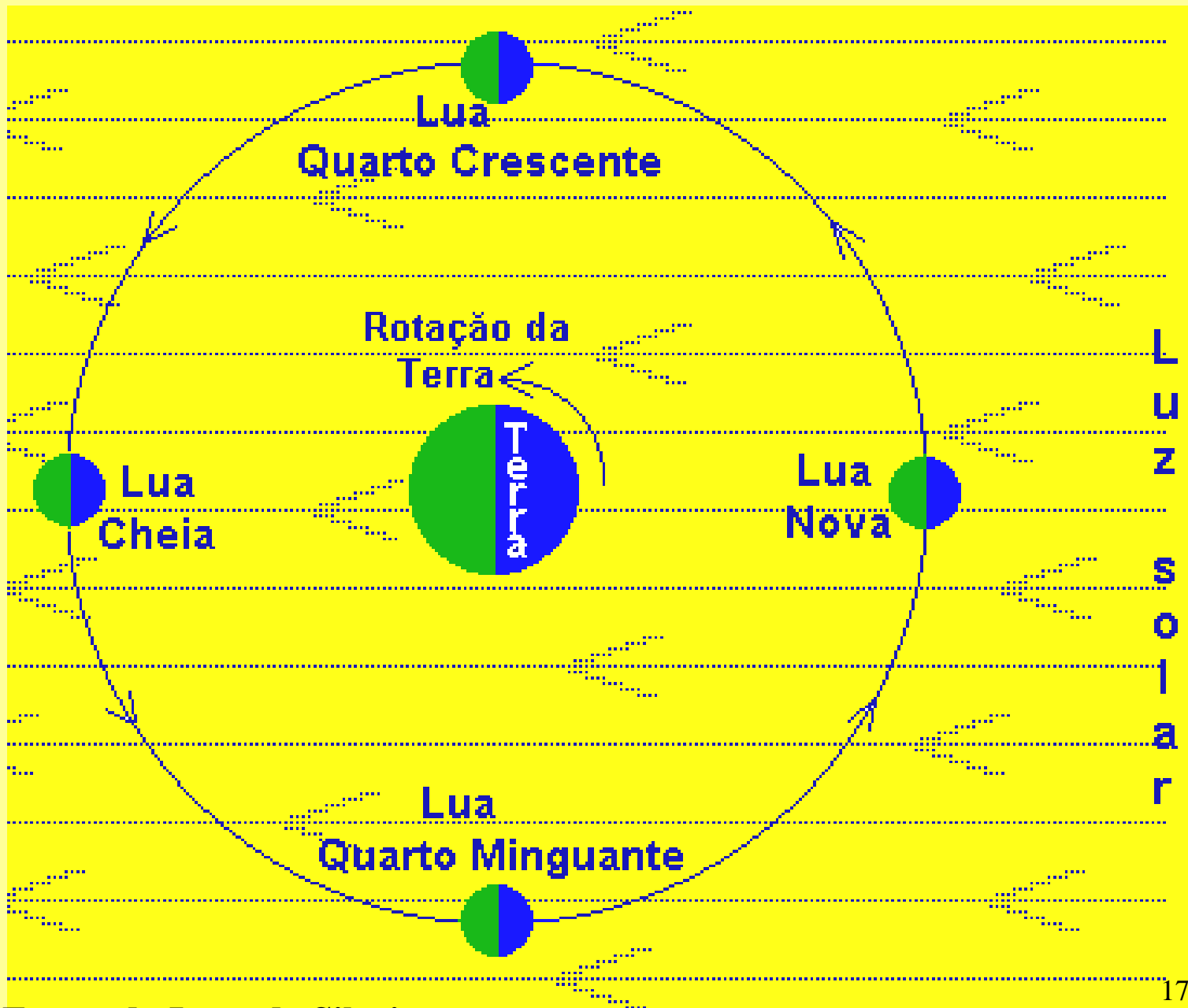
3 – Quando a Lua está em Quarto Crescente ou Minguante, o círculo que divide a Lua na sua parte brilhante e escura é paralelo ao raio Terra–Lua.

4 – Quando a Lua está em Quarto Crescente ou Quarto Minguante, o ângulo Lua–Sol–Terra é 3 graus.

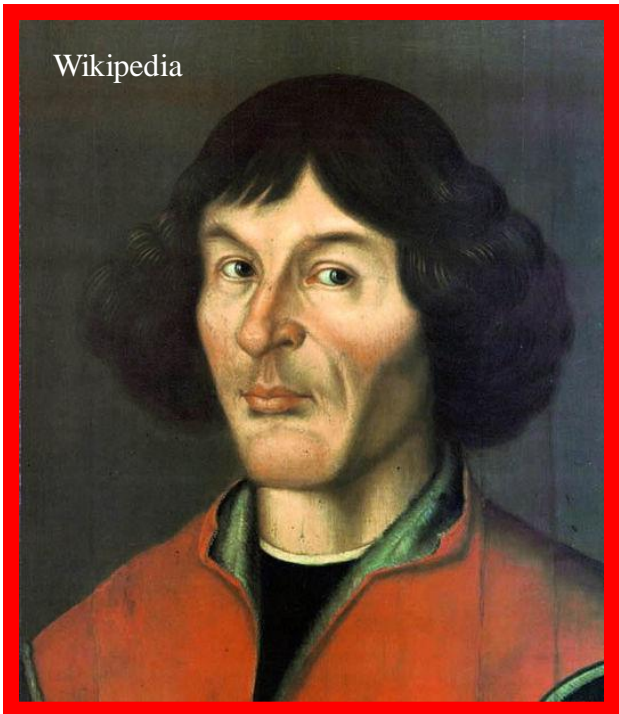
5 – O diâmetro angular da Lua e o do Sol em relação à Terra é 2 graus (*0,5 graus*).

6 – O diâmetro do cone de sombra da Terra é duas vezes o diâmetro da Lua.

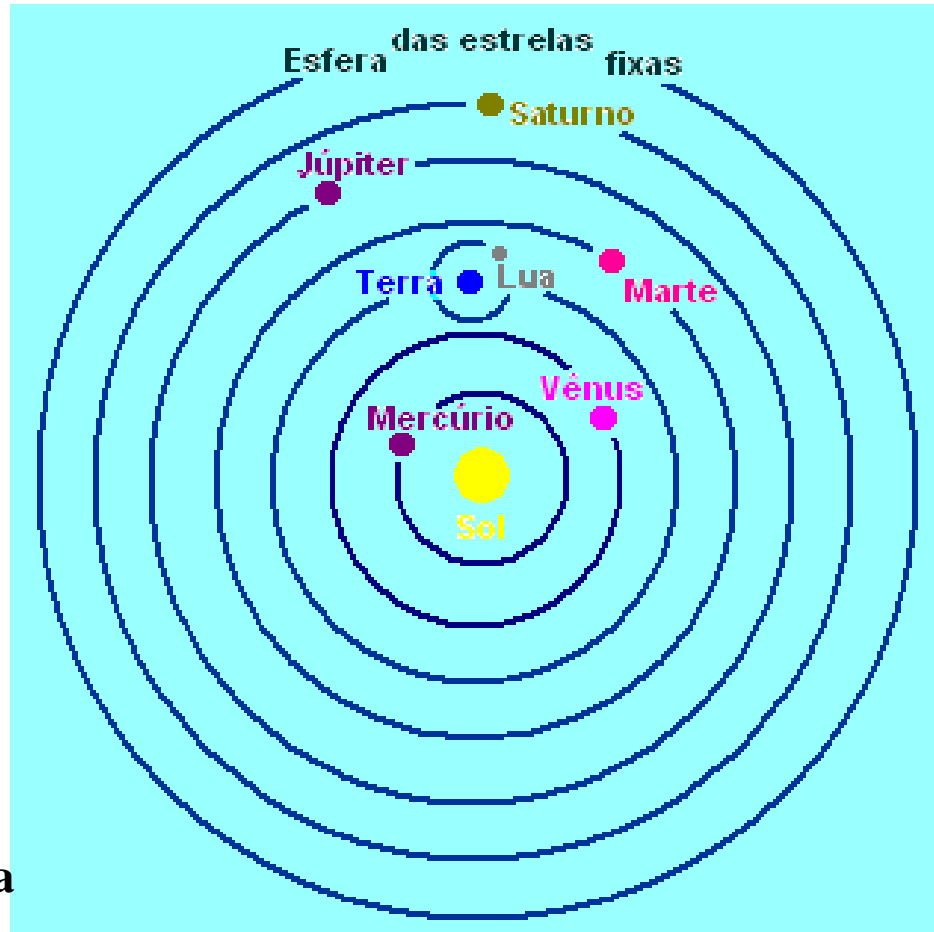
Sistema Terra-Lua e as fases da Lua



O que levou Aristarco e depois Copérnico a propor a hipótese heliocêntrica?



Prof. Fernando Lang da Silveira



Porque o centro não poderia mais estar na Terra, devendo estar no Sol?

Haveria algum dado astronômico novo que impusesse esta revolução?

**Copérnico, Kepler, Galileu
e tantos outros**

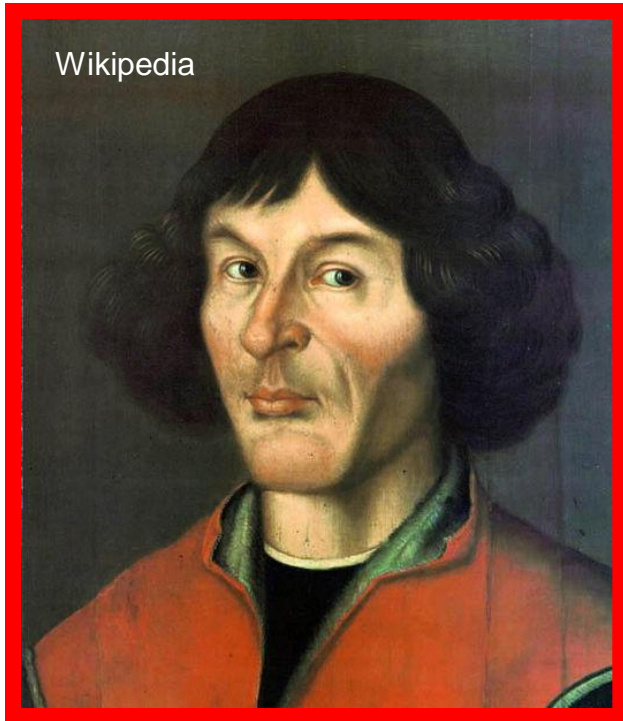
eram neo-platônicos !

Para os platônicos o Sol

era o astro mais importante !



No meio de todos os assentos, o Sol está no trono. Neste belíssimo templo poderíamos nós colocar esta luminária noutra posição melhor de onde ela iluminasse tudo ao mesmo tempo?



Chamaram-lhe corretamente a Lâmpada, o Mente, o Governador do Universo; Hermes Trimegisto chama-lhe o Deus Visível, a Electra de Sófocles chama-lhe O que vê tudo. Assim, o Sol senta-se como num trono real governando os seus filhos, os planetas que giram à volta dele.

Copérnico (1543)

Em primeiro lugar, a menos que talvez um cego possa negá-lo perante ti, dentre todos os corpos do universo o mais notável é o Sol, cuja essência integral nada mais é que a mais pura das luzes que pode existir em qualquer estrela; **que é por si só, o produtor, conservador e aquecedor de todas as coisas; é uma fonte de luz, rico em frutífero calor, absolutamente claro, límpido e puro para a vista, a fonte da visão, pintor de todas as cores, denominado rei dos planetas (...)**

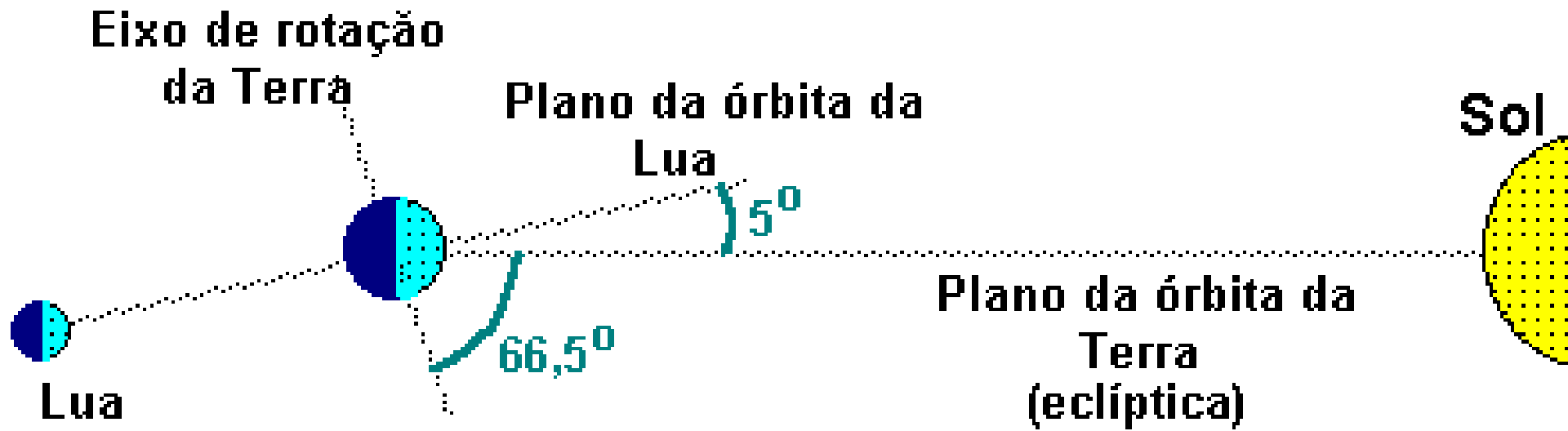
**(...) por seu poder, olho do mundo; por sua
beleza, único que podemos considerar
merecedor do Deus Altíssimo.**

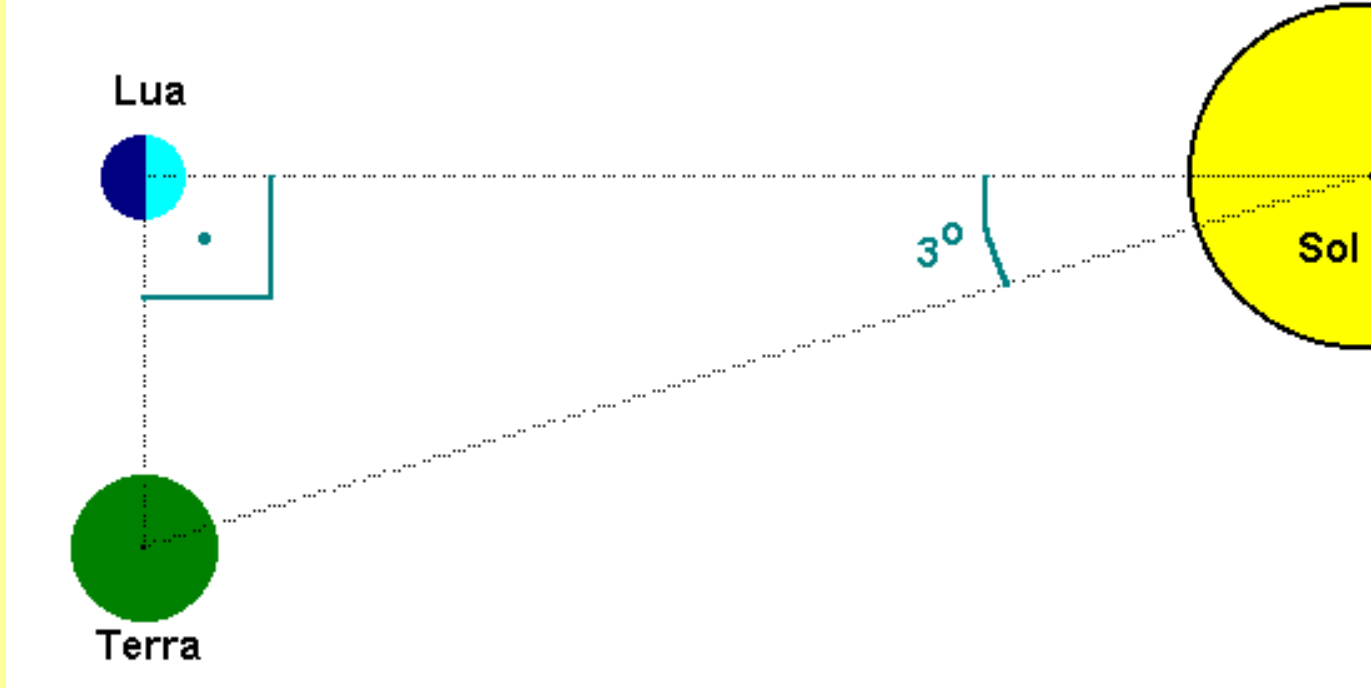
**Pois se os germânicos elegem como César o
que tem o poder máximo em todo o império,
quem hesitaria em conferir votos dos
movimentos celestes àquele que já vem
administrando todos os demais movimentos e
mudanças por graça da luz, que é a sua posse
exclusiva?**



Portanto, como não é próprio ao criador difundir-se em uma órbita, mas antes, proceder a partir de um certo princípio, nenhuma parte do mundo e nenhuma estrela é merecedora de tão grande honra; **então, pelas razões mais elevadas, voltamos ao Sol, o único que parece, em virtude de sua dignidade e poder, adequado a essa missão motora e digno de tornar-se a morada do próprio Deus.**

Sistema Terra-Lua está em órbita em torno do Sol





$$\text{sen } 3^\circ \approx \frac{d_{\text{Terra-Lua}}}{d_{\text{Terra-Sol}}}$$

$$d_{\text{Terra-Lua}} = d_{\text{Terra-Sol}} \cdot \text{sen } 3^\circ \approx \frac{1}{19} \cdot d_{\text{Terra-Sol}}$$

O ângulo que Aristarco afirmou ser 3° , atualmente é estimado em aproximadamente $0,15^\circ$ ($\text{sen } 0,15^\circ \approx \frac{1}{380}$). Desta forma a distância média Terra–Sol é aproximadamente 380 vezes maior do que a distância média Terra–Lua.

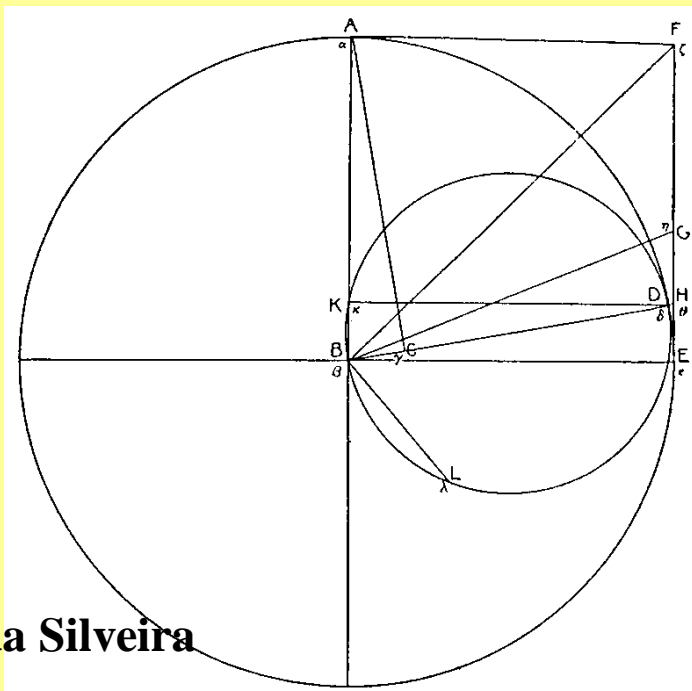
ζ.

Τὸ ἀπόστημα δ ἀπέχει ὁ ἥλιος ἀπὸ τῆς γῆς τοῦ ἀπο-
στήματος οὗ ἀπέχει ἡ σελήνη ἀπὸ τῆς γῆς μείζον μὲν
ἐστὶν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλάσιον, ἔλασσον δὲ ἢ εἰκοσαπλάσιον.

Proposição 7

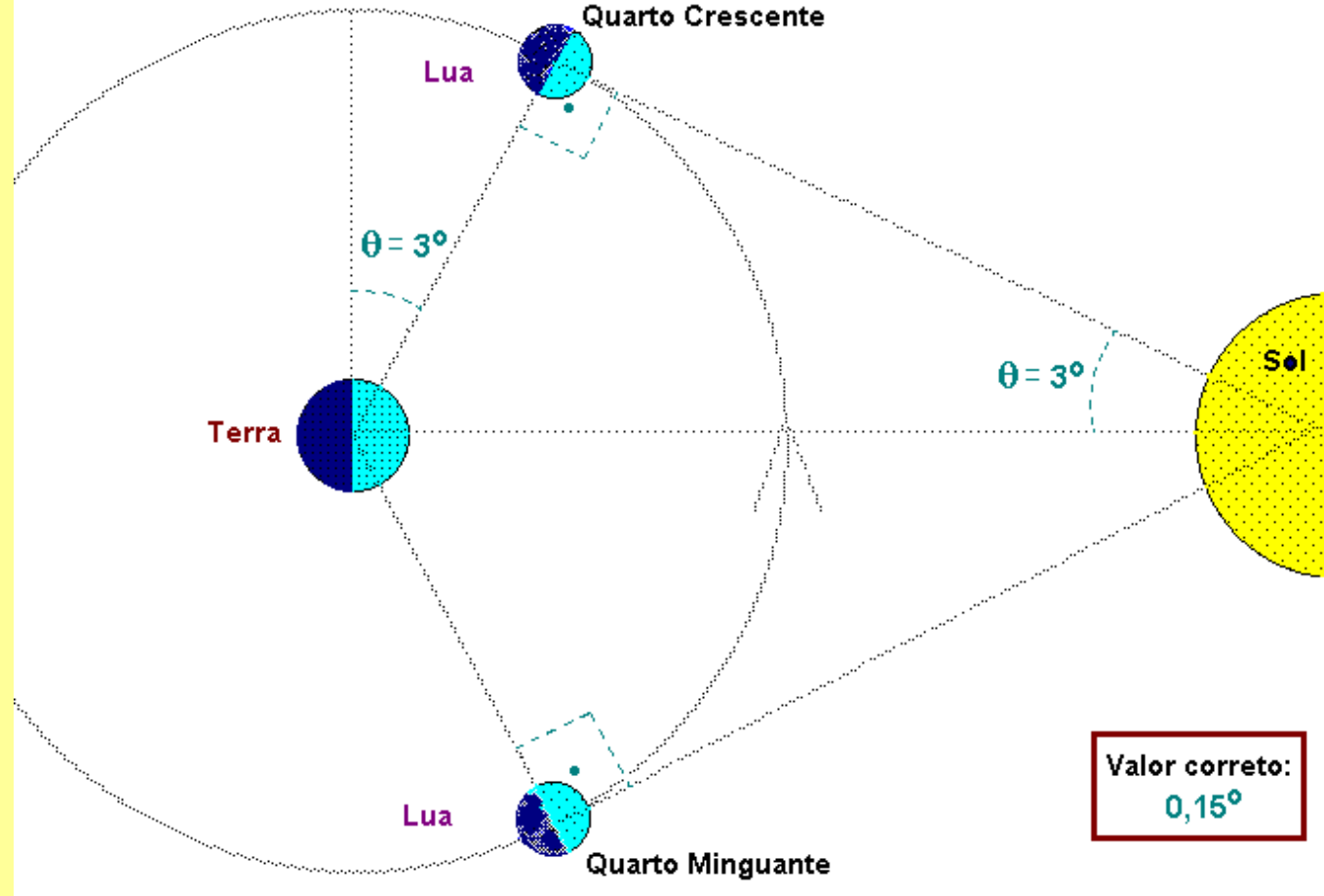
A distância da Terra ao Sol é maior do que dezoito vezes, mas menor do que vinte vezes, a distância da Terra à Lua.

A proposição 7 é demonstrada em 3 páginas, onde também se encontra a seguinte figura:



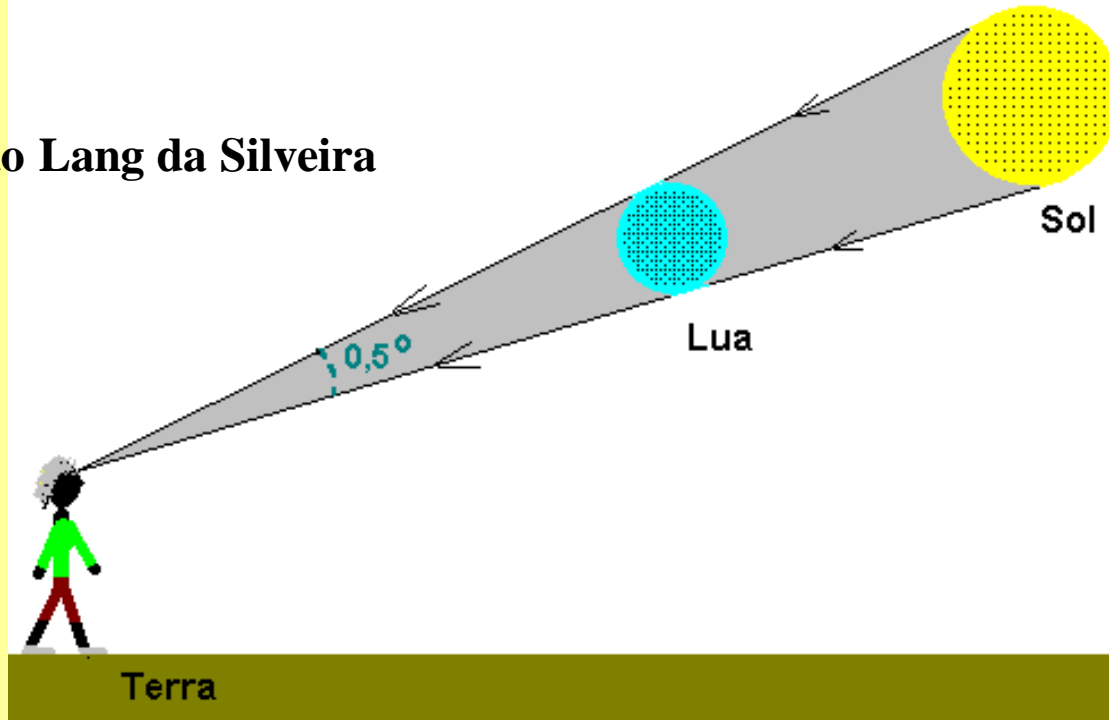
$$\frac{t_{CM} - t_{MC}}{t_{CM} + t_{MC}} = \frac{2\theta}{360^\circ}$$

$$\theta = \frac{t_{CM} - t_{MC}}{t_{CM} + t_{MC}} 180^\circ$$



Se $t_{CM} - t_{MC} \cong 0,5 \text{ dia}$ e como $t_{CM} + t_{MC} \cong 29,5 \text{ dias}$, então:

$$\theta = \frac{0,5}{29,5} 180^\circ \cong 3^\circ$$

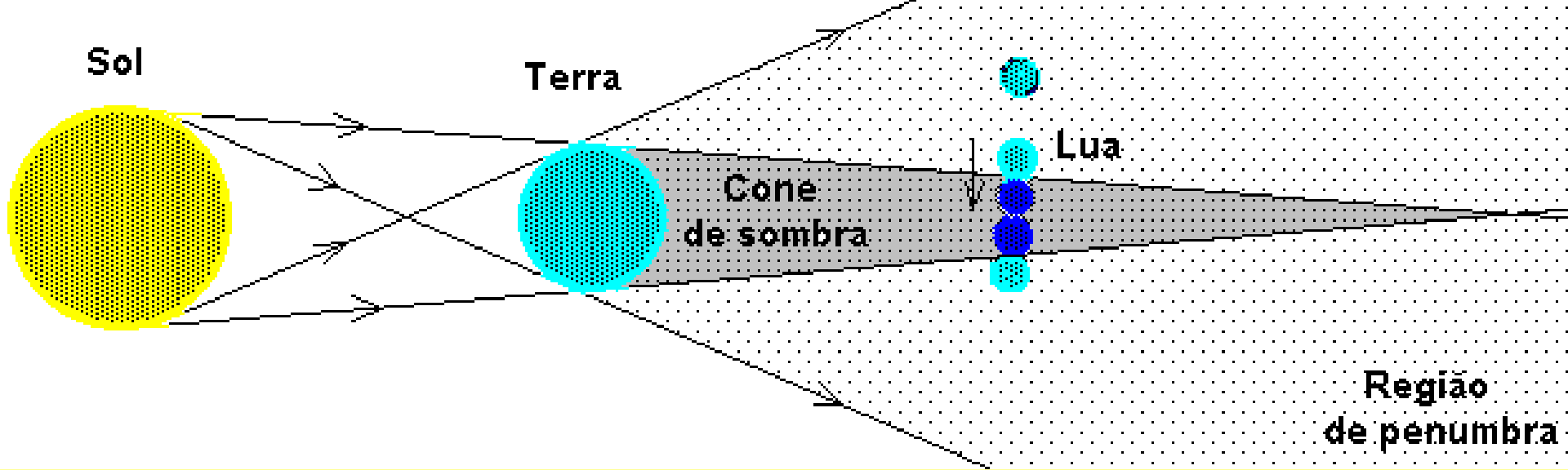


- Dado que a Lua e o Sol possuem o mesmo tamanho angular quando vistos da Terra, a razão entre as distâncias da Terra aos dois astros é igual a razão entre os diâmetros dos dois astros.

$$\frac{D_{\text{Sol}}}{D_{\text{Lua}}} = \frac{d_{\text{Terra-Sol}}}{d_{\text{Terra-Lua}}} \approx 19 \Rightarrow D_{\text{Sol}} \approx 19 \cdot D_{\text{Lua}}$$

- O comprimento da órbita da Lua é aproximadamente 720 vezes o seu diâmetro pois $0,5^\circ$ é igual a $1/720$ de 360° .

$$2\pi d_{\text{T,L}} \cong 720 D_L \Rightarrow d_{\text{T,L}} \cong 115 D_L$$



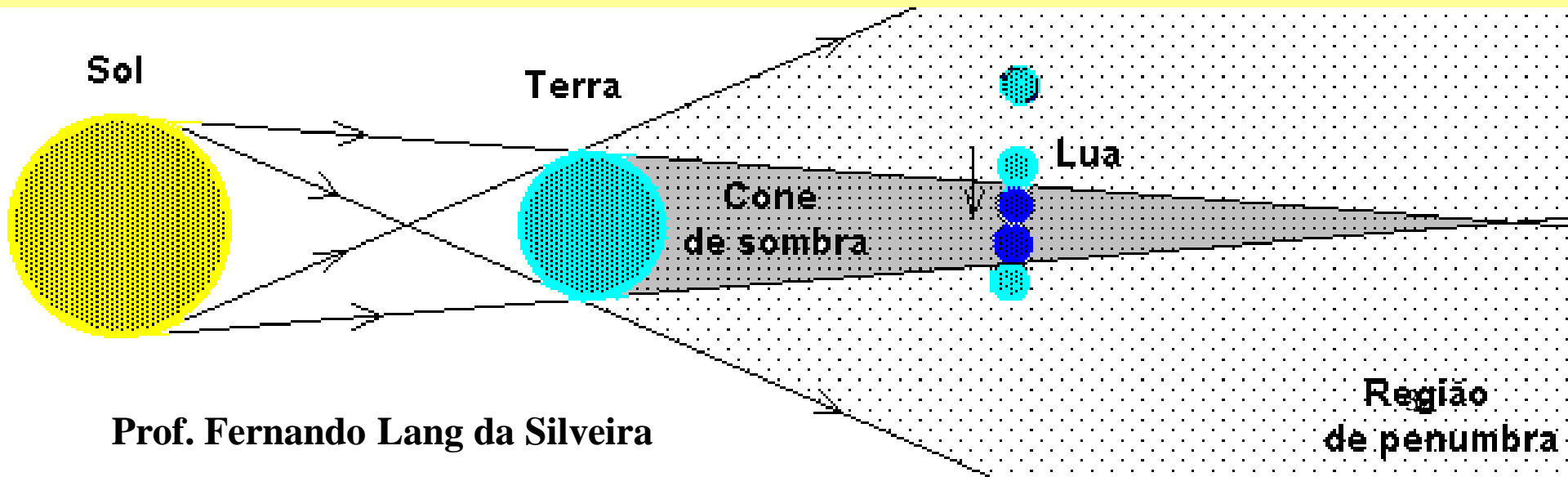
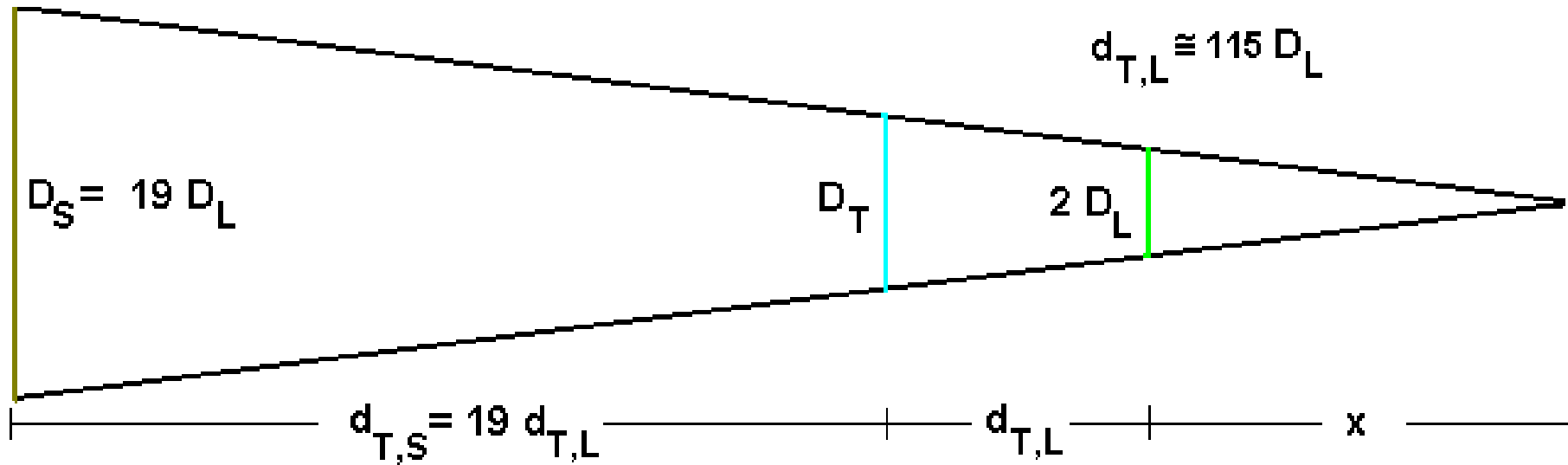
Durante um eclipse da Lua de duração máxima, foram medidos os seguintes intervalos de tempo:

- Desde o início do ingresso no cone de sombra até quando a Lua entrou totalmente nessa região (Δt_1).
- Do trânsito da Lua no interior do cone de sombra, isto é, duração da etapa em que a Lua está completamente imersa na sombra (Δt_2).

RESULTADO: $\Delta t_2 = 2 \Delta t_1$

CONCLUSÃO DE ARISTARCO: o diâmetro do cone de sombra é o dobro do diâmetro da Lua.

A partir dos resultados já obtidos, pode-se construir o seguinte triângulo para o cone de sombra:



ποιήσῃ δὴ τομὰς ἐν ταῖς σφαίραις κύκλους. ποιείτω τοὺς $\Gamma\Delta\text{E}$,
 $\text{ZH}\Theta$ · μείζων ἄρα ὁ $\Gamma\Delta\text{E}$ κύκλος τοῦ $\text{HZ}\Theta$ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ
ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $\Gamma\Delta\text{E}$ κύκλου μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου
20 τοῦ $\text{ZH}\Theta$ κύκλου. δυνατὸν δὴ ἐστὶ λαβεῖν τι σημεῖον, ὡς τὸ K , ἢ
 η , ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $\Gamma\Delta\text{E}$ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου

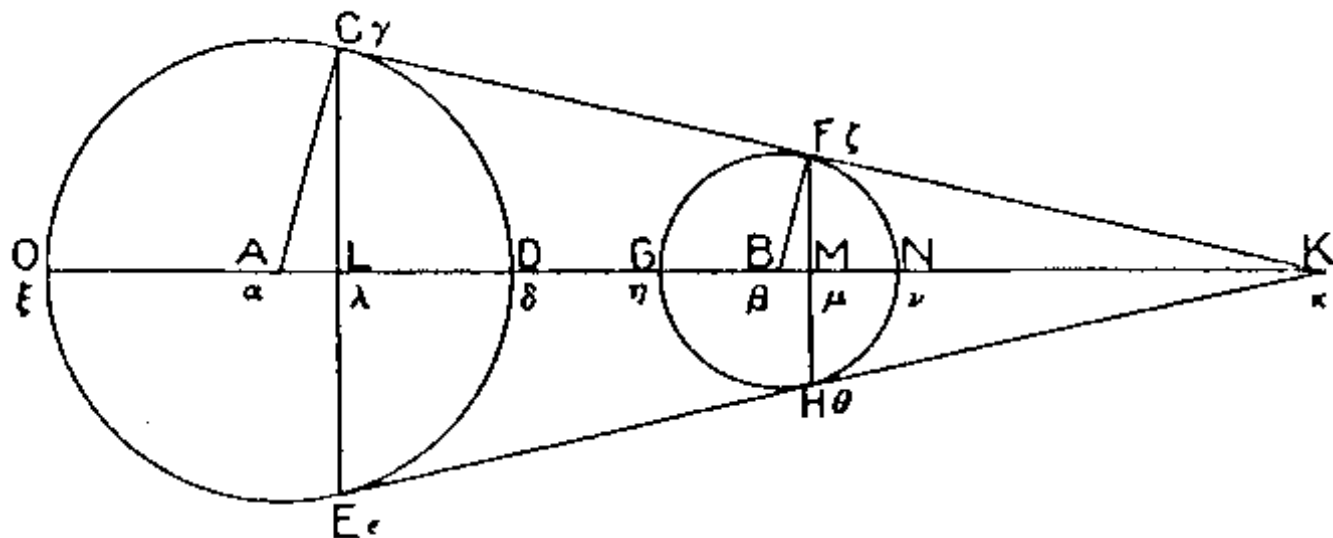


Fig. 17.

τοῦ $\text{ZH}\Theta$ κύκλου, οὕτως ἡ AK πρὸς τὴν KB . ἔστω οὖν εἰλημμένον
τὸ K σημεῖον, καὶ ἤχθω ἡ KZ ἐφαπτομένη τοῦ $\text{ZH}\Theta$ κύκλου, καὶ
ἐπέξεύχθω ἡ ZB , καὶ διὰ τοῦ A τῇ BZ παράλληλος ἤχθω ἡ AG ,

κέντρου τοῦ EZH κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $\Theta\Delta K$ κύκλου, οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AG . ὡς δὲ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ EZH κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $MN\Xi$ κύκλου, οὕτως ἐστὶν ἢ BO πρὸς τὴν OD . καὶ ὡς ἄρα ἢ BA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἢ BO πρὸς τὴν
 5 OD . καὶ διελόντι, ὡς ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν GA , οὕτως ἢ $B\Delta$ πρὸς τὴν

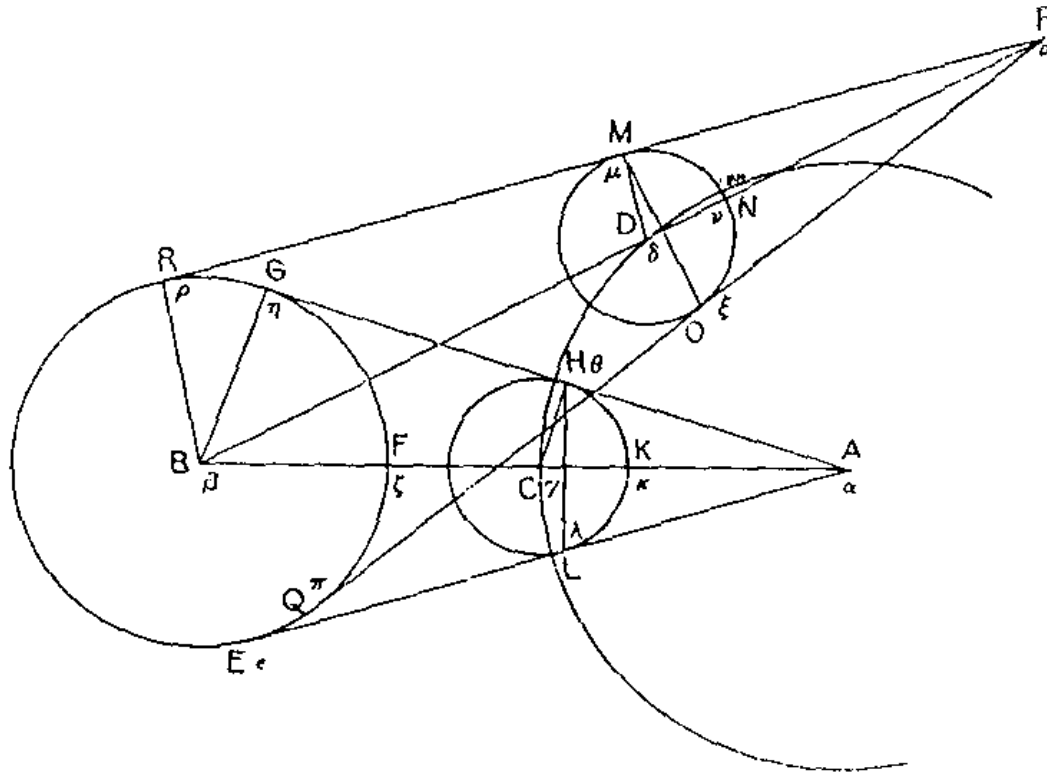


Fig. 19.

ΔO , καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως ἢ GA πρὸς τὴν ΔO . καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἢ $B\Gamma$ τῆς $B\Delta$. κέντρον γάρ ἐστι τὸ A τοῦ $\Gamma\Delta$ κύκλου. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἢ AG τῆς ΔO . καὶ ἔστιν ἴσος ὁ $\Theta K\Lambda$ κύκλος τῷ $MN\Xi$ κύκλῳ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν καὶ ἢ $\Theta\Lambda$ τῆς $M\Xi$ [

ἴσαι εἰσίν, διπλασίονες ἄρα εἰσὶ τῆς AN , ὥστε ἡ EN τῆς AN
 ἐλάσσων ἐστὶν ἢ δι-
 πλη. ἐπεξεύχθωσαν
 δὴ αἱ $ΔΓ$, $ΓΝ$, καὶ
 5 διήχθω ἡ $ΔΓ$ ἐπὶ τὸ
 O . πολλῶ ἄρα ἡ EN
 τῆς AO ἐλάσσων ἐσ-
 τὶν ἢ $β$. καὶ ἐπεὶ ἡ
 $ΓA$ κάθετός ἐστιν ἐπὶ
 10 τὴν BA , παράλληλος
 ἄρα ἐστὶν τῇ EN . ἴση
 ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν
 AN τῇ ὑπὸ τῶν
 $ΓAN$ γωνία. καὶ ἴσ-
 15 τιν ἴση μὲν ἡ NA τῇ
 AE , ἡ δὲ $ΔΓ$ τῇ $ΓN$.
 ὁμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ
 ENA τρίγωνον τῷ
 AN τριγώνῳ· ἐστὶν
 20 ἄρα, ὡς ἡ EN πρὸς τὴν
 NA , οὕτως ἡ NA πρὸς
 τὴν $ΔΓ$. ἀλλ' ἡ NA
 πρὸς τὴν $ΔΓ$ μείζονα
 λόγον ἔχει ἢ ὅν τὰ $πθ$
 5 πρὸς τὰ $με$, τουτέστι,
 τὸ ἀπὸ NA πρὸς τὸ
 ἀπὸ $ΔΓ$ μείζονα λό-
 γον ἔχει ἢ περ τὰ
 $ζ$ ἄρα πρὸς τὰ $βκε$
 10 καὶ τὸ ἀπὸ EN ἄρα
 πρὸς τὸ ἀπὸ NA μεί-
 ζονα λόγον ἔχει ἢ περ
 τὰ $ζ$ ἄρα πρὸς τὰ $βκε$,
 καὶ ἡ EN πρὸς τὴν AO

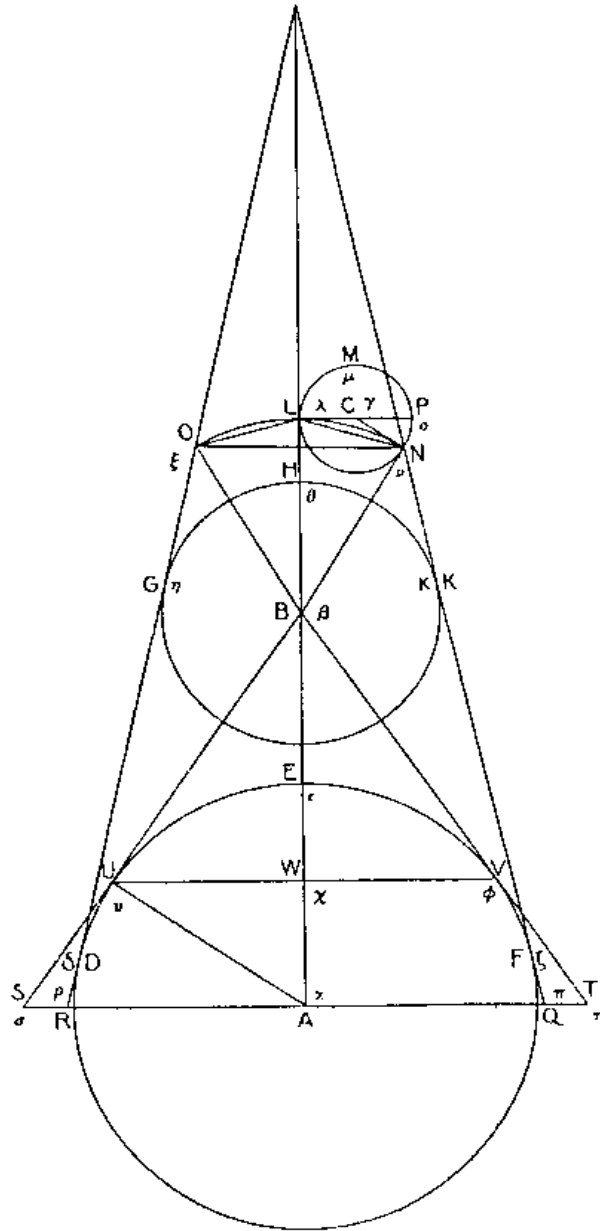
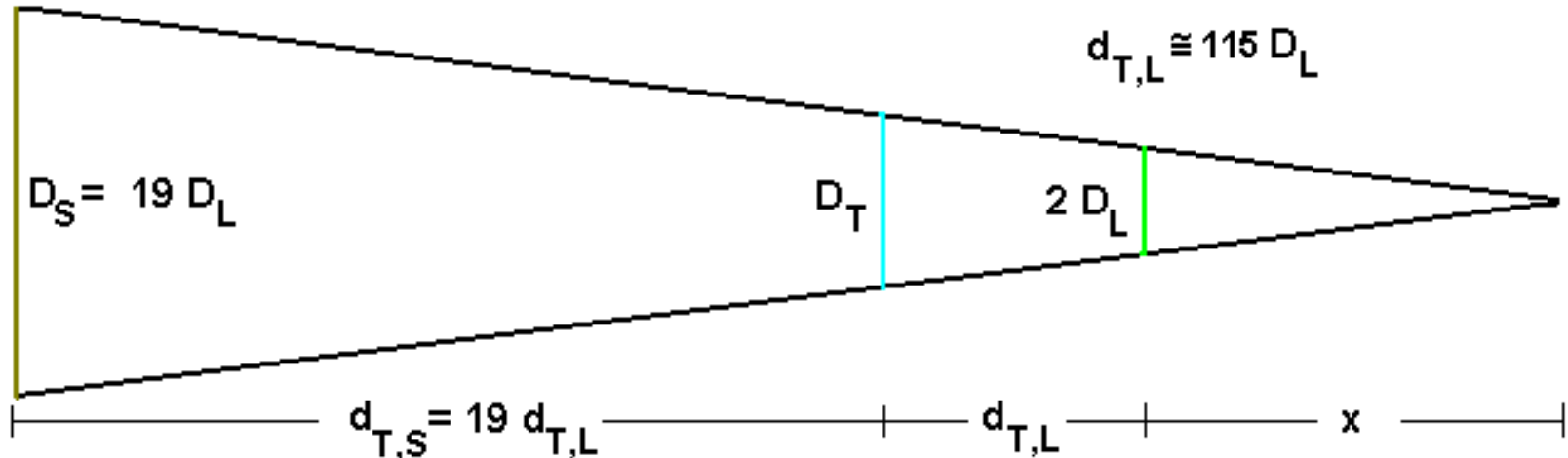


Fig. 31.

8. β] διπλή W

30. EN] τῆς EN W

31. NA] τῆς NA W



$$\frac{19D_L}{2D_L} = \frac{20d_{T,L} + x}{x} \Rightarrow x \cong 2,35 d_{T,L}$$

$$\frac{3,35d_{T,L}}{2,35d_{T,L}} = \frac{D_T}{2D_L} \Rightarrow D_L \cong 0,35 D_T$$

$$d_{T,L} \cong 115 D_L \cong 115 \cdot 0,35 D_T \Rightarrow d_{T,L} \cong 40 D_T$$

$$D_S \cong 19 D_L \cong 19 \cdot 0,35 D_T \Rightarrow D_S \cong 6,7 D_T$$

	Medidas de Aristarco	Medidas atuais
Diâmetro da Lua	$0,35 D_{\text{Terra}}$	$0,27 D_{\text{Terra}}$
Distância Terra–Lua	$40 D_{\text{Terra}}$	$30 D_{\text{Terra}}$
Distância Terra–Sol	$19 d_{\text{Terra, Lua}}$	$380 d_{\text{Terra, Lua}}$
Diâmetro do Sol	$6,7 D_{\text{Terra}}$	$109 D_{\text{Terra}}$

O Sol é quase **sete vezes maior** do que a Terra. O heliocentrismo está corroborado pois o astro que está no centro deve ser e, efetivamente, é o maior.