

# Colisão com o ‘efeito estilingue’ (Collision with the ‘slingshot effect’)

Fernando Lang da Silveira<sup>1</sup>, Luci F.M. Braun<sup>2</sup> e Thomas Braun<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

<sup>2</sup>Colégio de Aplicação Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil

Recebido em 6/10/2009; Aceito em 15/1/2010; Publicado em 15/2/2011

Abordamos teoricamente a colisão com o ‘efeito estilingue’ onde um corpo transfere momento linear e energia cinética para um segundo corpo de massa menor, fazendo com que a energia mecânica desse segundo corpo cresça de forma surpreendente. Mostramos que, mesmo quando as colisões são inelásticas, o ganho de energia mecânica pode ser grande. Apresentamos um estudo experimental do interessante efeito realizado a partir de um vídeo. Finalmente discutimos o ‘efeito estilingue gravitacional’ utilizado para aumentar a energia mecânica de sondas espaciais ao passarem nas imediações de planetas.

**Palavras-chave:** colisão, transferência de momento linear, ‘efeito estilingue’.

Collision with the ‘slingshot effect’. We discuss theoretically the collision with the ‘slingshot effect’ where a body transfers linear momentum and kinetic energy to a second smaller body mass, causing the mechanical energy of this second body to grow dramatically. We show that even as the collisions are inelastic, the gain of mechanical energy can be large. We present an interesting experimental study of the effect achieved from a video. Finally we discuss the ‘gravitational slingshot effect’ used to increase the mechanical energy of the spacecraft passed nearby planets.

**Keywords:** collision, linear momentum transference, ‘slingshot effect’.

## 1. Introdução

Um inusitado efeito acontece quando duas bolas dispostas uma em cima da outra (vide a Fig. 1) são deixadas cair de uma altura  $H$  sobre um piso duro. A bola de baixo tem sua velocidade revertida pela colisão com o piso, colidindo com a bola de cima que ainda está descendo. O resultado dessa segunda colisão pode determinar que a bola de cima suba até uma altura bem maior de onde saiu, sendo o limite superior para o repique da bola menor nove vezes a altura inicial!

O objetivo desse texto é discutir teoricamente esse interessante ‘efeito estilingue’ no qual a bola de menor massa ganha energia mecânica. Apresentamos também resultados experimentais a partir de vídeos sobre o efeito. Finalmente abordamos o ‘efeito estilingue gravitacional’ por intermédio do qual sondas espaciais efetivamente ganham energia cinética ao passar perto de planetas.

## 2. Colisão da bola maior com o piso

Inicialmente consideremos a descida da bola de baixo, que tem massa  $M$ , até o piso. Admitindo que a queda

seja livre, e considerando o sentido para cima como positivo, é fácil mostrar que a velocidade  $V_1$  com qual a bola colide com o piso é

$$V_1 = -\sqrt{2gH}, \quad (1)$$

onde  $g$  é o valor da aceleração de queda livre.

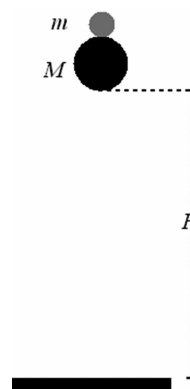


Figura 1 - Duas bolas empilhadas: condições iniciais para o ‘efeito estilingue’.

<sup>1</sup>E-mail: lang@if.ufrgs.br, braun.luci@gmail.com, tbraun@if.ufrgs.br.

Ao colidir com o piso a velocidade da bola sofrerá uma mudança em orientação e, se o coeficiente de restituição para esta colisão é  $e_1$ , a bola terá imediatamente após a colisão com o piso a velocidade  $V_2$  dada por

$$V_2 = -e_1 \cdot V_1. \quad (2)$$

Substituindo-se a Eq. (1) na Eq. (2), encontra-se

$$V_2 = e_1 \cdot \sqrt{2gH}. \quad (3)$$

Se a colisão é inelástica,  $e_1 < 1$ , implicando que a bola ao retornar subirá até uma altura, em relação ao piso, inferior a  $H$ .

### 3. A velocidade das duas bolas após a colisão entre elas

A bola de cima, que possui massa  $m$ , está ainda descendo com a velocidade  $V_1$  quando encontra a bola de baixo que já teve a sua velocidade revertida pelo piso. A equação de conservação do momento linear do sistema constituído pelos dois corpos nessa colisão é, portanto, dada por

$$M \cdot V_2 + m \cdot V_1 = M \cdot U_2 + m \cdot U_1, \quad (4)$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são, respectivamente, as velocidades da bola de massa  $m$  e da bola de massa  $M$  após a colisão.

Representando por  $k$  a razão entre as massas  $M$  e  $m$ , tal que  $M = k \cdot m$ , a expressão (4) pode ser escrita como

$$k \cdot V_2 + V_1 = k \cdot U_2 + U_1. \quad (5)$$

Por outro lado, usando a equação de definição do coeficiente de restituição  $e_2$  para a colisão entre as duas bolas, obtém-se

$$e_2 \cdot (V_2 - V_1) = U_1 - U_2, \quad (6)$$

que, juntamente com s Eqs. (5) e (2), permitem escrever expressões para as velocidades  $U_1$  e  $U_2$ , em função da velocidade  $V_1$  e dos coeficientes de restituição  $e_1$  e  $e_2$ , como segue

$$U_2 = \frac{[(e_1 + 1) \cdot e_2 - e_1 \cdot k + 1]}{(k + 1)} \cdot V_1, \quad (7)$$

e

$$U_1 = -\frac{[(e_1 + 1) \cdot e_2 \cdot k + e_1 \cdot k - 1]}{(k + 1)} \cdot V_1. \quad (8)$$

### 4. Colisões elásticas

Caso todas as colisões sejam elásticas, isto é, ambos os coeficientes de restituição tenham valores iguais à unidade e como  $V_1 < 0$ , tal como estabelecido na Eq. (1), isto é,  $V_1 = -|V_1|$ , resulta das Eqs. (7) e (8)

que as velocidades  $U_2$ , da bola de baixo, e  $U_1$ , da bola de cima após a colisão, valem, respectivamente

$$U_2 = \frac{(k - 3)}{(k + 1)} \cdot |V_1|, \quad (9)$$

e

$$U_1 = \frac{(3k - 1)}{(k + 1)} \cdot |V_1|, \quad (10)$$

Para analisar como se comportam estas velocidades, seus gráficos são apresentados, na Fig. 2, em função da razão  $k$  entre as massas, para  $k > 1$ , visto que a bola de baixo tem massa  $M$  maior do que a massa  $m$  da bola de cima.

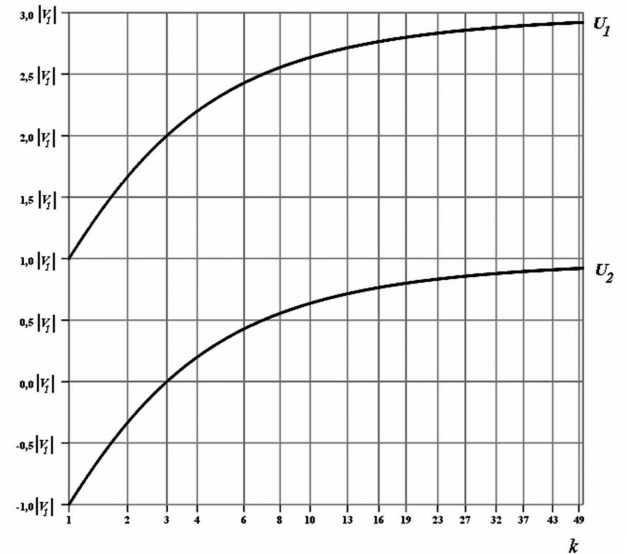


Figura 2 - Velocidades das bolas após a colisão em função da razão entre as suas massas.

Percebe-se pelo gráfico da Fig. 2 que, seja qual for o valor de  $k > 1$ , tem-se  $U_1 > |V_1|$ , isto é, após a colisão, a bola de cima, de massa  $m$  sobe sempre com uma velocidade maior do que aquela que ela atingiu ao descer. Tal se deve à transferência de momento linear e energia cinética da bola maior para a menor. O módulo da velocidade de subida da bola menor tende para três vezes o valor do módulo da velocidade que ela atingiu ao cair quando a razão  $k$  cresce muito (isto é, se a massa da bola de baixo for muito maior do que a massa da bola de cima). Nesse limite a bola maior continua subindo com velocidade  $U_2 = |V_1|$ , isto é a mesma velocidade em módulo adquirida na queda, enquanto a bola menor terá o módulo da sua velocidade triplicado, pois  $U_1 = 3|V_1|$ . Dessa forma, a bola menor subirá até uma altura nove (!!) vezes maior do que a altura de onde ela partiu (a altura máxima de subida é proporcional ao quadrado da velocidade com a qual ela retorna após a colisão).

Nota-se também que, quando  $k = 3$ , isto é, se a bola de baixo tiver massa cerca de três vezes a massa da bola de cima, a bola de cima retorna com o dobro

da velocidade que atingiu na queda, pois  $U_1 = 2|V_1|$  e, portanto, saltará até quatro vezes a altura de onde começou a queda. Neste caso, a bola maior se encontra parada (!) imediatamente após colidir com a bola menor, pois  $U_2 = 0$ . Deste modo, para que ocorra um espetacular salto da bola menor, não há necessidade de que a razão entre as duas massas seja muito grande.

## 5. Colisões inelásticas

A fim de investigar como será o “salto” da bola de cima quando as colisões forem inelásticas, portanto para coeficientes de restituição menores do que a unidade, calculou-se o ganho  $G$  de energia mecânica para a bola menor quando colide com a bola maior. O ganho  $G$  é a razão entre a energia mecânica da bola menor depois da colisão e a energia mecânica da bola menor antes da colisão (o ganho de energia é igual ao quadrado do ganho  $|U_1|/|V_1|$  em velocidade, na colisão). Portanto, da Eq. (8), obtém-se

$$G = \frac{[(e_1 \cdot e_2 + e_2 + e_1) \cdot k - 1]^2}{(k + 1)^2}, \quad (11)$$

cujo gráfico é apresentado na Fig. 3, em função da razão  $k$  entre as massas das bolas, para cinco diferentes combinações de coeficientes de restituição (por simplicidade tomou-se os dois coeficientes de restituição sendo iguais entre si em cada uma das cinco situações).

O gráfico da Fig. 3 indica que, quando a colisão é elástica (isto é, ambos os coeficientes de restituição são iguais à unidade), o ganho  $G$  é maximizado e tende a 9 quando a bola de baixo tem massa muito maior do que a da bola de cima.

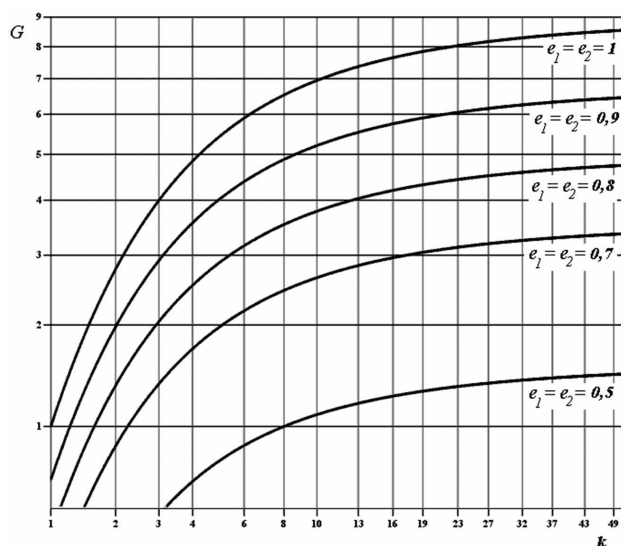


Figura 3 - Ganho  $G$  de energia mecânica da bola menor, para diversas colisões com diferentes coeficientes de restituição, em função da razão  $k$  entre as massas das bolas.

Nota-se que, mesmo em colisões inelásticas com coeficientes de restituição da ordem de 0,7, a bola de

cima terá, para  $k > 2,5$ , ganho  $G$  maior do que a unidade, significando que esta bola (a menor) atinge alturas maiores do que aquela de onde foi deixada cair. Dessa forma, mesmo em colisões inelásticas o ‘efeito estilingue’ é facilmente perceptível, determinando que a bola menor repique a alturas maiores ou muito maiores do que a altura inicial.

## 6. Observando o ‘efeito estilingue’ no laboratório

A fim de se observar o ‘efeito estilingue’, utilizamos duas bolas com massas na razão de 1:3,1, ou seja,  $k$  é aproximadamente 3,1. A bola maior é uma bola de bilhar com cerca de 6 cm de diâmetro. A bola menor tem diâmetro aproximado de 4 cm e constituição semelhante à bola de bilhar. Dessa forma, espera-se um coeficiente de restituição próximo da unidade para a colisão entre as duas bolas. A imagem da Fig. 4 foi obtida da superposição cuidadosa e fidedigna de três quadros de um vídeo que realizamos no laboratório. O vídeo do qual retiramos as imagens aqui utilizadas pode ser acessado em [http://www.if.ufrgs.br/lavim/colisao\\_estilingue/exp\\_colisao\\_estilingue.htm](http://www.if.ufrgs.br/lavim/colisao_estilingue/exp_colisao_estilingue.htm).

Na situação 1 da Fig. 4, ambas as bolas estão empilhadas, em repouso na mão. A seguir as bolas foram deixadas cair e a situação 2 é o primeiro quadro subsequente à colisão das duas bolas; o objetivo dessa imagem é a de se ter uma referência para a avaliação das alturas. De acordo com o que foi analisado na seção 4, decorre do fato da razão entre as massas ser aproximadamente igual a 3, que, após a colisão, a bola maior fica quase parada e a bola menor sobe com velocidade maior do que aquela atingida na queda!

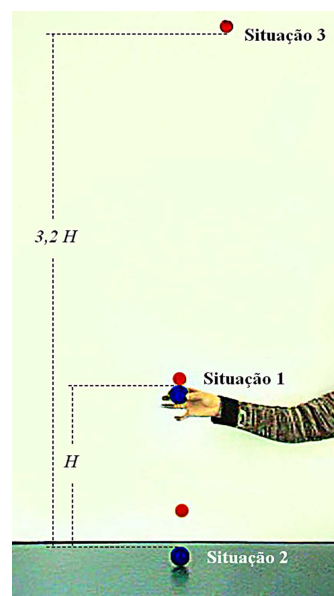


Figura 4 - Imagem obtida da superposição de três quadros de um vídeo sobre o ‘efeito estilingue’.

Finalmente, na situação 3, a bola menor está na posição mais elevada registrada pelo vídeo. Observa-se também que a bola menor se deslocou um pouco para a direita enquanto subia, descrevendo uma parábola.

Conforme se observa na Fig. 4, a bola menor sobe cerca de 3,2 vezes a altura inicial e portanto, em consequência da colisão, a sua energia mecânica foi incrementada em cerca de 3,2 vezes. Da curva correspondente a  $e_1 = e_2 = 1$  na Fig. 3, decorre que, quando as colisões são elásticas, o ganho máximo em energia mecânica quando a razão  $k$  entre as massas é aproximadamente 3 vale 4 ( $G = 4$  quando  $k = 3$  e ambos os coeficientes de restituição são iguais à unidade).

O ganho efetivo de energia mecânica da bola menor depende dos coeficientes de restituição para a colisão com o piso e entre as duas bolas. A Fig. 5 foi obtida da superposição de cinco quadros de um vídeo que documenta as sucessivas colisões da bola maior ao ser deixada cair sozinha sobre o piso. O vídeo pode ser encontrado em [http://www.if.ufrgs.br/lavim/coeficiente\\_de\\_restituicao/exp\\_coef\\_rest.htm](http://www.if.ufrgs.br/lavim/coeficiente_de_restituicao/exp_coef_rest.htm).

Os quadros escolhidos registram a posição da largada, a primeira chegada da bola no solo e as três posições mais elevadas subsequentes à primeira, à segunda e à terceira colisão com o piso. A partir das alturas máximas registradas para os repiques sucessivos da bola, é possível se estimar o coeficiente de restituição entre a bola e o piso. Esse coeficiente se situa em cerca de 0,87.

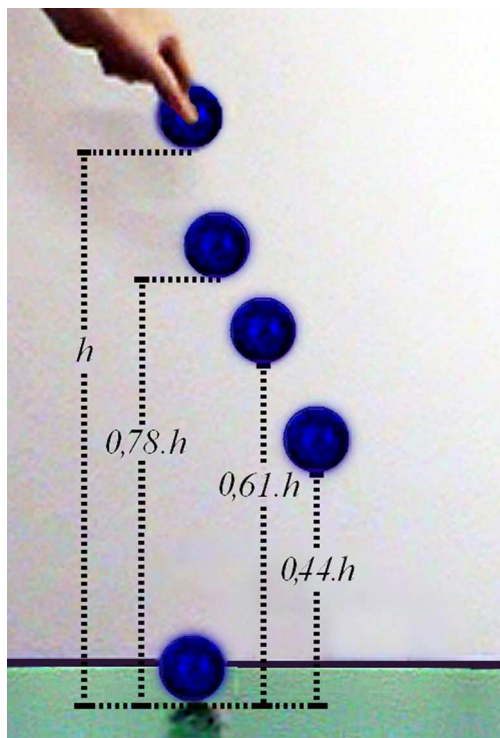


Figura 5 - Imagem obtida da superposição de cinco quadros de um vídeo documentando as colisões sucessivas da bola de bilhar com o piso.

Estimado o coeficiente de restituição  $k_1$  com o piso, é possível com auxílio da expressão (8) calcular o coeficiente de restituição  $k_2$  entre as duas bolas. Este resulta em 0,97, consistente com a expectativa de uma colisão quase elástica entre as duas bolas.

## 7. ‘Colisão’ gravitacional com ‘efeito estilingue’

Uma aplicação notável de ‘colisão’ com ‘efeito estilingue’ são as manobras gravitacionalmente assistidas [1]. Muitas sondas espaciais utilizaram o ‘efeito estilingue gravitacional’ para aumentar a sua velocidade e, conseqüentemente, a sua energia cinética, economizando desta forma combustível. Para tanto a trajetória da sonda deve passar perto de um planeta (ou de um corpo celeste com massa muito maior do que a massa da sonda) e a sonda deve se aproximar dele viajando no sentido oposto ao planeta quando consideramos o Sol como sistema de referência. O interessante deste efeito é que depois de passar por perto do planeta, a sonda continua sua trajetória tendo ganho energia cinética! Tais manobras são exemplos de ‘colisões’ onde os corpos envolvidos nunca se tocam materialmente, mas apenas interagem através das forças gravitacionais. Argumentamos a seguir que esse processo pode ser tratado como uma colisão, mesmo não havendo contato material entre a sonda e o planeta e sendo a interação entre os dois corpos atrativa (as colisões que observamos cotidianamente envolvem intensas forças repulsivas quando os dois corpos se tocam).

A interação gravitacional do planeta com a sonda conserva, durante todo esse processo, o momento linear do sistema planeta-sonda, pois as forças gravitacionais são forças internas ao sistema. Adicionalmente, por serem as forças gravitacionais *conservativas*, haverá conservação da energia mecânica do sistema planeta-sonda durante a passagem da sonda pelas proximidades do planeta. Ou seja, enquanto a sonda se aproxima do planeta, o sistema planeta-sonda adquire energia cinética graças à diminuição da sua energia potencial gravitacional e, posteriormente, enquanto a sonda se afasta, o sistema diminui a sua energia cinética, recuperando a energia potencial gravitacional que tinha na aproximação.

Desta forma, quando a sonda tiver se afastado suficientemente do planeta (isto é, quando novamente se encontrar a uma distância ao planeta que é muito maior do que a distância de máxima aproximação), a energia potencial gravitacional do sistema, por depender da distância relativa entre a sonda e o planeta, encontrar-se-á com o mesmo valor que tinha no início da aproximação ao planeta. Devido à conservação da energia

mecânica do sistema e do retorno da energia potencial gravitacional aos valores que possuía inicialmente, a energia cinética do sistema planeta-sonda também retoma o seu valor inicial. A transição da sonda do estado muito afastado quando se aproxima do planeta para o estado em que novamente se afasta e já está muito distante do planeta, pode ser modelada como uma ‘colisão’ elástica, pois não houve alteração nem do momento linear, nem da energia cinética do sistema planeta-sonda.

A sonda, ao passar por perto do planeta, tem a direção da sua trajetória modificada. Desta forma, esse processo de ‘colisão’ é bidimensional [2]. Entretanto, por simplicidade, trataremos a situação de forma idealizada, simplificada, isto é, imaginando que apenas o sentido da trajetória tenha sido alterado. Assim sendo, o processo pode ser modelado como uma ‘colisão’ elástica e frontal entre a sonda e o planeta. A Fig. 6 representa esquematicamente, no sistema de referência do Sol, a configuração das velocidades do planeta ( $V$ ,  $U$ ) e da sonda espacial ( $-v$ ,  $u$ ) antes e depois de a sonda espacial passar por perto do planeta.

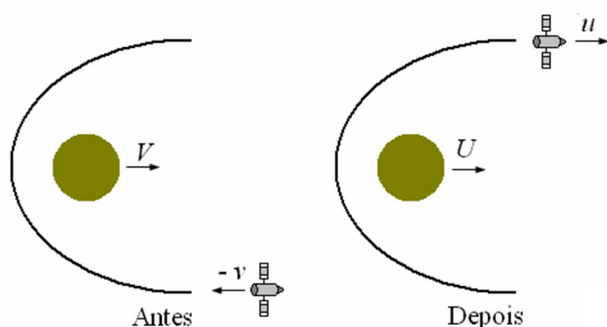


Figura 6 - Representação esquemática das configurações das velocidades do planeta e da sonda espacial antes e depois de passar perto do planeta.

As expressões (5) e (6) podem ser usadas para se calcular as velocidades antes e depois da passagem da sonda, desde que na expressão (6) façamos o coeficiente de restituição  $e_2$  igual à unidade, pois a ‘colisão’ é elástica. Desta forma, substituindo  $(V_1, U_1)$  por  $(-v, u)$ , e  $(V_2, U_2)$  por  $(V, U)$ , obtemos da Eq. (5)

$$k \cdot V + (-v) = k \cdot U + u, \quad (12)$$

e da Eq. (6)

$$V - (-v) = u - U. \quad (13)$$

Do sistema constituído pelas Eqs. (12) e (13) se calcula facilmente que a velocidade  $U$  do planeta depois que a sonda espacial passou perto do planeta é dada por

$$U = \frac{k}{k+1}V - \frac{V+2v}{k+1}. \quad (14)$$

Como a massa  $M$  do planeta é muito maior do que a massa  $m$  da sonda espacial, a razão  $k$  ( $M$  dividido por  $m$ ) é muito maior do que a unidade e portanto o segundo termo da à direita da igualdade da expressão (14) é desprezível e o primeiro termo torna-se aproximadamente igual a  $V$ . Desta forma

$$U \cong V, \quad (15)$$

significando que a velocidade do planeta quase não se altera quando a sonda passa perto dele.

Substituindo-se a Eq. (15) na Eq. (13), encontra-se para a velocidade  $u$  da sonda após passar perto do planeta

$$u \cong v + 2 \cdot V. \quad (16)$$

Assim sendo, o valor da velocidade da sonda aumenta pelo dobro do valor da velocidade do planeta!

Na realidade, esse acréscimo de velocidade é menor do que o dado pela Eq. (16), pois a ‘colisão’ elástica da sonda com o planeta não é frontal. Não obstante, o acréscimo pode ser importante como, por exemplo, aconteceu com a sonda Cassini em 1999, que, ao retornar das vizinhanças de Vênus, passou a cerca 1200 km da superfície da Terra, acrescentando a sua velocidade de 16 km/s para 21 km/s [3], seguindo depois para Júpiter.

## 8. Considerações finais

O interessante ‘efeito estilingue’ pode ser demonstrado em sala de aula e se presta a uma profícua discussão sobre colisões. Ele pode ser viabilizado, por exemplo, com uma bola de futebol e uma bola de tênis.

Um problema prático a ser enfrentado quando se realiza a demonstração em sala de aula é a queda vertical das duas bolas, sem qualquer outra perturbação, para que ocorra uma colisão (quase) frontal entre elas. Se segurarmos as duas bolas empilhadas como mostrado na Fig. 4, usualmente há que se fazer diversas tentativas para que resulte uma colisão (quase) frontal. A Fig. 7 mostra uma fotografia do dispositivo que idealizamos para minimizar tal problema de largada. A bola superior é de silicone, com cerca de 14 g, facilmente encontrada no comércio. A bola inferior é uma bola de bilhar, com cerca de 140 g, a qual foi preso um fio de linha que atravessa diametralmente a bola de silicone por um orifício com 2 mm de espessura. Dessa forma, segurando-se o fio de linha, é possível suspender e deixar cair as duas bolas sobre um piso duro. O salto da bola de silicone é impressionante; o limite superior para esse salto, conforme o gráfico da Fig. 3, para  $k = 10$ , é cerca de 7 vezes a altura inicial. Deixando-se cair este sistema de cerca de 40 cm de altura sobre o piso, a bola de silicone repica até quase o teto da sala de aula.



Figura 7 - Dispositivo para demonstração do 'efeito estilingue' em sala de aula.

## Agradecimentos

Agradecemos o auxílio das bolsistas Ana Carolina Carvalho de Melo na filmagem dos experimentos e Natália de Oliveira Ramos na edição das filmagens. À Profa. Maria Cristina Varriale do IM-UFRGS somos gratos pela leitura crítica do artigo e pelas sugestões apresentadas.

## Referências

- [1] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/doubal.html#c4>, acessado em 31/8/2009.
- [2] Albert A. Bartlett e Charles W. Hord, *The Physics Teacher* **23**, 466 (1985).
- [3] [http://veja.abril.com.br/250899/p\\_102.html](http://veja.abril.com.br/250899/p_102.html), acessado em 11/9/2009.