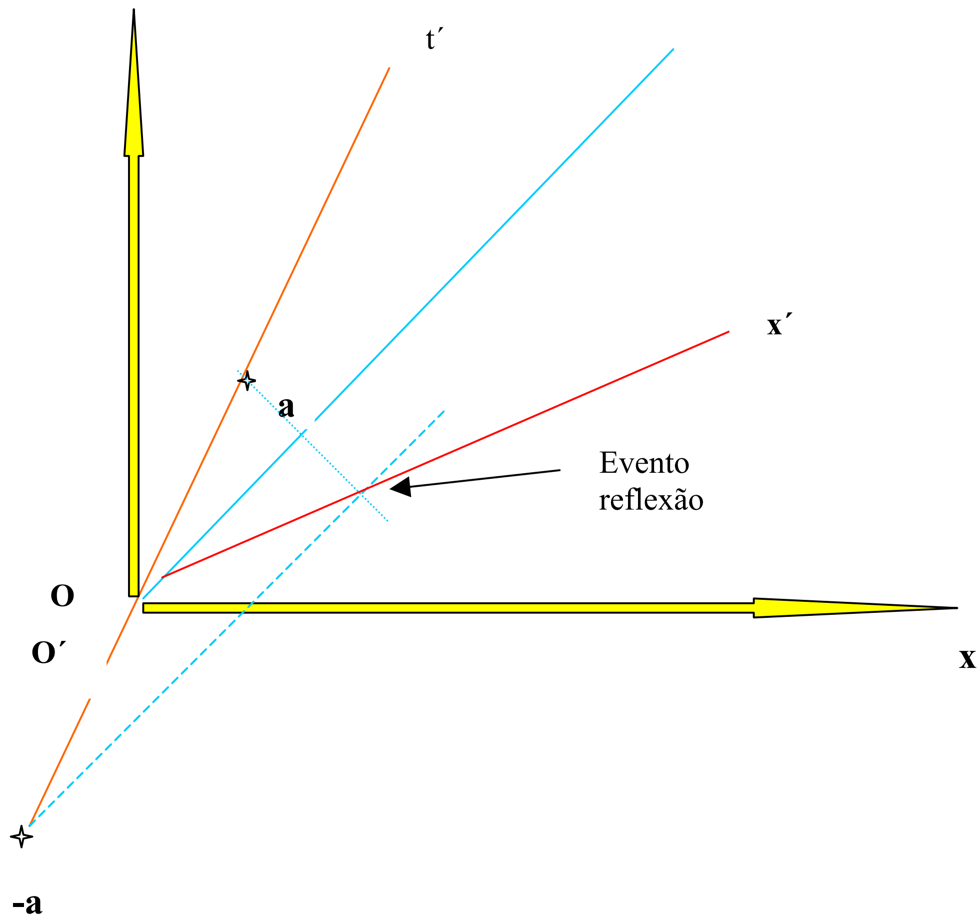
Porto Alegre, 04 de novembro de 2002

3ra aula de RC2002

Horacio Dottori

na aula passada vimos como se constrói o sistema de coordenadas (x´,t´), como visto do sistema (x,t). Esta construção leva-nos imediatamente a uma série de reflexões:

Figura4



A primeira e mais importante é que como os eventos simultâneos em quaisquer dos sistemas são aqueles que nele apresentam a mesma coordenada temporal, então o^s eventos simultâneos a O são todos os que estão sobre o eixo **x** , e os simultâneos a O´, são aqueles que estão sobre o eixo **x´,** Como O e O´ representam o mesmo evento, segue-se que os eventos que são simultâneos do evento origem no sistema O não são os mesmos que os que são simultâneos do evento origem no sistema O´. ***O conceito de simultaneidade é***

relativo. Isto vai nos levar a um conjunto de efeitos totalmente contrários à nossa intuição, criada a partir dos movimentos relativos com baixa velocidade. Notemos aqui que se considerarmos velocidades relativas dos referenciais semelhantes às que estamos acostumados, tudo volta ao normal. Isto vê-se rapidamente no diagrama e-t, já que o sistema (x´, t´) movimenta-se praticamente aolongo do eixo t. Por exemplo, se considerarmos um sistema O´ com uma velocidade relativa a O´ de 30/km/s (a velocidade da Terra), medido em unidades de c = 1, este sitema tem uma velocidade $v = 10^{-4}$, ou seja que qunado movimentou-se 1 m na coordenada x, a sua coordenada t variou em 10^4 mts, o que requer de uma precisão muito grande de um velocímetro para ser detectado (uma precisão melhor que 0,01 %).

<u>Diversos tipos de distâncias entre eventos</u>

Nós temos demonstrado que a distância e-t entre dois eventos independe do sistema de referência (ou do estado de movimento do observador). Este intervalo ds caracteriza o tipo de geometria que nos temos. Vê-se que a distância espaço-temporal ao longo de um raio de luz é nula, já que ds = 0.

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (1)$$

do mesmo jeito, ds pode ser positivo ou negativo, segundo a parte espacial seja maior que a temporal ou vice-versa. Cave uma observação aqui em relação à geometria euclidiana: ela só permite distâncias positivas entre dois pontos diferentes do espaço. Isto não acontece no e-t. Mais ainda ele permite a existência de distâncias negativas. Na demonstração que fizemos da invariança de ds, obtivemos, por razão de simplicidade a métrica positiva para dt > dr. Isto é uma convenção, já que se ds^2 se conserva, o mesmo acontece com - ds^2 não a convenção universalmente aceita. Alguns autores preferem colocar,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 \qquad (3.2)$$

Na introdução do livro GRAVITATION, de Thorne & Wheeler, temos todos os tipos de convenções e suas transformações. Schutz e Taylor & Wheeler seguem convenções diferentes. Por tanto é necessário olhar com cuidado quando se estuda em um ou outro livro. Obviamente existe o fato incontestado de que como as únicas velocidades compatíveis com a Relatividade é que sempre a velocidade v < 1, então, $|dt| > |dr|$

Teremos intervalos e-t, ds, entre os quais as distâncias espaciais e temporais verificam:

dt < dr serão chamadas ***tipo espaço***.

Se dr < dt, então a distância é ***tipo tempo***, e para dx = dt ***a distância é nula.***

A Relatividade Especial proscreve velocidades maiores que a da luz, então eventos cuja distância e-t é tipo espaço não podem, por princípio estar causalmente conectados. Conexão causal existe só entre eventos tipo tempo.
O cone de 45^o em torno do eixo t é chamado de futuro do evento O (ou passado, se trata-se da parte negativa do eixo t), em tanto que o resto do diagrama e-t representa uma zona chamada alhures.
É importante de se notar que aparentemente $ds^2 < 0$ aparentemente fornece uma distância imaginária. Devemos usar para o conceito de distância o próprio ds^2, que do ponto de vista prático não traz nenhum inconveniente maior.

1.7 A hipérbole invariante

Vimos como fica representado o sistema O´ ou (x´, t´) quando observado do O. Uma questão relevante é o das unidades de medida ao longo dos eixos. Se desenharmos hipérboles no sistema (x,t) da forma:

$-t^2 + x^2 = a^2$,

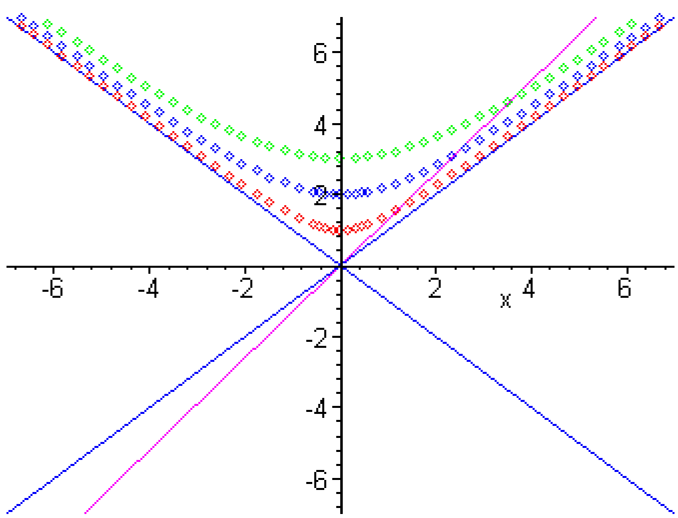


Figura 5

os ponto nos quais esta hipérbole corta aos eixos t´, etc., estarão à mesma distância do evento O nos respectivos sistemas com velocidade v´, etc., isto pela invariança de ds^2 (no caso a^2). Estas hipérboles trasladam a unidade de medida aos diversos sistemas O´, etc.. assim podemos calibrar os eixos nestes sistemas e comparar as distâncias relativas entre eventos, quando medidas pelos diversos observadores. Nota-se imediatamente que a distância e-t entre dois pontos é diferente quando medida pelos diversos observadores. Tomemos como referencia, por exemplo, a hipérbole vermelha e o observador da linha roxa (v=0.7). A interseção das duas fornece o ponto t´ = 1 no sistema em movimento**.**

Na figura 5, as linhas pontilhadas representam diversas hipérboles, com $a^2 = 1$, 4 e 9 respectivamente. A linha cheia azul é o raio de luz, em quanto a linha cheia roxa é um observador que se movimenta a 0.7 da velocidade da luz. Vê-se que os cortes desta linha (eixo t´) corta as hiperboles a "distâncias" da origem muito diferentes daquelas que observamos sobre o eixo t. Esta aparência surge do fato de traduzirmos para o e-t a nossa intuição da geometria euclidea, como sendo as distâncias medidas pela soma das diferencias das coordenadas entre os dois pontos em questão. Não acontece assim no espaço de Minkowsky (e-t). Aqui, os eventos que estão à mesma distância e-t da origem depende do estado de movimento do observador. Estas são as localizadas sobre uma hipérbole cujo termo independente é ds, ou seja a distância e-t em questão.

É evidente do desenho que a coordenada t no referencial em repouso é maior que t´ (embora não isto o que mediríamos com uma régua, se não soubéssemos que o espaço ***não é euclidiano***). Ou seja o relógio do observador em movimento marcha mais devagar que o do observador em repouso. Porem devemos salientar novamente que o tempo decorrido entre o evento origem e o ponto de interseção t´=1 é medido pelo observador em movimento com ***o mesmo relógio*** , em tanto que para o sistema em repouso este é medido por dois observadores, a saber, o inicio da experiência (que pode ser a partida de da origem O = O´) é medido ***pelo relógio instalado na origem da grade e-t,*** em tanto que a chegada do móvel ao ponto t´= 1, é medido pelo ***relógio da grade sitiado naquela posição***

1.8-transformação do tempo próprio no sistema (x',t') ao (x,t}

1.8.1- A coordenada temporal t

(Taylor & Wheeler, pg 101)

Nos perguntamos agora quais são as coordenadas e-t no sistema (x,t) de um evento que acontece na linha mundo do sistema (x',t'). Por exmplo, um foguete sai da Terra à Lua. No momento da partida o relógio em Terra e o do foguete marcam o tempo t = t'= 0 (supõe-se um experimento ideal no qual o foguete não sofre nenhuma aceleração. Por exemplo, ele vem na direção Terra-Lua,e ao passar pela Terra começam a contar o tempo do foguete e da Terra. Ambos sistemas são inerciais, (com tudo o que isso significa, uma grade espaço-temporal sincronizada). O astronauta lê no seu relógio de bordo um certo lapso de tempo .. entre a passagem pela Terra e a passagem pela Lua. Esse é um intervalo de tempo próprio para o astronauta a variação da coordenada da .**x'**= 0. Neste caso entao devemos têr em conta que a velocidade do foguete no referencial Terra é dado por **dx/dt = v.** Pela conservação da distância e-t, teremos:

$$-dx^2 + dt^2 = dt'^2 \quad \textbf{(3.3)}$$

Substituindo v na expressão do elemento de linha teremos

$$(-v\,.dt)^2 + dt^2 = dt'^2 \qquad \textbf{ou,}$$

$$dt = dt'(1 - v^2)^{-1/2} \quad \textbf{(3.4)}$$

O que indica que a coordenada tempo t é maior que t' (embora a imagem ***euclidea*** do diagrama e-t não de essa impressão!!!. Porem, cuidado, a estrutura do e-t, como antes falamos não é euclídea, más hiperbólica).

1.8.2- A coordenada espacial x

Usamos o mesmo procedimento de 1.8.1, más substituindo **dx/v = dt.**
Após uma algebra simples obtem-se:

$$dx = dt'.v.(1 - v^2)^{-1/2} \qquad \textbf{(3.5),}$$

que é diferente de 0 (obviamente, o sistema (x,t) ***vê*** ao foguete chegar à Lua). É importante salientar de novo que o tempo no referencial próprio é medido pelo mesmo relógio, em tanto que no referencial O ele é medido por dois relógios diferentes (um na Terra e outro na Lua) porem sincronizados. Usa-se a letra Gamma **(γ)** para denotar a expressão $\mathbf{(1 - v^2)^{-1/2}}$**,**

1.9- A transformação geral do sistema (x',t') ao (x,t) (Transformação de Lorentz-Fitzgerald)

Na seção anterior analisamos a transformação de um intervalo de tempo no sistema móvel (O') ao sistema fixo (O). Pretendemos agora analisar a transformação de um intervalo espaço-tempo no sistema O' para o sistema º Ou seja os dois eventos acontecem em coordenadas espaciais diferentes no sistema O'.

Esta transformação deve respeitar a já encontrada em dois aspectos, deve ser linear quando **dx' = 0**, e deve Ter os mesmos coeficiente de transformação no que respeita à coordenada **dt'.**

Então, a estrutura da transformação deve ser do tipo:

$$\mathbf{dt = B.dx' + D.\,dt'} \qquad \mathbf{(3.6)}$$
$$\mathbf{dx = G.dx' + H.\,dt'}$$

de 1.8 vemos que D = γ, e H = v.γ . Por tanto resta encontrar a quantia B e G. Das quais não sabemos nada. Usamos então a invariança do intervalo e-t:

$$\mathbf{-dx^2 + dt^2 = -dx'^2 + dt'^2} \qquad \mathbf{(3.7)\ ,}$$

substituindo as expressões para dt e dx na (3.7), expandidno os quadrados e juntando os termos em dx´ e dt´, teremos duas equações para B e G:

$$\mathbf{(B.dx' + \gamma.dt')^2 - (G.dx' + v.\,\gamma.dt')^2 = dt'^2 - dx'^2} \qquad ,$$

de onde se obtem:

$$\gamma^2\,(1 - v^2)\,dt'^2 + 2.\,\gamma\,(B - v.G).\,dx'.dt' - (G^2 - B^2).dx'^2 = dt'^2 - dx'^2 \ ,$$

daqui finalmente obtemos:

$$\mathbf{(B - v.G) = 0} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{(G^2 - B^2) = 1} \qquad \mathbf{(3.8).}$$

Substituindo B obtido da primeira (3.8) na segunda e voltando com o G assimobtido à primeira teremos:

$$\mathbf{G = \gamma} \qquad \mathbf{e} \qquad \mathbf{B = v.\,\gamma} \qquad \mathbf{(3.9)}$$

Então a diferença de coordenadas O entre dois eventos E1 e E2, que em O´ tem respectivamente coordenadas (x1´,t1´) e (x2´, t2´), vem dadas pelas fórmulas:

$$\mathbf{(t2 - t1) = v. \gamma .(x2' - x1') + \gamma . (t2' - t1')}$$

$$\mathbf{(x2 - x1) = \gamma.(x2' - x1') + v. \gamma. (t2' - t1') \quad (3.10)}$$

Em geral usaremos esta formula tendo o evento E1 na origem de ambos sistemas de coordenadas.