Porto Alegre, 18 de fevereiro de 2003.

Relatividade e Cosmologia

Aulas 25 e 26

25-1 Princípio Cosmológico

Tradicionalmente o princípio cosmol'ogico consta da homogeneidade e da isotropia do espaço. Se supomos a existência de um tempo cosmológico, ou seja, que existe um sub-espaço 3-D do espaço-tempo, no qual em todas as direções o mesmo apresenta as mesmas propriedades e na qual qualquer volume representativo apresenta as mesmas propriedades. Isto não pode ser visto por nós, nem por qualquer outro observador, devido à velocidade finita de propagação da luz. De outro lado, também não pode ser sentida a ação de um corpo sobre outro mas que com o retardo imposto pela distância que os separa.

É opinião generalizada que a homogeneidade do espaço está embutida na isotropia, pois se dois volumes representativos, sejam V1 e V2 tivessem propriedades diferentes, em relação a uma terceira posição V3 isto aparecerá como anisotropia, ou seja propriedades diferentes em direções diferentes.

25-2 A lei de Hubble

Embora existam diversos modelos cosmológicos anteriores ao século XX, e o próprio Einstein tenha introduzido a hoje chamada cte cosmológica Λ para poder produzir um Universo estático, visão predominante à época, o primeiro fato relevante à cosmologia moderna é a constatação por parte de Hubble (e Humasson) de que as galáxias estão se afastando umas das outras, ou seja que o Universo está em expansão. Ele colcou a relação entre a distância D e a velocidade V das galáxias como uma lei linear:

$$V = H.D \qquad (25\text{-}1)$$

H é chamada hoje de constante de Hubble. O valor presente de H inicialmente proposto por Hubble como sendo uns 400knm/s/Mpc, hoje está nos 65km/s/Mpc.
H fornece, se for cte, uma idade para o Universo. Com efeito, se colocarmos Mpc no seu equivalente em km (1pc = $3{,}08\times10^{13}$km) vê-se que a inversa da

cte de Hubble tem unidades de tempo ($1/H \approx 4{,}73x10^{17}\,s$), ou seja (1ano=$3{,}15x10^7$s) uma idade para o Universo um pouco maior que 15 bilhões de anos. Este é o chamado ***TEMPO de HUBBLE.*** Isto não se afasta muito da idade deduzida pela formação dos elementos, idades de aglomerados globulares e evolução estelar, etc.

A lei de Hubble permite introduzir outro conceito importante, o de ***horizonte***.
Com efeito, se essa lei se mantem para grandes velocidades, é lícito pensar que havera objetos que estão se afastando de nós com velocidade $V = c$. Pode se ver rapidamente da lei de Hubble *que esta fronteira*, chamada ***horizonte de eventos,*** está ubicada a uns 4600 Mpc **(300000[km/s]/65[km/s/Mpc]=4600Mpc)**. Reparemos que em anos luz esta distância **($4{,}6x10^9$[pc]x3,26[al/pc]=14,996al)** é um pouco menor numericamente que o tempo de Hubble. Ou seja que de se verificar esta condição simples (a expansão proceder a H=cte) o Universo tem um horizonte de eventos, ou seja há partes do Universo, nacidas junto com o nosso entorno, que não tem conexão causal com o mesmo. Obviamente se o Universo é acelerado, ou teve algum tempo pretérito no qual a aceleração foi muito forte durante um curto periodo, pode-se chegar a parametrizar o tamanho das bolhas de Universo que não tiveram, ou não tiveram durante um dado periodo, conexão causal entre elas, ou seja tiveram uma evolução independente umas das outras (ao menos durante um periodo da vida do Universo). Esta é, em principio a ideia do ***Universo Inflacionário.*** Este coloca taxas de inflação, ou expansão acelerada condicentes com a formação das estruturas hoje observadas, tanto na distribuição de galáxias (aglomerados, superaglomerados, paredes e vazios) como da radiação de fundo remanescente (mais comummente conhecida como radiação de 3^oK). Como ambas se desacoplaram numa dada época (uns 300.000 anos após o Big-Bang), as inhomogeneidades primitivas devem, a essa época, ter ficado registrada em ambas componentes, até lá interagendo uma com a outra através da transformação de radiação em matéria (formação de pares partícula-antipartícula) e vice-versa.

Tudo o dito pode ser deduzido da lei empírica de Hubble. A mesma deve encontrar justificativa na teoría.
Veremos então agora alguns modelos de Universo propostos primitivamente, ainda sem apelar às equações de Einstein. Estas condições são deduzidas de hipotese simples sobre a forma como a grande explosão procedeu, ou sobre

as condições de simetria impostas sobre o tensor métrico pelas homogeneidade e isotropia do espaço.

25-3 Modelo de Milne

Em 1935 Milne propós um modelo simples que satisfaz o princípio cosmológico. Este modelo foi parcialmente tratado em RE, já que as condições impostas respondem a estes princípios.

Milne propõe uma explosão, evento ϵ da qual saem simultanea e isotropicamente luz e partículas em todas as direções, estas últimas com todas as velocidades posíveis 0<=v<c.

a- a luz forma um horizonte para todas as partículas.

b- Cada partícula sente-se centro da frente de luz emitida simultaneamente com ela.

c- Vemos a sucessão de eventos de um sistema S com coordenadas (t,x,y,z).

d- Como todas as partículas afastam-se umas das outras elas vem a lei de Hubble. Resta analisar se a expansão é isotrópica. Para estudar isto, tomamos o τ antes definido. Se observamos um número fixo N de partículas em torno de da partícula em questão, estas vão se expandir com o **du** das particulas com o **dr** mais distante. Esta esfera tem um raio $\Delta r = \tau . \Delta u$ (já que foram emitidas no evento ϵ, em $\tau = 0$). O volume que elas ocupam é: $4/3.\pi.\tau^3 du^3$, e o número de densidade é: $n_0 = N/\tau^3$

e- De acordo com a Relatividade Especial, cada partícula P, ubicada a uma distância r da origem de S, tem um tempo próprio $\tau = t/\gamma(u)$, onde a velocidade da partícula é o cociente das suas coordenadas em S, $u = r/t$.

f- Todo volume próprio em P, aparecerá em S transformado pelo fator $1/\gamma(u)$ (por causa da transformação de $\tau \to t$. O número de densidade srá visto como

$$n = \gamma(u)N/\tau^3 = \gamma^4(u)N/t^3 = N.t/(t^2 - r^2)^{1/2}$$

(25-2)

g- Conversamente, densidades definidas em S serão vistas em P com o mesmo fator de transformação.

Vamos a usar a métrica do Universo de Milne tomando a coordenada o tempo côsmico como coordenada temporal.
Consideremos um espaço de Minkowski (que chamamos de M^4), onde a parte espacial está em coordenadas esféricas.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad (25\text{-}3)$$

O evento criação ϵ coincide com t=r=0 (isto é, evidentemente válido para qualquer sistema. Agora fazemos a seguinte transformação:

$$\tau = t(1-u^2)^{1/2} \qquad\qquad \rho = u(1-u^2)^{1/2} \quad (25\text{-}4)$$

lembrando que u=r/t.

A transformação inversa: $r = \tau . senh\,\psi$, $t = \tau . \cosh\psi$ e $sen\psi = \rho$. (25-5)

A transformação $t \rightarrow \tau$ obviamente estabelece um ***tempo cósmico***, ou uma sincronização de todos os relógios das partículas que originaram-se no evento ϵ. No espaço-tempo , para cada instânte t_0, elas estão ubicadas sobre uma hipérbole de coordenada temporal t_0 na origem (u=0). A coordenada ρ , pode-se entender tambem então para um tempo fixo como uma função de r.
A métrica neste sistema de coordenadas vem dada por:

$$ds^2 = d\tau^2 - \tau^2\left(\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2\right) \qquad (25\text{-}6)$$

Pode-se verificar calculando as componentes do tensor de Riemann que a métrica (25-6) é plana. Não poderia ser de outra maneira, já que fizemos só uma transformação de coordenadas, o que não muda a característica de M-4. Agora o parte espacial sim tem uma curvatura que analizamos a continuação.

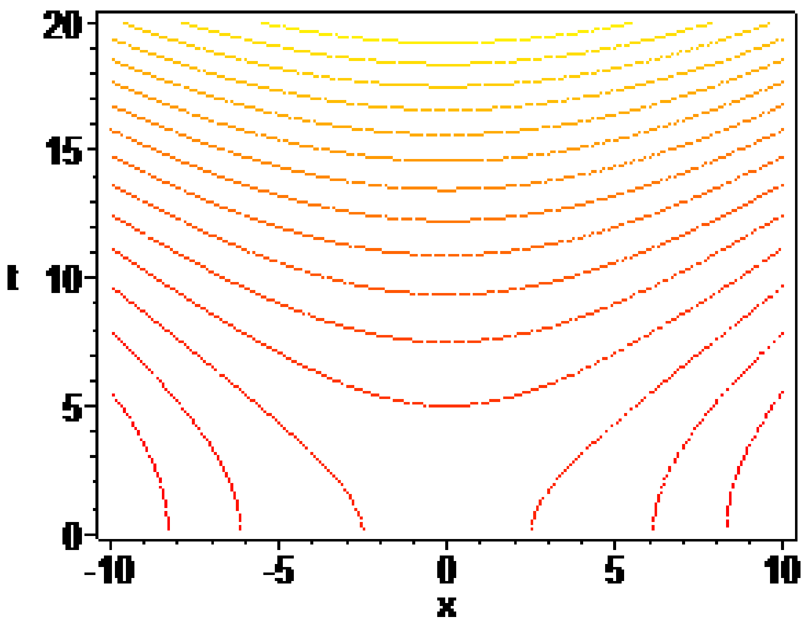

Fig 25-1: Comportamento do tempo cósmico τ nas coordenadas (x,t). As linhas x=t correspondem à velocidade da luz. O espaço t>x corresponde ao espaço físico. Hiperboles correspondem a τ =cte.

Nas figuras 26-1 e 26-2 mostramos o comportamento das curvas $\tau = cte$ e $\rho = cte$.

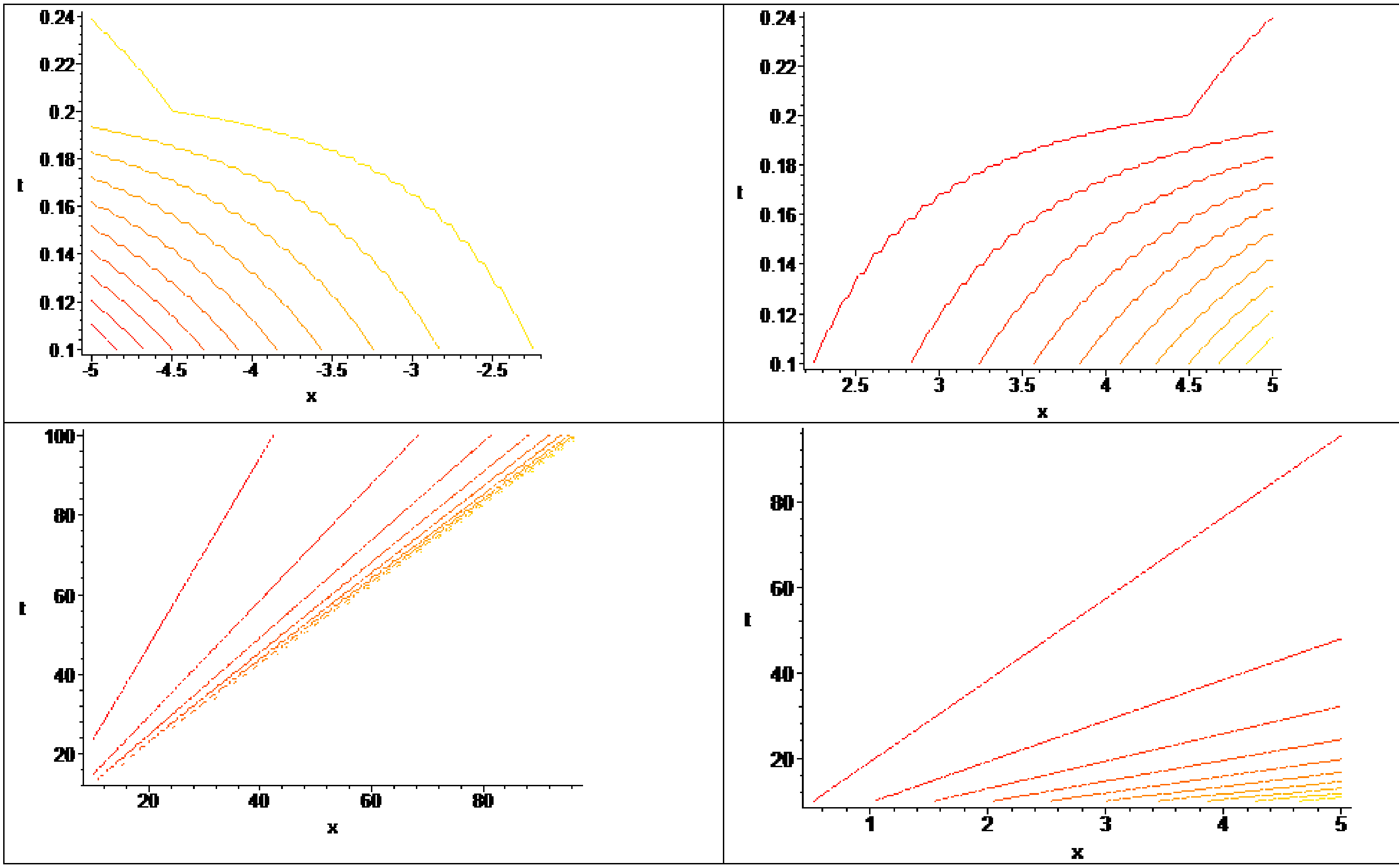

Figura 25-2 mostra o comportamento da função ρ em 4 partes diferentes do diagrama (r,t). Isto é interessante pela não linearidade desta função. As duas de cima correspondem ao comportamento para pequenos valores de t. A de baixo a esquerda para valores t grandes e semelhantes aos de r, os da direita corresponde a pequenos valores de t maiores que os de r. Vê-se que o comportamento da função é altamente não linear para valores de t pequenos.

Aula 26:

Continua o espaço de Milne

1- As curvas ρ =cte representam as partículas com origem em ϵ .
2- t=cte representa o espaço euclideo privativo de O. Este corresponde-se com uma hiperbole, sobre a qual estão todas as part’iculas que sairam de ϵ no instânte t=0, cujos relógios marcam tempo próprio igual a t. Este é o chamado espaço público.

O observador em (r,t) ver'a estes eventos posteriormente, por causa da velocidade finita de propagação da luz.

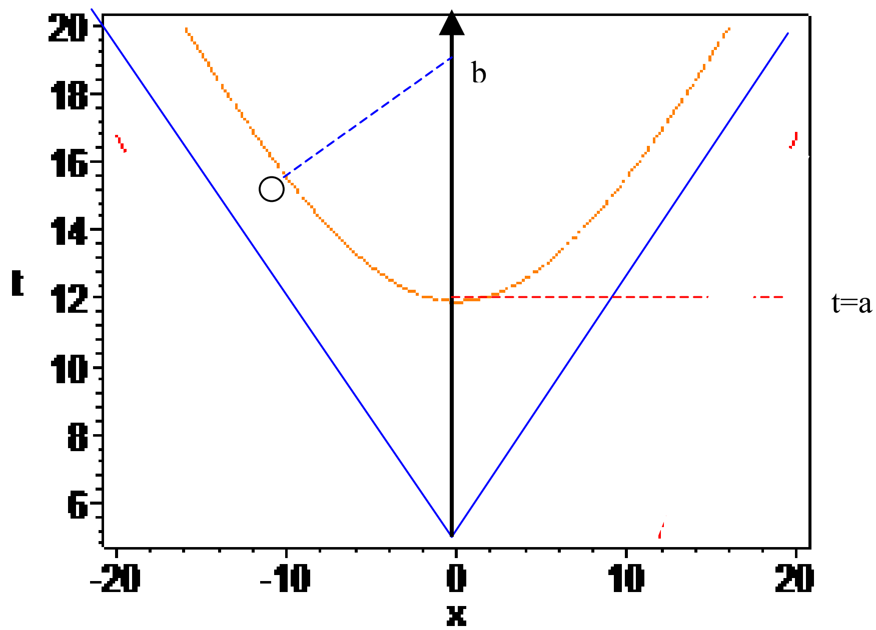

Figura 26-1: A hiperbole com ordenada na origem t=a, corresponde a todas as partículas emitidas na origem com tempo próprio τ=a. Porem este evento 0, será visto pelo observador em (r,t) somente mais tarde, em t=b. As linhas azuis cheias representam raios de luz originados no evento criação. A tracwjada 'e um raio de liz lançado em O, recebido pelo observador em r-0, t-b).

'E claro que em este tipo de Universo o evento criação não pode se ver em tempos posteriores a t=0. Isto obviamente vale para todos os sistemas.

A aprte espacial do ***espaço público*** tem curvatura $C = 1/\tau^2$.
Para a parte espacial vale;

$$dl^2 = \tau^2 \left(\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right) \qquad (26\text{-}1)$$

claramente esta métrica é isotrópica. Ao redor de $\rho = 0$ a distância radial vem dada por:

$$\int_0^{\rho} \frac{d\varsigma}{(1+\varsigma^2)^{1/2}} = senh^{-1}\rho = \xi \qquad (26\text{-}2)$$

A distância perpendicular entre duas geodêsicas que passam pela origem é: $\eta = \rho.d\omega = senh\xi.d\omega$. A equação da geodêsica para este caso simples em que a curvatura em todas as direções é a mesma é: $\ddot{\eta} = -C\eta$. Como a derivada do $senh$ é o próprio $senh$, a equação verifica-se se a curvatura é $C = -1$.

E o por extensão podemos definir uma métrica da seguinte forma:

$$dl^2 = \tau^2 \left(\frac{d\rho^2}{1+C\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right) \qquad (26\text{-}3)$$

Onde $C = -1$ é o caso anterior. Podem-se considerar ainda mais dois casos; o $C = 0$, que onviamente representa o espaço plano e o $C = 1$, quie represnta um espaço de curvatura positiva, como pode se ver integrando

$$\int_0^{\rho} \frac{d\varsigma}{(1-\varsigma^2)^{1/2}} = sen^{-1}\rho = \xi \qquad (26\text{-}4)$$

onde se fizermos a distância entre duas geodêsicas que passam por $\rho = 0$, teremos $\eta = \rho.d\omega = sen\xi.d\omega$, como a derivada segunda do $sen\xi$ é $-sen\xi$, a equação da geodêsica fica como:

$\ddot{\eta} = -C\eta = \eta$, ou seja $C = 1$.

Assim são contemplados os três tipos de espaço nesta métrica: planos, curvatura positiva ou negativa.

Como toda a parte espacial da métrica está multiplicada por τ^2, o raio de curvatura também está multiplicado pelo mesmo factor, e consequentemente a curvatura $C = 1/a^2$ ou no caso $\tilde{C} = 1/\tau^2 a^2$, ou $C = 1/\tau^2$.