Porto Alegre, 25 de fevereiro de 2003.

Relatividade e Cosmologia

Aulas 23 e 24

Vacuo com curvatura

Ao obtermos a solução de v'acuo de Schwarschild, resolvemos a equação $R_{\mu\upsilon} = 0$ para uma métrica $ds^2 = e^A dt^2 - e^B dr^2 - r^2 d\Omega^2$. (23-0)
N'os vimos tamb'em a a equação de Einstein mais geral é:

$$R^{\mu\nu} - 1/2 Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = -\kappa M^{\eta\nu} \text{ ; (23-1)}$$

sendo a primeira proposta de Einstein esta equação sem o termo em Λ.

$$R^{\mu\nu} - 1/2 Rg^{\mu\nu} = -\kappa M^{\eta\nu} \qquad \text{(23-2)}$$

Sem este termo existe outra forma de escrever esta equação, contraindo a equação e lembrando que

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma \qquad \text{(23-3)}$$

$$R_\mu^\sigma - 1/2 \delta_\mu^\sigma R = -\kappa M_\mu^\sigma \qquad \text{(23-4)}$$

a daigonal desta expressão:

$$R_\mu^\mu - 1/2 \delta_\mu^\mu R = -\kappa M_\mu^\mu \qquad \text{(23-4)}$$

ou

$$R - 2R = -\kappa M \qquad \text{(23-5)}$$

$$R = \kappa M \qquad \text{(23-6)}$$

ou seja a equação pode se escrever como:

$$R^{\mu\nu} = -\kappa(M^{\mu\nu} - 1/2 g^{\mu\nu} M) \qquad \text{(23-7)}$$

Ou seja existe uma esp’ecie de intimidade entre a curvatura do espaco e a distribuição de energia. Esta redução tamb’em pode se fazer para a forma mais geral da equação, o que fornece:

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} - \kappa(M^{\mu\nu} - 1/2 g^{\mu\nu} M) \qquad (23\text{-}8)$$

Se o tensor de mat’eria energia é nulo, teremos como conclusão um tanto bizarra, mas real, que :

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} \qquad (23\text{-}9)$$

As soluções desta equação são chamadas de Universos de de Sitter. O que esta equação diz é que se o Λ existir, mesmo com conteudo de materia-energia nulo, o espaço tem curvatura. Como sabemos que a matéria existe, este é um elemento de curvatura intrínsico do e-t. É uma aceleração que se contrapõe à força atrativa.
É importante salientar neste ponto que é necessário freiar a tentação de assimilar este fenômeno diretamente com a energia do vácuo obtida na quântica, medida pelo efeito Casimir. Em princípio ambas hipótese de partida (na Relatividade e na Quântica) são diferentes e a unificação destes conceitos requer também da unificação de ambas teorias.

Agora se tentamos resolver a equação (23-9), podenmos usar o elemento de linha (23-0), que nem na solução de Schwarzschild, obtendo:

A’ =B’ e
A=-B e

$$R^{\theta\theta} = \Lambda g^{\theta\theta} \qquad (23\text{-}10)$$

$$e^{\alpha}(1 + rA') = 1 - \Lambda r^2 \qquad (23\text{-}11)$$

$$\alpha + r\alpha' = (r\alpha)' = 1 - \Lambda r^2 \qquad (23\text{-}12)$$

compare com a equação correspondente da métrica de Schwarzschild.
Obtemos da (23-12)

$$\alpha = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \qquad (23\text{-}13)$$

A métrica fica então:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)dt^2 - (1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

se $m \to 0$, fica só a parte em Λ

$$ds^2 = (1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)dt^2 - (1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad (12\text{-}15)$$

O espaço de deSitter sustitui o de Minkowski se $\Lambda \neq 0$. Ele tem uma singularidade em $r = (\Lambda / 3)^{1/2}$. Como aqui nào há nenhum ponto específico do espaço a ser identificado como geradora do campo a singularidade é das coordenadas.
Para tratar a singularidade vamos a supor que este espaço est'a inmerso num espaço de Minkowski pentadimensional M5 (como uma superfície esférica está inmersa num espaço euclkideo 3-D. A m'etrica do mesmo é:

$$ds^2 = dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \qquad (23\text{-}16)$$

Neste então definimos uma peseudo-esfera S4 ("casca" esférica de dimensão 4) , da seguinte forma. Suponhamos, para fixar ideias, que $\Lambda \succ 0$, definimos então $\Lambda / 3 = a^2$, e a S4 como:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = a^2 \qquad (23\text{-}17)$$

Este é um espaço de curvatura constante = $1/a^2$.
Podemos fazer uma aplicação do espaço de deSitter nesta S4, da seguinte maneira:

$$X = rsen\theta \cos\phi$$
$$Y = rsen\theta sen\phi \qquad (23\text{-}18)$$
$$Z = r\cos\theta$$

e se r<a

$$W = a(1-\frac{r^2}{a^2})^{1/2}\cosh(t/a)$$
$$T = a(1-\frac{r^2}{a^2})^{1/2} senh(t/a) \qquad (23\text{-}19)$$

se r>a

$$W = a(1-\frac{r^2}{a^2})^{1/2} senh(t/a)$$
$$T = a(1-\frac{r^2}{a^2})^{1/2}\cosh(t/a) \qquad (23\text{-}20)$$

Em todos os casos se escolhe a raiz positiva.
Esta transformação asegura para todo (t, r, θ, ϕ) que a (23-17) verifica-se. Por tanto este mapping garante que a singularidade não existe.

Para o caso de $\Lambda < 0$, definimos $3/\Lambda = -a^2$
Deve considerarse:

$$ds^2 = dT^2 + dW^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2) \qquad (23\text{-}21)$$

e neste a pseudo-esfera:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - W^2 - T^2 = -a^2 \qquad (23\text{-}22)$$

neste caso deve-se trocar W e T por:

$$W = a(1+\frac{r^2}{a^2})^{1/2}\cos(t/a)$$

$$T = a(1+\frac{r^2}{a^2})^{1/2}\, sen(t/a) \qquad (23\text{-}23)$$

Neste caso tamb”em pode-se mapear todo o espaço (t,r,θ,ϕ) na esfera proposta, por tanto a singularidade não é real.