Aulas 20 e 21 RG 6 e 7

As equações da geodêsica na métrica de Schawarzschild

Para obter as linhas de menor distancia entre pontos deve-se resolver as equações da geodêsica

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = +\Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}$$

Estas 4 eq. Podem se escrever nas coordenadas de Schwarzschild antes vistas:

$$R1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \theta(s)\right) + \frac{2\left(\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{r}(s)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s} \theta(s)\right)}{r} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{\partial}{\partial s} \phi(s)\right)^2 = 0 \tag{20-1}$$

$$R2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathrm{t}(s)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathrm{A}(r)\right) \ln(e) \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{t}(s)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{r}(s)\right) = 0 \tag{20-2}$$

$$R3 := \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathrm{r}(s)\right) + \frac{\frac{1}{2} e^{\mathrm{A}(r)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathrm{A}(r)\right) \ln(e) \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{t}(s)\right)^2}{e^{\mathrm{B}(r)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} \mathrm{B}(r)\right) \ln(e) \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{r}(s)\right)^2 - \frac{r\left(\frac{\partial}{\partial s} \theta(s)\right)^2}{e^{\mathrm{B}(r)}} - \frac{r \sin(\theta)^2 \left(\frac{\partial}{\partial s} \phi(s)\right)^2}{e^{\mathrm{B}(r)}} = 0 \tag{20-3}$$

$$R4 := \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\phi(s)\right) + \frac{2\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{r}(s)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\phi(s)\right)}{r} + \frac{2\cos(\theta)\left(\frac{\partial}{\partial s}\theta(s)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\phi(s)\right)}{\sin(\theta)} = 0 \qquad (20\text{-}4)$$

nas mesmas, ln (e)=1 e os termos A(r)=(1-2m/r) e B(r)=$(1-2m/r)^{-1}$, s`ao os que j'a temos visto.

Todos os livros partem da suposição de que as órbitas são planas e procedem no plano azimuthal $\theta = \pi / 2$, isto simplifica sobremanera as equações, já que a R1 é imediatamente nula.

As R2 e R4 ficam mas simples e admitem uma integral imediata:

$$R4 := \left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\phi(s)\right) + \frac{2\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{r}(s)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\phi(s)\right)}{r} = 0\right\} \qquad (20\text{-}5)$$

$$R2 := \left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathrm{t}(s)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{A}(r)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{t}(s)\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{r}(s)\right) = 0\right\} \qquad (20\text{-}6)$$

A equação em t admite a integral:

$$e^{A(r)} dt / d\tau = E \qquad (20\text{-}7)$$

e a equação em ϕ admite a integral:

$$r^2 (d\phi / d\tau) = h \qquad (20\text{-}8)$$

A primeira corresponde à integral da energia e a segunda à do momento.

Com estas duas integrais e a expressao do elemento de linha em coordenadas de Schwarzschild, teremos:

$$e^{A(r)} (dt / d\tau)^2 - e^{-A(r)} (dr / d\tau)^2 - r^2 (d\phi / d\tau)^2 = 1, \qquad (20\text{-}9)$$

substituimos as equações de segunda ordem anteriores . Podemos, com a ajuda dea (20-7) eliminar τ da (20-9) obtendo as equações:

$$(dr/d\tau)^2 + r^2(d\phi/d\tau)^2 - 2m/r = E^2 - 1 + 2mr(d\phi/d\tau)^2 \quad (20\text{-}10)$$

$$r^2(d\phi/d\tau) = h \qquad (20\text{-}10b)$$

Devemos l;embrar que as equações de movimento de Newton para uma partícula teste de massa unitária fornecem:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 - \frac{2m}{r} = 2E \qquad (20\text{-}11)$$

e

$$r^2\dot{\phi} = h \qquad (20\text{-}11b)$$

Classicamente as eq, de Newton de movimento se resolvem em coordenadas (r,ϕ), o qual pode ser feito se substituirmos da expreessão da conservação do momento angular(20-10b), ($d\tau / d\phi$). Obtem-se então:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = -(1-E^2)\frac{r^4}{h^2} + \frac{2m}{h^2}r^3 - r^2 + 2mr \qquad (20\text{-}12)$$

na qual também se pode como classicamnte substituir u=1/r para obter:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{-(1-E^2)}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u - u^2 + 2mu^3 \qquad (20\text{-}13)$$

a qual diferenciada pode ser comparada à equação equivalente da mecânica clássica:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2}(1 + 3h^2u^2) \qquad (20\text{-}14)$$

o que distingue a (20-14) da expressão clássica é o 2do termo do lado direito da equação.

O mesmo é proporcional ao quadrado da velocidade angular, que é perpendicular ao raio vector. O mesmo é pequeno para velocidades típicas de estrelas.

A solução da equação não relativista vem dada pela expressão:

$$u = \frac{m}{h^2}[1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)] \qquad (20\text{-}15)$$

onde ε e ϕ_0 são as ctes de integração, a eccentricidade e o ângulo de fase do periélio. Por simplicidade tomamos $\phi_0 = 0$.

A solução do problema newtoniano para uma massa puntual é periódica com periodo 2π. Obviamente, a (20-14) vai se diferenciar dessa solução, já que tem o termo adicional. Se colocarmos a solução newtoniana no termo da direita da (20-14), teremos:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4}(1 + 2\varepsilon\cos\phi + \varepsilon^2\cos^2\phi) \qquad (20\text{-}16)$$

A solução desta equação pode-se obter como a soma das soluções parciais:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = A, = A\cos\phi, = A\cos^2\phi \qquad (20\text{-}17)$$

Estas integrais particulares são:

$$u_1 = A; = \frac{1}{2}\phi.sen\phi; = \frac{1}{2}A - \frac{1}{6}\cos 2\phi \qquad (20\text{-}18)$$

O primeiro soma uma pequena cte a u, o terceiro soma uma cte pequena e uma oscilação pequena, más o 2do termo cresce com ϕ ou seja não pode ser deprezado:

$$u = \frac{m}{h^2}[1 + \varepsilon\cos\phi + \frac{3m^2}{h^2}\varepsilon.\phi.sen\phi] \qquad (20\text{-}19)$$

se ϕ for pequeno, então $\cos\phi \approx 1, sen\phi = \phi$, podemos então colocar:

$$u \approx \frac{m}{h^2}\left[1 + \varepsilon\cos(1 - \frac{3m^2}{h^2})\phi\right] \qquad (20\text{-}20)$$

Esta eq. tem periodo

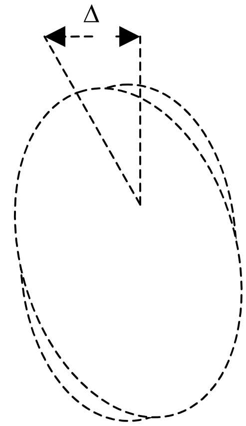
$$\frac{2\pi}{1 - 3m^2/h^2} \geq 2\pi \qquad (20\text{-}21)$$

isto significa que o valor do periélio só se repete após o ponto da órbita onde se repeteu na volta anterior. A diferença vem dada por:

$$\Delta = \frac{2\pi}{1 - 3m^2/h^2} - 2\pi \approx \frac{6\pi m^2}{h^2} \approx \frac{6\pi m}{a(1-\varepsilon^2)} \qquad (20\text{-}22)$$

Onde na 2da parte usamos a aproximação newtoniana:

$$\frac{2m}{h^2}=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=\frac{2}{a(1-\varepsilon^2)} \qquad (20\text{-}23)$$



Uma forma simples de ver a trajetória do raio luminoso é ver que neste caso $d\tau = 0$ e da (20-10b) , h=∞
A eq (20-14) se reduz a :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=3.m.u^2 \qquad (20\text{-}24)$$

Uma solução adequada da mesma sem o termo da direita é:

$$u=\frac{sen\phi}{R} \qquad (20\text{-}25)$$

onde R pode ser entendido como o raio do objeto que produz o campo gravitacional. Colocando a solução dentro da (20-24) obtemos:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{3m}{R^2}(1-\cos^2\phi) \qquad (20\text{-}26)$$

da qual uma particular solução é:

$u_1=\frac{3m}{2R^2}(1+\frac{1}{3}\cos 2\phi)$, a qual somada à anterior da,

$$u=\frac{sen\phi}{R}+\frac{3m}{2R^2}(1+\frac{1}{3}\cos 2\phi) \qquad (20\text{-}27)$$

$u \to \infty$, $\phi \to \phi_\infty$, onde $\phi_\infty = -\frac{2m}{R}$, por simetria o desvio total de um raio que passa rente à superfície do Sol é:

$$4m/R \qquad (20\text{-}28)$$