Porto Alegre 14 de janeiro de 2003.

Relatividade e Cosmologia

Horacio Dottori

Aula 16: variedades curvas

O conceito matemático de espaço curvo começa com a idéia de ***variedades.*** Uma variedade é essencialmente um espaço curvo, contínuo que localmente vê-se como um espaço euclideo. Ao conceito de variedade soma-se o de curvatura mesmo.

A superfície de uma esfera é uma variedade. Assim também ualquer hiperplano m-dimensional em um espaço euclideo n-dimensional (n>m).

Nós consideraremos só ***variedades diferenciáveis,*** estes são espaços contínuos e diferenciáveis, grosseiramente pode-se definir em cada ponto um campo e termos a garantia de que o mesmo pode ser diferenciado em todas partes. O conceito de diferenciabilidade implica que podemos definir vectores e co-vectores em todas aprtes do espaço. Isto é, num dado sistema de coordenadas o conjunto $\{\phi_{,\alpha}\}$ são as componentes do co-vector $\tilde{d}\phi$, e qualquer conjunto da forma $\{a.\phi_{,\alpha} + b\varphi_{,\alpha}\}$, onde a e b são funções é também um campo de co-vectores. Similarmente, uma curva com parâmetro, digamos λ, terá definido o seu vector tangente $\vec{V}$, definido com a função linear que aplica o co-vector $\tilde{d}\phi$ na derivada de ϕ ao longo da curva, $d\phi / d\lambda$:

$$< \tilde{d}\phi, \vec{V} >= \vec{V}(\tilde{d}\phi) = \nabla_{\vec{V}}\phi = d\phi / d\lambda \qquad (17\text{-}1)$$

Toda combinação linear de vectores é também um vector e nos podemos construir o conjunto de todos os tensores de tipo $\binom{M}{N}$, como feito anteriormente através do produto externo.

17-2 Variedades Riemannianas

Uma variedade diferenciável, na qual existe um campo tensorial simétrico **g** de tipo $\binom{0}{2}$pode ser utilizado como métrica é chamada uma ***variedade Riemanniana***. Estritamente falando só variedades nas quais $g(\vec{V},\vec{V}) \geq 0$ é chamada riemanniana, no caso de RE e RG, esse valor poderá ser inclusive negativo, neste caso a variedade é ***pseudo-riemanniana***. É importante de se notar, que ao escolher uma métrica nós agregamos estrutura ao espaço. A variedade *per-se é amorfa,* a métrica lhe fornece a estrutura. Assim uma variedade poderá ser com uma métrica de curvatura semelhante a uma esfera e com outra semelhante a um elipsoide.

17-2-1 A métrica e a estrutura localmente plana.
A métrica provê uma aplicação entre vectores e co-vectores em cada ponto. Então dado ujm campo vectoria $\vec{V}(P)$, onde a notação significa que o vector depende do ponto em questão,, existe um único campo co-vectorial $\tilde{V}(P) = g(\vec{V}, \quad)$. As componentes de **g** são chamadas de $g_{\alpha\beta}$, as da matriz inversa

são as $g^{\alpha\beta}$. A métrica permite subida e descida de índices, como vimos anteriormente: $V_\alpha = g_{\alpha\beta}.V^\beta$.
Como queremos estudar as variedades curvas em geral, devemos permitir qualquer tipo de coordenadas. Em reltividade Especial só estudamos sistemas inerciais (de Lorentz). Más como a gravitação proíbe tal tipo de referencial em todo o espaço, nós deveremos permitir qualquer tipo de tranformação de coordenadas que seja não-singular.(lembramos que não singular é toda transformação cuja matriz $\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \partial x^{\alpha'} / \partial x^{\beta}$ tem uma inversa). Agora a matriz ($g_{\alpha\beta}$) é uma matriz simétrica por definição, e toda matriz simétrica pode ser transformada numa matriz diagonal, com as entradas na diagonal sendo +1, -1, ou 0. A quantidade +1 diz quantos autovalores positivos e o número de -1s quantos autovalores negativos. Na relatividade este número deve ser de três autovalores positivos e um negativo (ou vice-versa), sempre poderemos encontrar um $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ tal que as componentes da métrica serão:

$$(g_{\alpha'\beta'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\eta_{\alpha\beta}) \qquad (17\text{-}2)$$

De agora avante usaremos a expressão $\eta_{\alpha\beta}$ para denotar esta matriz, que é obviamente a da relatividade especial.
A soma dos elementos diagonáis desta matriz é chamada a ***signatura*** da matriz. Sempre em relatividade esta signatura deve ser +3-1=+2, ou voce-versa, se se escolhe o tempo + e as coordenadas espaciais -, como feito por alguns autores.
De outro lado esta **g** mostra que, como vimos dos argumentos físicos, sempre se pode escolher um espaço tangente em todo ponto que seja plano. Isto seria o equivalente do ***sistema local inercial***. De outro lado se a métrica deve ser localmente Minkowskiana, o tensor deve Ter signatura +2 também em RG. Outro aspeto importânte a se destacar que a matriz $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ não necessariamente será uma transformação de coordenadas. Para que esto aconteça deve-se verificar a existência da inversa, para que seja possível a transformação das coordenadas no outro sentido:

$$\frac{\partial \Lambda^{\alpha'}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial \Lambda^{\alpha'}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}} \qquad (17\text{-}3)$$

Num campo gravitacional global isto será impossível, de outra forma é obvio que um espaço de Minkowski poderia explicar todo o espaço (ou transformação de Lorentz global, como vimos para sistemas acelerados isto não é possível), isto seria equivalente a admitir que a (17-2) vale em todo o espaço.
Isto equivale a dizer que dado um ponto P, existe um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ tal que:

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \eta_{\alpha\beta} + O[(x^\mu)^2] \qquad (17\text{-}4)$$

A existência de um espaço lorentziano local é significa meramente que todo espaço curvo tem um espaço tangente plano localmente, em qualquer ponto. Relembremos que linhas retas neste espaço tangente representa trajetórias de partículas. Isto, formalmente é estabelecido pela derivada primeira do tensor de métrico =0. Uma formulação mais estrita da (17-4) seria:

$g_{\alpha\beta}(P) = \eta_{\alpha\beta}$, para todo α, β;

$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} g_{\alpha\beta}(P) = 0$, para todo α, β, γ; (16-5)

más

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma}.\partial x^{\mu}} g_{\alpha\beta}(P) \neq 0$$

17-3 Comprimentos e Volumes

A métrica fornece um meio de definir comprimentos. Seja $d\vec{x}$ um pequeno vector deslocamento sobe uma curva, então este vector tem um modulo dado por $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{a} dx^{\beta}$ (é o que chamar-se-a de *elemento de linha da métrica*). Se tomaos o valor absoluto e a raiz quadrada temos uma medida do comprimento $dl = \left| g_{\alpha\beta}.dx^{\alpha}.dx^{\beta} \right|^{1/2}$. Então integrando isto temos o comprimento da curva:

$$l = \int_{sobreacurva} \left| g_{\alpha\beta}.dx^{\alpha}.dx^{\beta} \right|^{1/2} \qquad (16\text{-}6)$$

Se a curva está definida pelo parâmetro λ, poderemos por:

$$l = \int \left| g_{\alpha\beta}.\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}.\frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \right| .d\lambda \qquad (16.7)$$

Más como o vector $\vec{V}$ tem componentes $V_{\alpha} = dx^{\alpha} / d\lambda$, teremos que o comprimento da curva será:

$$l = \int \left| \vec{V}.\vec{V} \right|^{1/2} .d\lambda \qquad (16\text{-}8)$$

O computo de volumes é muito importante para a integração no ET. Aqui entender-se-a como o elemento de volume quadridimensional a ser usado no teorema de Gauss.
Se vamos a um sistema localmente lorentziano, onde nos sabemos que o elemento de volume vem dado por $dv = dx^0.dx^1.dx^2.dx^3$, onde os $\{x^{\alpha}\}$ são as coordenadas que dão a métrica quase lorentziana.
Sabemos que a passagem a qualquer outro sistema de coordenadas da-se através do Jacobiano:

$$dx^0.dx^1.dx^2.dx^3 = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} dx^{0'}.dx^{1'}.dx^{2'}.dx^{3'} \qquad (16\text{-}9)$$

$$\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} = \det(\Lambda^{\alpha}_{\beta'}). \qquad (16\text{-}10)$$

Usando a métrica podmeos ver a mesma coisa em forma menos tediosa. Em terminologia de matrizes a transformação da métrica vem dada por:

$$(g) = (\Lambda)(\eta_{\alpha\beta})(\Lambda)^T$$

onde o parêntesis significa matriz.. Segue que os determinantes satisfazem a relação:

$$\det(g) = \det(\Lambda).\det(\eta_{\alpha\beta}).\det(\Lambda)^T \qquad (16\text{-}12)$$

más para toda matriz o determinate é igual ao da sua transposta, e obviamente $\det(\eta) = -1$, pelo que teremos:

$$\det(g) = -[\det(\Lambda)]^2$$

ou seja que para o elemento de volume a transformação é:

$$dx^0.dx^1.dx^2.dx^3 = (-g)^{1/2} dx^{0'}.dx^{1'}.dx^{2'}.dx^{3'} \qquad (16\text{-}18)$$

Esta expressão é muito importante já que usa coordenadas localmente planas para obter conclusões que podem ser extrapoladas a todo o espaço. O argumento chve é o tensor métrico. Em nosso caso começamos com um elemento de volume no quadri-espaço plano $d^4x = dx^0.dx^1.dx^2.dx^3$, isto nos permite dizer que estes poderá ser medido com régoas e relógios, já que o espaço é Minkowskiano. Nós depois vemos que esse elemento de volume pode ser transformado através da métrica a qualquer outro sistema de coordenadas (16-18), que é a expressão para o elemento de volume em qualquer ponto do espaço curvo em qualquer sistema de coordenadas.
Como exmplo em 3-D. Aqui o volume próprio $(g)^{1/2}$. Como a métrica é positiva definida o $\det(\eta) = 1$. Em esféricas o elemento de linha é: $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta.d\phi^2)$, a métrica é:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$, seu determinate é $r^4\operatorname{sen}^2\theta$, então ,

$$g^{1/2}d^3x' = r^2\operatorname{sen}\theta.dr.d\theta.d\phi$$, que sabemos é o elemnto de volume nestas coordenadas.

<u>17-4-Diferenciação co-variante, extensão</u>

como vimos, a derivada co-variante aparece uando estamos diferenciando em sistemas de coordenadas cuyos vectores de base não são constantes, más variam ponto a ponto. Então para fazer a derivada de um campo vectorial a gente deve Ter em conta esta variação dos vectores de base. Se o espaço é riemmaniano, ajuda o fato de existir o espaço tangente em cada ponto. Neste espaço, suponhamos um ponto P, sabemos que a derivada co-variante é a própria derivada comum, já que os vectores de base não variam. Do pinto de vista físico, de novo como já dito, isto quer dizer eu o espaço tangente ao espaço-tempo (que não conhecemos ainda) é minkowskiano, mas em relatividade Especial estes vectores de base são nulos. Verifica-se então:

$$V^{\alpha}_{;\beta} = V^{\alpha}_{,\beta} \qquad \text{em P neste sistema} \qquad (16\text{-}30);$$

Isto é certamente válido também para o tensor métrico:

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} \qquad \text{em P.}$$

Esta Segunda igualdade sai da planitude do espaço tangente (equação 16-5). Más o fato da derivada co-variante do tensor métrico ser nula é valido então para toda base!
Este é um resultado importantíssimo, e é uma conseqüência direta da definição de derivada co-variante.

A expressão dos símbolos de Christoffel, em sendo eles simétricos em função da métrica é (sem demonstração, ver pag.s 142-143).

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \qquad (16\text{-}32)$$

Então, dada uma métrica, poderemos calcular os Christoffel é obter qualquer derivada co-variantede vectores, co-vectores e tensores em geral:

$$V^{\alpha}_{;\beta} = V^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}.V^{\mu},$$
$$P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}.P_{\mu},$$
$$T^{\alpha\beta}_{;\gamma} = T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}.T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}.T^{\alpha\mu}$$

A fórmula do divergênte

Por definição o divergente de um vector é a contração dada por:

$$V^{\alpha}_{;\alpha} = V^{\alpha}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}.V^{\mu},$$

contraindo todos os índices na definição da deriva co-variante, obtem-se:

$$V^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}.V^{\alpha})_{,\alpha},$$

A lei de Gauss fica assim expressa em termos co-variantes num espaço curvo como:

$$\int V^{\alpha}_{;\alpha}.\sqrt{-g}.d^4x = \oint V^{\alpha}.n_{\alpha}\sqrt{-g}.d^3S \qquad (16\text{-}45)$$

O teorema de Gauss vale num espaço curvo, precisa-se integrar a divergente sobre o volume próprio e usar o elemento de superficie própria, como ve-se na Segunda parte da igualdade.

16-5 Transporte paralelo e curvatura

Devemos considerar os conceitos de curvatura intrinsica e externa. Em principio, dado o exemplo de um cilindro a sua topologia é semelhante à do plano. Em principio valem os postulados da geometria euclidea para o cilindro. Um ser bi-dimensional não encontrará diferença entre os psotulados das paralelas, salvo

que volta a passar pelo mesmo ponto. O mesmo vale para a distância entre dois pontos. O cilindro obtem-se enrolando um pedaço de papel.
Se nós inserirmos o cilindro dentro de um espaço 3-D, então teremos que existe uma diferença num dado pondo da superfície entre as tangentes (só possíveis num espaço de dimensão maior) e as curvas na sua superfície. Isto é o que se chama a curvatura extrínseca do cilindro.
O dito não acontece com uma esfera. ela tem curvatura intrínseca e extrínseca. Não podemos obte-la simplesmente enrolando uma folha de papel.
Esta propriedade pode-se elaborar a partir dos vectores tangentes às superfícies em questão e o seu transporte paralelo.
Formalmente, se existe uma curva com parâmetro λ, sabemos que ao longo dela está definido em todo ponto o vector tangente $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$. A visão intuitiva de um transporte paralelo é o de um vector que é igual a si mesmo em tods os pontos da curva, ou sjea eele não depende de λ. Ou seja $\frac{dV^{\alpha}}{d\lambda} = 0$, o que é equivalente a dizer:

$$\frac{dV^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{dV^{\alpha}}{dx^{\beta}} . \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = U^{\beta} . V^{\alpha}_{,\beta} = 0$$

Como o espaço é plano, teremos que:

$$U^{\beta} . V^{\alpha}_{,\beta} = U^{\beta} . V^{\alpha}_{;\beta}$$

O que generaliza a fórmula para todo tipo de espaço.
Então temos como definição de transporte paralelo:

$$U^{\beta} . V^{\alpha}_{;\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda}\vec{V} = \nabla_{U}\vec{V} = 0$$

O último passo é a definição de derivada ao longo de $\vec{U}$. Esta é então a definição de transporte paralelo num variedade diferenciavel qualquer.

<u>16-4-2 Geodésicas</u>

As curvas mais importantes num espaço plano são as linhas retas. Elas são a menor distância entre dois pontos. A propriedade de uma reta é que ela conserva o seu vector tangente paralelo a si mesmo. Segundo a nossa definição anterior isto significa que:

$$U^{\beta} . U^{\alpha}_{,\beta} = 0$$

A generalização natural para uma variedade qualquer é definir a menor distância entre dois pontos, que chamamos de geodésica como:

$\nabla_{U} U = 0$, onde U é o vecto0r tangente a esta curva.

Se nos expandirmos a equação teremos:

$U^{\beta} U^{\alpha}_{;\beta} = U^{\beta} U^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} . U^{\mu} U^{\beta}$, onde só alterou-se a posição de U^{β} dentro do segundo somando.
Agora, se λ é um parâmetro que define a curva, nós teremos:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} . \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} . \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \qquad (6\text{-}51)$$

Se nos aplicarmos um principio variacional à equação da reta, exigindo a minimização de l na fórmula (16-7), veremos que o mínimo da distância entre dois pontos de uma variedade diferenciável corresponde exatamente à equação (6-51).

Outro aspecto importante é que se nós tivermos um outro parâmetro definindo uma curva distinta sobre a mesma trajetória, a equação da geodésica não necessariamente vai dar o mesmo resultado, más existe uma categoria de parametrização na qual os parâmetro $\lambda e \varsigma$ estão relacionados por uma equação linear $\varsigma = a\lambda + b$, neste caso o resultado é igual. Este tipo de parâmetros chamam-se de parâmetros afins.