Porto Alegre, 15 de outubro 2004 .

Relatividade e Cosmologia

Aula No10

Horacio Dottori

10- Momento-Energia

Veremos nesta aula a ampliação como os conceitos de conservação do momento linear e da energia clássicos integram-se numa grandeza relativista unificadora. Também surge deste tratamento a relativização do conceito de massa.

Se considerarmos o vetor posição no espaço-tempo, este é um vetor de 4 componentes, o tempo e as três dimensões espaciais: $\mathbf{x_\alpha = (t, x, y, z)}$, que podemos colocar como $\mathbf{x_\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3)}$.
Qualquer referencial inercial (ou acelerado, seguindo as prescrições para tratar estes sistemas) vem identificado no e-t de quaisquer outros observadores por uma trajetória no 4-espaço. Porem uma curva é uma família mono-paramétrica, e um parâmetro adequado para representa-la é o tempo próprio deste referencial em questão. Na figura 1 representamos uma trajetória, com as bolinhas verdes simbolizando diferentes valores de τ.

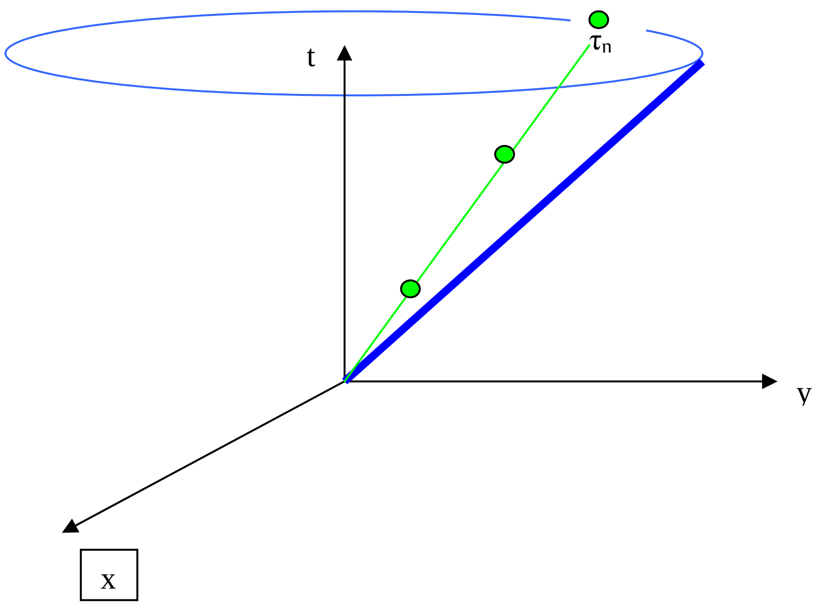


Figura 10-1

Podemos então, definir as derivadas das coordenadas em relação ao parâmetro τ, o que fornece um vetor tangente à linha mundo do observador, como resulta, após tomar limites, da figura 2,.

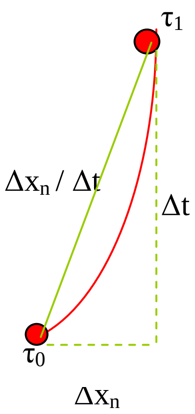


Figura 10-2

O quadri-vetor resultante desta definição pode ser derivado do vetor velocidade clássico e do fator de Lorentz. Ele é chamado quadri-vetor velocidade $\mathbf{U\alpha = (dx\alpha / d\tau)}$, com $\mathbf{\alpha = 0, 1, 2, 3.}$ então:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{dt / d\tau = \gamma,} \\ &\mathbf{dx_i / d\tau = dx_i / dt \,.\, \gamma = v_i \,.\, \gamma} \end{aligned}\right\} \qquad 10.1$$

Multiplicando pela massa da partícula, e tendo em conta que $\boldsymbol{\gamma}$ pode-se expandir para $\mathbf{v{<<}1}$ usando $\mathbf{(1 + x)^n = 1 + n.x + o(x^2)}$, onde $\mathbf{n = -1/2}$ e $\mathbf{x = v^2}$, obtemos que:

$$\mathbf{m.dt / d\tau = m.\,\gamma.} \qquad \mathbf{10.2}$$

Se fizermos a aproximação

$$\mathbf{m.\,\gamma \sim m.(1 + 1/2\, v^2 + o(v^4))} \qquad 10.2.1,$$

Vemos que o segundo somando a direita é a <u>*energia cinética clássica*</u> da partícula. Nada mais lógico que identificar a expressão:

$\mathbf{E{=}m.dt / d\tau}$.

com a <u>***energia da partícula relativista***</u>. Vemos da 10.2, que se v = 0, ainda fica o termo **m.** Interpreta-se **m** então como a energia da partícula em repouso.

Para 10.2.2 teremos após multiplicar por m que:

$$\mathbf{Pi=m \cdot dx_i / d\tau = m. v_i \cdot \gamma} \qquad 10.3,$$

Que interpretamos como o a componente i-éssima do ***momento linear relativístico da partícula***.
O vector momento total é dado por:

$$\vec{P} = m.\vec{v} \qquad 10.3.1$$

Vemos que para velocidades <<1 ele identifica-se com o *momento linear clássico*, mas para velocidades grandes o momento clássico cresce linearmente, em tanto que o momento relativista cresce proporcional a γ a medida que nos aproximamos da velocidade da luz. Das definições e da 10.1, desprende-se que:

$$\frac{\vec{P}}{E} = \vec{v}$$

O quadri-vector composto pela energia e os 3 momentos é chamado de ***quadrivector Energia-Momento***.
É importante mencionar que no denominador de γ na **10-3,** intervém a velocidade total do sistema, não a componente particular que estamos tratando, como pode ser facilmente derivado da consideração de qu este valor intevem na definição da energia.

As unidades do vector E-M são de massa no sistema que adotamos no qual c = 1.

A energia em repouso da partícula, se c tive-se unidades cgs ou mks, e dada pela conhecida fórmula de Einstein:

$$\mathbf{E = m.c^2}$$

Uma outra álgebra que se pode fazer é o cálculo de:

$\mathbf{E^2 - p^2}$.
Substituindo as expressões correspondentes temos que:

$\mathbf{E^2 - p^2 = (m \cdot \gamma)^2 - (m.v_i \cdot \gamma)^2}$ ou substituindo,
$\mathbf{= m^2. (1 - v_i^2) \cdot \gamma^2}$, ficando finalmente

$$\mathbf{E^2 - p^2 = m^2} \qquad (10\text{-}4)$$

Que nos diz primeiramente que o espaço E-M é hiperbólico e que uma partícula, quando acelerada, a variação de seu estado de movimento é feito de tal forma a conservar o módulo do vector E-M.
Se uma partícula é acelerada a partir de velocidades quase nulas até velocidades relativísticas, teremos a situação da figura 10-3.

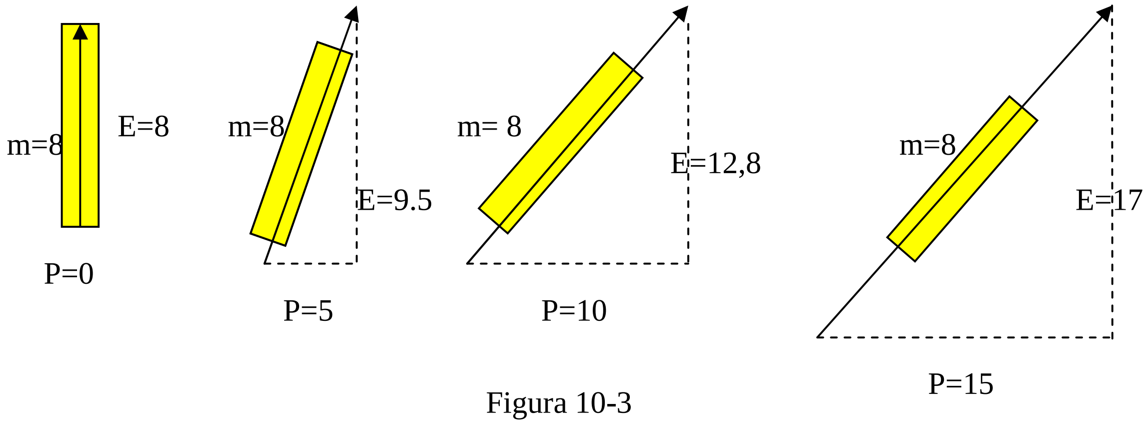


Figura 10-3

Na primeira das 10-3, a partícula está parada, o vector Energia é paralelo à banda amarela, que representa a massa, e da mesma magnitude que a mesma. A zeta representa em cada caso o que seria o modulo do vector soma de E e P se o espaço E-M fosse euclideo. Em tanto que na estrutura do E-T relativista, a soma hiperbólica é constante e igual ao vetor amarelo (esta representação é devida a W. A. Shurcliff e é apresentada no livro de Taylor e Wheeler *Space Time Physics.* , Editores W. H. Freeman, New York, 1998. Ela permite visualizar a estrutura hiperbólica na folha de papel de estrutura euclidea).

Revertendo a fórmula 10-4, obtemos a expressão da *energia* em função do *momento* e da *massa* da partícula.

$$\mathbf{E^2 = m^2 + P^2} \qquad (10\text{-}5)$$

(Compare com o caso clássico, onde a relação energia momento é dada por $E = P^2/2m$!.)

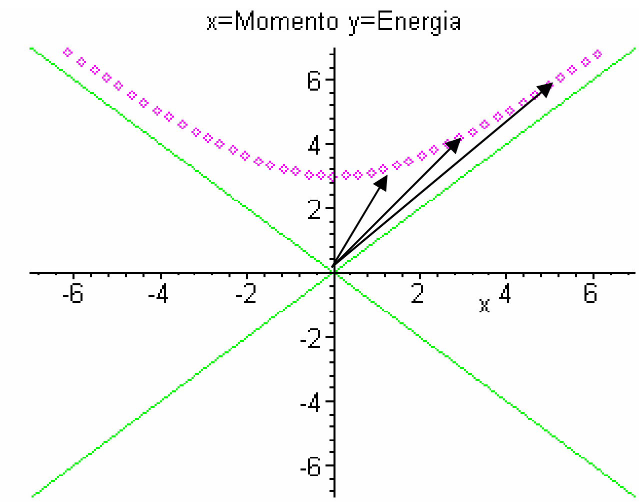


Figura 10-4

Na figura 10-4 vê-se a estrutura hiperbólica do diagrama M-E. A curva que mostramos em cor magenta corresponde a um valor de m = 3. Todos os pontos da curva, indicados pelas setas pretas, correspondem a esse mesmo valor da massa. A comparação desta figura com a anterior permite visualizar melhor o sentido da fórmula 10.5.

Finalmente então podemos concluir que a energia é a parte temporal do vector Momento-Energia e o momento a sua parte espacial, como é facil de ver das definições.

10.2-Sistemas de partículas

10.2.1-Conservação do M-E e suas conseqüências

O quadrivector M-E do sistema se conserva em módulo direção e sentido. Isto implica que a parte temporal (a energia) e as três componentes do momento se conservam independentemente.
Sob este postulado, a massa de um sistema é *diferente* da soma das massas individuais das partículas que compoem o sistema. Como veremos a continuação a massa do sistema de partículas depende do estado cinemático deste conjunto.

Se considerarmos o sistema de partículas da figura, na qual as partículas tem massa $m_1 = 8$, com velocidade $v_1 = 15/17$ e $m_2 = 12$ com $v_2 = -5/13$ respectivamente, como uma possível solução da interação, que respeita o postulado anterior teremos o resultado da figura 10-5:

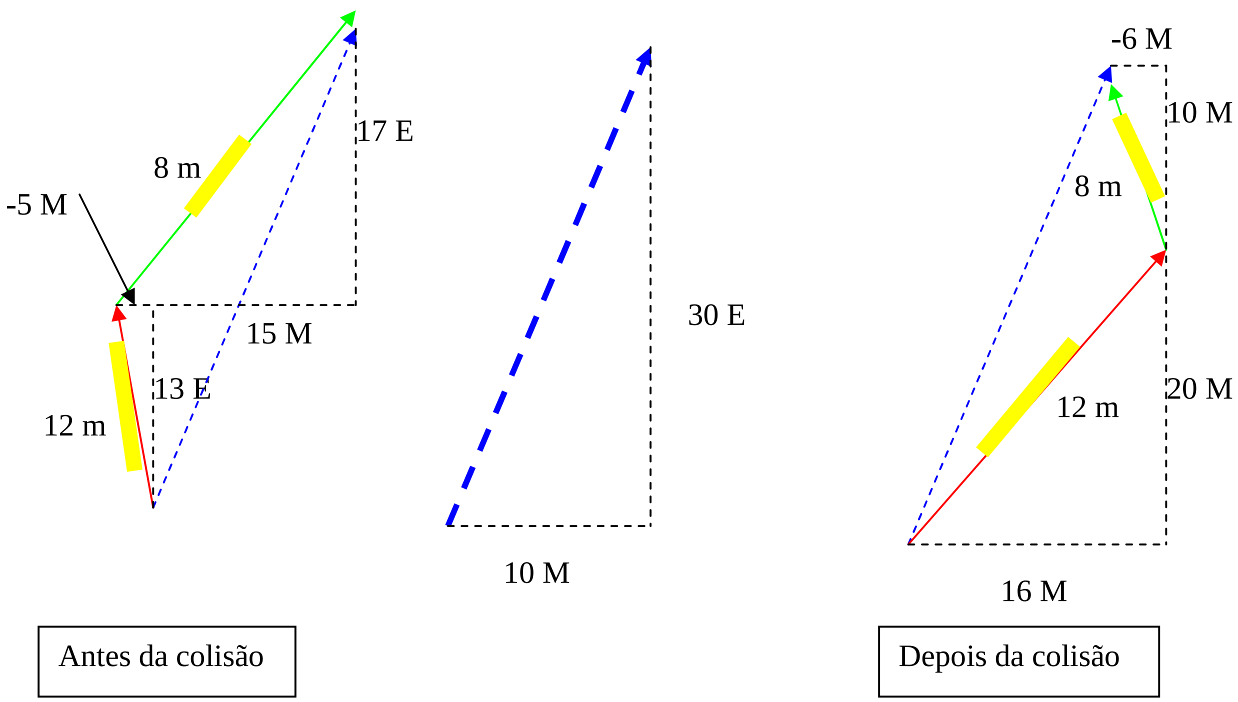


Figura 10-5

Esta figura corresponde a um sistema em colisão, como mostrado na figura 10-6:

Figura 10-6

Na 10-5, a figura do extremo esquerdo é o sistema antes da colisão. Como vemos a massa do sistema é diferente da soma das massas individuais (já que é o módulo do vector M-E total. Calcule este valor). Como o vector M-E deve-se conservar, a massa total do sistema conserva-se também.

Neste particular caso nos também arrumamos os dados para conseguir a conservação das massas individuais (ou seja a identidade das partículas que participaram da colisão foi preservada). Más o postulado de conservação do quadri-vector M-E não proíbe outras composições desde que preservem a soma dos momentos (P = 10) e a soma das energias (E = 20). Por exemplo uma solução provável é v1 = -5/13 e v2 = 15/17. A energia e momento são E1 = 14, P1 = -5; E2 = 16, M2 = 15. As massas resultantes desta composição são obtidas de $E^2 + P^2 = m^2$, ou seja que temos respectivamente $m_1 = 13{,}07$ e $m_2 = 5{,}57$.
Em particular, se uma das partículas resultantes da colisão tem o momento igual à energia, teremos que a mesma tem o módulo do quadri-vector M-E = 0, ou seja a massa da partícula é m = 0, estamos em presença de um fóton. As primeiras experiências que mostraram a interação de um fóton com partículas materiais foram desenvolvidas por Compton em 1922. Na experiencia de Compton o foton γ transmite E-M a um eletron e ele mesmo sae numa direção diferente da de chegada com uma frequência diferente (menor) que a inicial.

Outro aspecto a salientar é que **não importa qual seja o observador** que descreve o sistema, **a massa** do mesmo deve ser **conservada**. Por exemplo, vejamos um par de partículas identicas em colisão. Analisamos a colisão a partir do centro de massa das mesmas e de uma delas.
A partícula 1 tem E1=20, e a massa m1=8,7, P1=18
A partícula 2 tem E2=20, e a massa m2=8,7, P2=-18

Segundo o desenho seguinte:

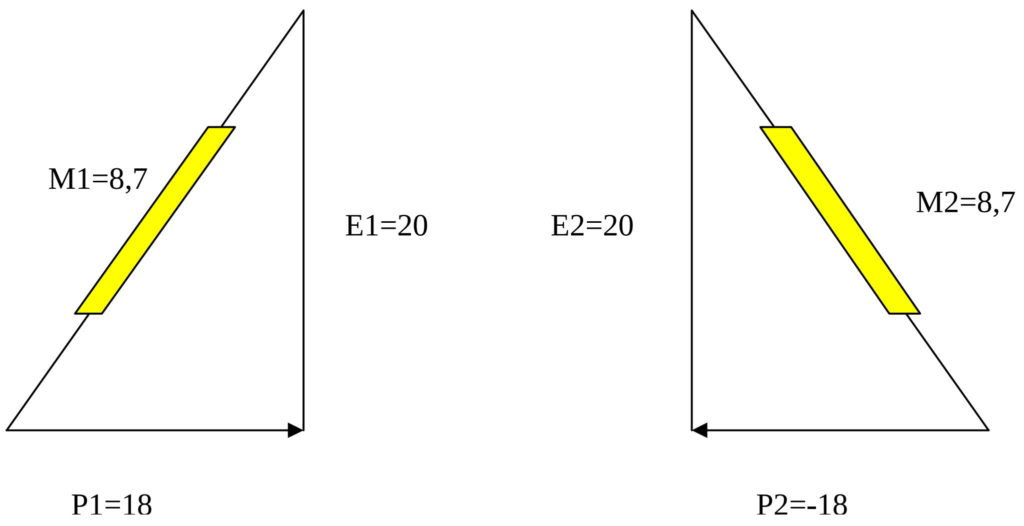


Figura 10-7

A massa resultante para este sistema é a seguinte:

$Es = \sum Ei = E1 + E2 = 40$, $\vec{P}s = \sum \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$, daqui $Ms = 40$ (Figura 10-8).

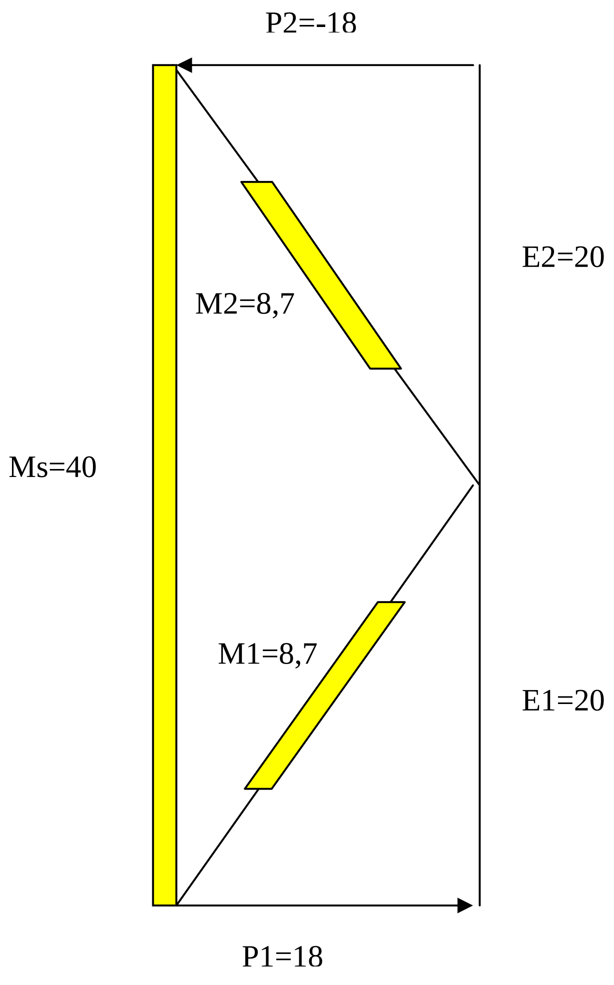


Fig 10-8

Se analisarmos o sistema a partir da massa da direita (Fig. 10-9), ela vê o centro de massa com velocidade igual e sinal oposto à que ela tem em relação ao mesmo. Por tanto verá à partícula da esquerda com uma velocidade igual à soma relativista das duas velocidades, isto é a do centro de massa em relação a ela e a da partícula da esquerda em relação ao centro de massas. O módulo duma destas velocidades é v=P/E=18/20=0,9. Por tanto a soma relativista é: Vrel=(0,9+0,9)/(1+0,9x0,9)=0,994.

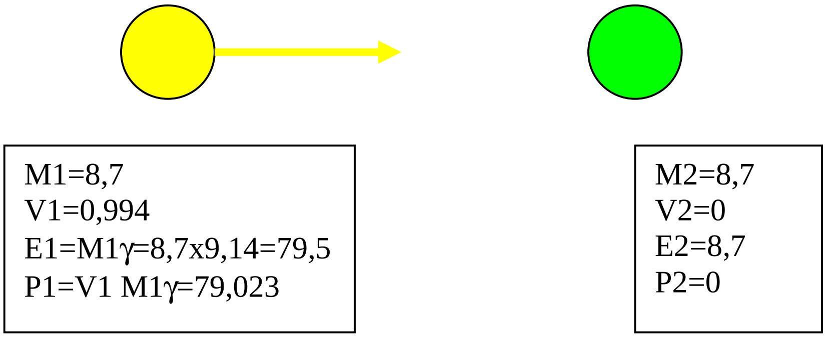


Fig. 10.9

A energia e o momento resultantes do sistema é: $Es = \sum Ei = 88{,}56$, $Ps = 79{,}013$ de onde a massa resultante do sistema Ms=39,99, igual, dentro dos erros de arredondamento, ao valor deduzido para a massa do sistema medido do centro de massas.

10.3- Fótons, energia sem massa.

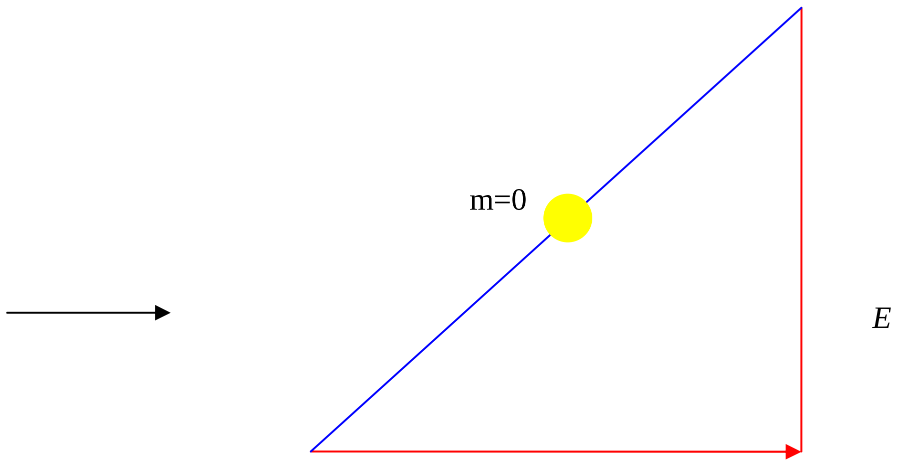
Como a velocidade do fóton é c=1, e como a velocidade da partícula é

$V = E/|P|$,

isto indica que o cociente

$E/|P| = 1$, ou seja $E^2 - P^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

por tanto a massa do fóton (ou de qualquer partícula que viaje à velocidade da luz) deve ser nula. O diagrama E-P de um fóton é o seguinte (Fig. 10-10):



$$|P| = E$$

Figura 10-10

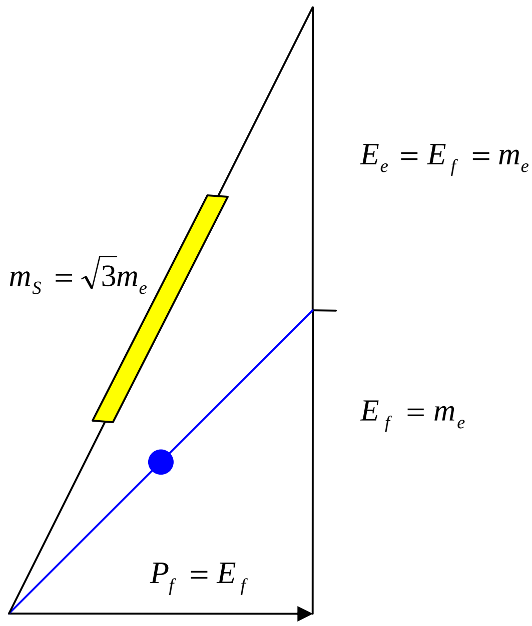
No desenho usamos a cor vermelha para a Energia e o vetor momento e a cor azul para a diagonal. O círculo amarelo no centro da diagonal é usado para simbolizar a massa nula do fóton.

(Nota: Talvez seja este o caso mais flagrante de contradição entre a geometria hiperbólica correspondente a conservação da Energia-Momento ($E^2 - P^2 = m^2$) que no caso é estritamente nula e o teorema de Pitágoras (geometria euclidea) $E^2 + P^2 = H^2$ que corresponderia à hipotenusa do triângulo, que não tem nenhum sentido físico dentro dos conceitos da Relatividade Especial.)

3.2- Interação de Partículas e fotons

Compton foi o primeiro, em 1922, a estudar a interação de raios γ com partículas, no caso com elétrons. Se supomos um fóton incidente sobre um elétron e^- em repouso $(P_e = 0)$, de massa $m_e = 0{,}511 Mev = 9{,}11 x 10^{-35} kg$, com a energia do fóton $h\nu = m_e$, qual será segundo as nossas definições a massa do sistema?. Teremos seguindo as definições então que (seguir na Fig. 3.11):

$$\sum E_i = 2m_e$$



$$\sum P_i = P_e + P_f = 0 + P_f = 0 + E_f = m_e \ ,$$

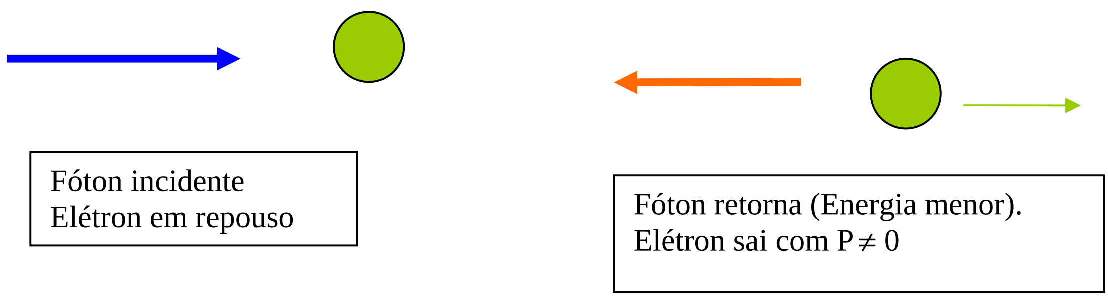
(Fig. 3.11)

por tanto a massa do sistema será:

$$m_s = \sqrt{E_s^{\ 2} - P_s^2} = \sqrt{3}m_e$$

Constata-se aqui que a conservação do quadrivector E-M implica que, mesmo o fóton não tendo massa, um sistema de uma partícula mais um fóton tem uma massa maior que a da partícula em questão.

Nesta interação o fóton transfere energia à partícula e se produz um ***espalhamento*** (scattering) tanto do fóton resultante como do elétron. O ângulo do espalhamento não é sempre o mesmo para diversas repetições da mesma experiência. Vamos supor que ouve um retro-espalhamento e que o fóton voltou na direção contrária à que vinha inicialmente e o elétron na oposta a ele (Fig.3-12, antes e depois)



(Figura 3-12)

Se assumirmos eqüipartição de energia entre o fóton e o elétron após a interação, das equações

$E_s = E_f + E_e = 2m_e$

$P_s = P_f + P_e = m_e$

teremos com a condição de eqüipartição,

$P_e = P_{f/2} = m_e / 2$

$E_e = P_e = m_e / 2$

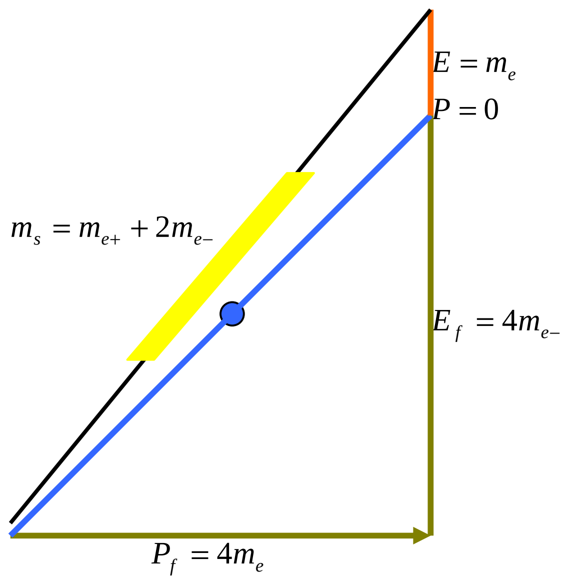
$E_e = m_e (2 - 1/2) = 1{,}5 m_e$

$v_e = 0{,}5 / 1{,}5 = 0{,}33$

Outras soluções são possíveis.

3.3- Criação de pares de partículas a partir de radiação γ

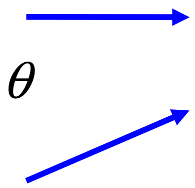
É simples de se ver que não podem ser geradas uma partícula e uma anti-partícula com a única intervenção de um fóton. Com efeito, como o fóton tem P = E, a soma das massas das partículas resultantes deveria ser nula, o que não acontece já que não existe massa negativa. Por tanto “o sistema” inicial deve estar composto por um fóton e uma outra partícula, outro agente que “ajuda” a que o momento do sistema inicial seja diferente em módulo que a energia inicial, para poder ter a massa do sistema distinto de zero. Se esta condição se cumpre ainda cabe uma outra pergunta, pode ser igual a energia do fóton incidente exatamente igual à soma das massas das partículas resultantes? A resposta é **não.** Um diagrama simples ajudará a visualizar esta resposta. Suponhamos que queremos criar um par $e^- e^+$, faz-se incidir um fóton γ com energia $E = 4m_e$ sobre um elétron.



Desta forma teremos que a massa da partícula resultante é $m^2 = (E_e + E\gamma)^2 - P_\gamma^2 = 9$, ou seja a massa m=3= $2m_{e-} + m_{e+}$.
Um único fóton não pode gerar um par já que mesmo tendo a energia suficiente, pela conservação do M-E, o momento e a energia resultante devem ser iguais em módulo, o que leva a que a única possibilidade seria o fóton inicial (γ_i) decair em dois fótons ($\gamma_1 + \gamma_2$) a soma de cujas energias deve conservar-se.
Se quisermos gerar um par (P+,P-) a partir de P+ (ou P-) devemnos sempre ter um fóton cuja energia seja pelo menos 4P.

Massa de sistemas de fótons

Como o momento tem direção, um sistema de 2 fótons leva a resultados diferentes, dependendo do ângulo entre a direção de ambos fótons. Suponhamos um caso geral como o da figura. 2 fótons da mesma energia colidem com um ângulo θ genérico. Supomos um dos fótons movimentando-se na direção x:



Se a energia de cada fóton é E, a energia e momento do sistema será:

$$E_s = 2E$$
$$Ps_x = P.(1+\cos\theta)$$
$$Ps_y = P.\sin\theta$$
$$Ps^2 = P^2.(1+\cos\theta)^2 + sen\theta^2 = 2P^2.(1+\cos\theta)$$

A massa do sistema será:

$$m^2 = 4.E^2 - 2P^2(1+\cos\theta)$$

Se os fótons viajam paralelos no mesmo sentido, $\theta = 0$, a massa do sistema é nula. Se $\theta = \pi$, os fótons viajam em sentido contrário, a massa do sistema m=2E. Para qualquer outro ângulo vale a fórmula acima.