

Poprto Alegre, 27 de janeiro de 2003.

## Relatividade e Cosmologia

### Horacio Dottori

## Aula18 (RG4) Desenvolvimento formal da Relatividade Geral

### 18-1 Introdução

No experimento relatado na aula passada, um observador em queda livre, rodeado de uma distribuição esférica de bolinhas consegue calcular o tensor de Riemann a partir do desvio geodésico entre a sua linha mundo e as das bolinhas medindo em cada instante as posições relativas e vectores velocidade e medindo acelerações com velocidades em instantes sucessivos. As componentes do tensor de Riemann levam embutidas o tensor métrico. Uma forma de agir muito prática consiste em ter uma aproximação da forma do tensor métrico a partir de considerações físicas. Isto será o que faremos agora, para ter uma ideia de qual seria a forma do tensor métrico (o espaço-tempo) no caso de uma massa esférica, no espaço externo à massa. É intuitivamente correto supor que antes de por a massa  $m$  o espaço-tempo ser' a Minkowskiano.

Para colocar coordenadas procederemos na forma mais intuitiva possível. Antes de colocar a massa  $m$  no que consideraremos a origem, na parte espacial do E-T, imaginemos uma série de esferas concêntricas nas quais estabelecemos um sistema de coordenadas esféricas, de tal forma que a métrica espacial será:

$$dl_0^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (18-0-1)$$

Se colocarmos a massa  $m$  na origem a RG supoe que a geometria do espaço deve ser modificada. Por exemplo, as esferas situadas entre  $r$  e  $r+dr$  não estarão mais a uma distância  $dr$  uma da outra. Más, a simetria do problema nos diz que não deveria haver distorções angulares, ou seja que um elemento de area na direção  $\theta$  e  $\phi$  deve conservar esta direção. A esfera de raio  $r$  coberta de regras ideais deve também conservar a sua área  $A=4\pi r^2$ , já que supostas encurtamentos das regras deve também independer da direção, conseqüentemente elas continuam a medir a mesma area.

Então a parte espacial da métrica deve eventualmente modificar a sua parte radial, com uma função que s' o dependa do raio (suposto que a massa não varia, em cujo caso dever-se-ia introduzir o tempo também). O elemento de distância deve ter nestas condições uma forma:

$$dl^2 = f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (18-0-2)$$

a função  $f$  é desconhecida por em quanto.

Agora vejamos a parte temporal. Se amarrarmos relógios em todo os pontos de uma rede sobre a esfera de raio  $r$ , eles deverão se ver com a mesma marcha. Más, agora entra a influência diferencial da gravitação sobre relógios ubicados a diferentes distâncias da massa central. Como

vimos, a marcha de um relógio padrão situado em  $r_1$  parece ir mais rápido que um outro situado em  $r_2$  ( $< r_1$ ), por um factor igual ao do redshift:

$$F_{12} = 1 + Gm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (18-0-3)$$

Então, se queremos sincronizar todos os relógios com um não perturbado, situado a distância infinita, um relógio a distância  $r$  deverá ser acelerado por uma quantidade

$$F = 1 + Gm / r \quad (18-0-4)$$

Assim fixamos a marcha dos relógios em qualquer parte.

Então, se considerarmos a linha mundo de um relógio  $r=\theta=\phi=0$ , teremos que a o elemento de linha deverá ser:

$$ds^2 = F^{-2} dt^2 \quad (18-0-5)$$

Sendo então a métrica E-T, a resultante das soma da espacial e a temporal antes vistas:

$$ds^2 = F^{-2} dt^2 - dl^2 \quad (18-0-6)$$

Então podemos, usando a forma da  $F$  e a expansão  $(1+z)^n = 1 - nz$ , obter

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2Gm}{r} \right) dt^2 - dl^2 \quad (18-0-7)$$

Agora podemos generalizar esta expressão do elemento de linha para um potencial newtoniano qualquer, colocando:

$$ds^2 = (1 - 2\phi) dt^2 - dl^2 \quad (18-0-8)$$

Agora fica encontrar a função  $f(r)$  dentro de  $dl$ , como vemos na (18-0-2).

Embora para a função  $f(r)$  não exista nenhum experimento pensado simples, podemos recorrer à semelhança com a RE. Se o efeito da função  $F(r)$  e compensar a dilatação temporal, o da  $f(r)$  deve ser o de compensar a contração espacial. Então, por semelhança com a RE este termo deve se desviar do valor 1 uma quantidade semelhante à que se desvia na  $F(r)$ , porem com sinal trocado. Chegamos a forma:

$$ds^2 = (1 - 2\phi) dt^2 - (1 + 2\phi) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (18-0-9)$$

Temos então determinada por razões físicas a métrica externa a uma massa puntual. Assim, ficam determinadas as componentes do tensor métrico:

$$g_{00} = (1 - 2\phi)$$

$$g_{11} = -(1 + 2\phi)$$

$$g_{22} = -r^2$$

$$g_{33} = -r^2 \text{sen}^2 \theta$$

as outras componentes são nulas. A partir do  $g$ , podem se determinar os tensores de Riemann e Ricci.

Este método de usar simetrias e razões físicas para diminuir o grau de incerteza sobre a curvatura será usado frequentemente, devido ao grau de complexidade das equações envolvidas.

## 18-1 As equações da RG

Partimos das equações da geodésica e do desvio geodésico que vimos nas duas últimas aulas e são respectivamente dadas por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \cdot \frac{dx^\nu}{d\lambda} \cdot \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (18-1)$$

$$\nabla_V \nabla_V \xi^\alpha = R_{\mu\nu\beta}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta \quad (18-2)$$

esta última, em termo de componentes é:

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} = R_{\mu\nu\beta}^\alpha V^\mu V^\nu \xi^\beta \quad (18-3)$$

Onde D representa a derivada co-variante.

A (18-3) pode ser materializada no exemplo do elevador pela força de maré. Se supomos o típico elevador em queda livre, um observador, também em queda livre rodeado de uma serie de bolinhas distribuidas em forma esférica em torno dele, que ubica-se no centro da distribuição, ele verá, como consequência do carater central e a dependência com a distância da força gravitacional, que as bolinhas laterais (igual distância do centro de forças) aproximam-se dele, em tanto que as ubicadas acima e em baixo dele distanciam-se entre sim. No caso as coordenadas diferenciais entre o observador e as bolinhas são as componentes  $\xi^\alpha$ ,  $\alpha = 1,2,3$  em coordenadas cartesianas. Os vectores velocidade poderam ser medidos pelo observador instantaneamente em cada ponto da queda livre, já que no caso o parâmetro  $\lambda = \tau$  seria O TEMPO PRÓPRIO medido pelo relógio do observador. As derivadas segundas, no primeiro termo da equação (18-3) seria a aceleração das bolinhas que podem ser obtidas medindo duas velocidades em intervalos de tempo sucesivos. Ou seja que esta equação permite recuperar as coordenadas independentes do tensor de de curvatura do espaço de Riemann. Então temos um caso semelhante ao do geodesta, que na superfície da Terra pode saber que a mesma não é plana, fazendo triangulações (um triângulo esférico tem a soma dos ângulos maior do que  $180^\circ$ ) e medindo areas. Aquim, o *espaçodesta*, pode, a partir de condições dinâmicas medir a curvatura do espaço.

### 18-2-1 As equações da RG no vacuo

No entorno de um evento  $E_0$  qualquer, por exemplo o anteriormente citado, a força de atração newtoniana pode ser dividida em duas partes:  $\vec{f} = f_o + \Delta_o f$

Onde  $f_o$  é o campo na posição do evento e o  $\Delta_o f$  é o que deve-se somar ao campo em  $E_0$  para obter o valor do mesmo num ponto vizinho e está definido por esta equação (obviamente este é o valor da força de maré). Uma força de maré sempre indica a presença de um campo gravitacional *intrínscico*, um que não pode ser considerado como aparecendo devido a uma escolha errada de sistemas de coordenadas. A forma de detecta-

lo é através do exemplo anterior, se há forças de maré, há aceleração relativa entre as partículas, caso contrário as partículas estão num referencial inercial estendido. No caso de um conjunto de partículas dentro de um foguete, no espaço livre que sofre uma aceleração, as partículas sentirão que caem ao fundo do foguete em forma acelerada, mas não detectar-se-a nenhum movimento relativo entre elas.

Agora, todo campo newtoniano é derivado de um potencial  $\phi$ , a maneira usual de escrever isto é:

$$f_i = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\phi_{,i}, \text{ com } i=1,2,3 \quad (18-5)$$

A aceleração relativa de duas partículas separadas por um pequeno tri-vector  $\eta_i$ , será:

$$\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = df_i = \phi^j_{,i}\eta_j, \quad (18-6)$$

onde  $\phi^j_{,i}$  está definido pela equação (18-6). Então, é a segunda derivada do potencial que indica a presença de um campo intrínseco. De outro lado esta segunda derivada satisfaz a equação de Poisson:

$$\sum_{i=1}^3 \phi^i_{,i} = 4\pi G\rho \quad (18-7)$$

que relaciona as fontes com o campo mesmo, e é essencialmente a versão local da lei inversa do quadrado das distâncias. Quando estamos interessados nas equações do vácuo (campo em torno do Sol, Buraco Negro, etc), então as fontes são nulas, porque a densidade de matéria fora do próprio Sol ou objeto em questão é nula,  $\rho = 0$ , e a equação de Poisson reduz-se à equação de Laplace:

$$\sum_{i=1}^3 \phi^i_{,i} = 0 \quad (18-8)$$

Se compararmos a (18-6) com a (18-2), vemos que são iguais se

$$\phi^i_{,j} = R^i_{\mu\nu j} \cdot V^\mu \cdot V^\nu, \quad (18-9)$$

Se o campo é estático, então  $\phi_{,t} = 0$ , e podemos generalizar a (18-9) para:

$$\phi^k_{,k} = R^k_{\mu\nu k} \cdot V^\mu \cdot V^\nu \quad (18-10)$$

No caso da equação de Laplace teremos:

$$R^k_{\mu\nu k} \cdot V^\mu \cdot V^\nu = 0 \quad (18-9)$$

Com o somatório sobre todos os índices repetidos. Se isto deve valer  $\forall V^\mu$ , chegamos à conclusão, precisamos que:

$$R_{\mu\nu\kappa}^\kappa = R_{\mu\nu} = 0 \quad (18-10)$$

Como vimos este é o tensor de Ricci, que tem a simetria  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$  e tem 10 coordenadas independentes. A anulação das 10 componentes do tensor de Ricci é então o que a analogia newtoniana sugere como o equivalente às equações no vácuo da RG.

Como é que a equação de Poisson única deve ser substituída pelas 10 equações?. A razão é que a determinação de toda a métrica requer do conhecimento das componentes do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ , que é simétrico e tem 10 componentes independentes.

As equações de campo (18-10) são equações de segunda ordem no potencial (não envolve derivadas de ordem superior à segunda do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ ). Nesto as equações são análogas às de Newton e Maxwell. De outro lado elas são não-lineares, já que contem produtos dos  $g$  e as suas derivadas.

***A linearidade sempre permite achar uma solução como superposição de duas soluções. Isto é, se temos o campo gravitacional de uma massa  $m_1$  no ponto  $Q$  e de outra  $m_2$  no ponto  $Q$ , segundo Newton, o campo resultante é meramente a soma dos dois campos. O mesmo passa em eletromagnetismo com as cargas. Sem embargo, isto não acontece em RG. O mecanismo é o mesmo que causa o defeito de massa nos átomos, excepto que agora é a energia de ligação gravitacional, a qual tem ela mesma um defeito de massa gravitacional, equivalente à energia necessária para separa-las e leva-las ao infinito.***

Ainda existe um outro tensor de divergência nula, formado a partir do tensor e do escalar de Ricci e o tensor métrico que também tem divergência nula e poderia ser usado em lugar da (18-10)

$$R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (18-10b),$$

E finalmente pode-se somar uma constante lambda que ainda conserva o divergente nulo e é a expressão mais geral possível:

$$R_{\mu\nu} - (R - \lambda)g_{\mu\nu} = 0 \quad (18-10c)$$

### **18-2-2: As equações em presença de matéria**

Em presença de matéria, na gravitação newtoniana vale a equação de Poisson, onde a fonte de gravitação é a densidade de matéria. Devemos encontrar em RG um tensor equivalente à densidade, que relacione a matéria à geometria. Este é o **tensor de matéria**.

Em RE vimos como a cinemática das partículas modificava-se profundamente. Agora, existe um conceito da mecânica dos contínuos que é fundamental para o desenvolvimento da RG, este é o do **tensor de matéria**. Uma partícula está totalmente caracterizada pelo seu quadrimomento  $\vec{P} = (\vec{p}, E)$ , derivado do quadri-vector velocidade ( $\vec{U}$ ). Um meio contínuo não só tem densidade e velocidade num dado elemento de volume, mas, também tensões internas. Nós discutiremos primeiramente o meio contínuo chamado em

Física de pô. Caracteriza-se desta forma um méio que não tem tensões ou presões internas.

Para obter a densidade  $\rho$  num referencial com velocidade  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , devemos ter em conta dois efeitos: a contração do volume e o incremento da massa, ambos por um fator  $\gamma(v)$ , ou seja:

$$\rho = \rho_0 \gamma^2(v) \quad (18-11)$$

O mais simples dos tensores  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  que se pode construir é o:

$$M^{\mu\nu} = \rho_0 \cdot U^\mu U^\nu \quad (18-12)$$

Veamos como funciona:

$M^{00}$  = fluxo do momento 0 (energia) através de uma superfície de  $t=cte$ . Ou seja a densidade de energia.

$M^{0i}$  = o fluxo de enrgia através de uma superfície  $x^i = cte$

$M^{i0}$  = fluxo de momento i através da superfície  $t=cte$ , ou densidade de momento.

$M^{ij}$  = fluxo do momento j através da superfície i.

$M^{ji}$  = fluxo do momento i através da superfície j.

No sistema de referencia onde a materia esta momentaneamente em repouso, como não existe movimento todos os momentos espaciais são nulos, bem como todos os fluxos espaciais são nulos, então este tensor tem componentes em O:

$$M^{00} = \rho,$$

$$M^{0i} = M^{i0} = M^{ij} = 0,$$

no sistema  $\bar{O}$ , com quadri-vector  $\bar{U} \rightarrow \left( \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}, \frac{v_x}{(1-v^2)^{1/2}}, \frac{v_y}{(1-v^2)^{1/2}}, \frac{v_z}{(1-v^2)^{1/2}} \right)$ ,

o tensor terá componentes:

$$M^{\bar{0}\bar{0}} = \rho U^{\bar{0}} U^{\bar{0}} = \rho / \{1 - v^2\},$$

$$M^{\bar{0}\bar{i}} = \rho U^{\bar{0}} U^{\bar{i}} = \rho v^i / (1 - v^2),$$

$$M^{\bar{i}\bar{0}} = \rho U^{\bar{i}} U^{\bar{0}} = \rho v^i / (1 - v^2),$$

$$M^{\bar{i}\bar{j}} = \rho U^{\bar{i}} U^{\bar{j}} = \rho v^i \cdot v^j / (1 - v^2)$$

Isto 'e o que calculariamos de primeiros principios para a densidade de energia, fluxo de enrgia, densidade de momento, e fluxo de momento, respectivamente. É claro aqui que o tensor **M** é simétrico.

Este tensor tem o divergente nulo:

$$M^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$