Porto Alegre, 7 de janeiro de 2003.

Aula 15
Relatividade e Cosmologia

Algebra tensorial em coordenadas polares

Agora introduziremos o conceito de curvatura, mas trabalhando sobre coordenadas não cartesianas no plano euclideo.

Alem das coordenadas usuais no plano acostumamos a usar outras, que nem as polares. A diferença fundamental destas é que nào conservam a direção dos versores de base.

A definição das mesmas é:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \; x = r\cos\theta \qquad (16\text{-}1)$$
$$\theta = \arctan x/y \;\; , \; y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (16\text{-}2)$$

Pequenos incrementos em x e y produzem mudanças em r e θ dados por:

$$\Delta r = x/r\Delta x + y/r\Delta y = \cos\theta.\Delta x + \mathrm{sen}\,\theta.\Delta y, \qquad (16\text{-}3)$$
$$\Delta\theta = -y/r^2\Delta x + x/r^2\Delta y = -1/r\,\mathrm{sen}\,\theta.\Delta x + 1/r\cos\theta.\Delta y \qquad (16\text{-}4)$$

validas na primeira ordem.
O dito é valido para qualquer transformação de coordenadas $\xi(x,y), \eta(x,y)$,

$$\Delta\xi = \partial\xi/\partial x.\Delta x + \partial\xi/\partial y.\Delta y \qquad (16\text{-}5)$$
$$\Delta\eta = \partial\eta/\partial x + \partial\eta/\partial y.\Delta y \qquad (16\text{-}6)$$

para ser um bom sistema de coordenadas em todo o espaço $\xi(x,y), \eta(x,y)$ devem atribuir a dois pontos com diferentes (x,y) diferentes pares de valores (ξ,η). Por exemplo, o sistema de coordenadas esféricas não verifica isto nos polos. Ele é usado para descrever sistemas físicos com simetria esférica. Note-se, sem embargo que a natureza não proporciona esta indeterminação a um campo, por exemplo. A indeterminação aparece na nossa necessidade de descrever estes sistemas com um sistema de coordenadas. Matematicamente a condição de atribuir dois valores diferentes de (ξ,η) a dois pontos com (x,y) diferentes vem dado pelo determinante do Jacobiano da transformação ser diferente de 0:

$$\det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (16\text{-}7)$$

Se ele se anular num ponto, a transformação é singular neste ponto.

Vectores e co-vectores

A velha forma de definir vectores é pela lei de transformação, eles transformam como os incrementos das coordenadas:

$$\begin{pmatrix}\Delta\xi \\ \Delta\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} \tag{16-8}$$

A matriz da transformação é:

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix} \tag{16-9}$$

Então para um vector arbitrário $\vec{V}$

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta}.V^{\beta} \tag{16-10}$$

onde os índices primados referem-se a (ξ,η).

Co-vectores

Suponhamos agora um campo escalar ϕ. Podem=se definir as derivadas do mesmo em quaisquer dos dois sistemas em questão. Definimos o co-vector $\partial\phi$ como o objeto que tem as componentes $\partial\phi = (\partial\phi/\partial\xi, \partial\phi/\partial\eta)$ no sistema de coordenadas (ξ,η). A transformação das componentes destes objetos vem dada automaticamente pela regra de derivação em cadeia.

$$\begin{pmatrix}\partial\phi/\partial\xi \\ \partial\phi/\partial\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y\end{pmatrix} \tag{16-11}$$

Então a matriz da transformação é:

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta'} = \begin{pmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta\end{pmatrix} \tag{16-12}$$

O produto da (16-9) com a (16-12) fornece a matriz unitária:

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta'}\Lambda^{\kappa'}_{\alpha} = \eta^{\kappa'}_{\beta'} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{16-13}$$

Curvas e Vectores

A definição usual de uma curva é a de uma sucessão conexa de pontos no plano ou no espaço. Reservaremos esta definição para *trajetória* e definiremos a *curva* como uma *trajetória parametrizada*. Esta é a aproximação da matemática moderna. A curva é então uma aplicação de $R \to R^2$. O que esto significa é que uma curva é uma trajetória com um número associado a cada ponto dela. Este número é chamado o parâmetro *s* da curva. Então podemos por:

$$Curva : \{\xi = g(s), \eta = f(s), a \le s \le b\} \qquad (16\text{-}14)$$

Podemos mudar o parâmetro para a mesma trajetória fazendo z=z(s), isto define uma curva diferente, mesmo que a imagem seja a mesma trajetória:

$$\{\xi = g'(s'), \eta = f'(s'), a' \le s' \le b'\} \qquad (16\text{-}15)$$

A derivada de um campo escalar ϕ ao longo da curva é $d\phi / ds$, ou seja mudando o parâmetro muda esta derivada. Isto pode-se por de acordo a nossa notação como:

$$d\phi / ds = \left\langle \tilde{d}\phi, \vec{V} \right\rangle, \qquad (16\text{-}17)$$

Então $\vec{V}$ pode se considerar como um vector característico da curva, chamado o *vector tangente* à curva. Entào um vector pode ser visto como um ente geométrico que dado um campo ϕ produz $d\phi / ds$. O vector tangente poder-se-ia chamr o operador d / ds. Alguns livros de relatividade usam esta definição. Aqui usaremos somente $\vec{V}$, cujas componentes são $(d\phi / d\xi, d\phi / d\eta)$.

Note que uma trajetória no plano pode ter tantos vectores tangentes como parametrizações, eles são num dado ponto paralelos, mas varaia o seu modulo. Mais ainda os vectores podem ser iguais num dado ponto e não sê-lo no resto da trajetória.

Agora, é obvio que sob uma transformação de coordenadas s não muda (o parâmetro nada tem a ver com coordenadas), más as componentes de $\vec{V}$ sim, já que pela derivação em cadeia:

$$\begin{pmatrix} d\xi / ds \\ d\eta / ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\xi / dx & d\xi / dy \\ d\eta / dx & d\eta / dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx / ds \\ dy / ds \end{pmatrix} \qquad (16\text{-}18)$$

Esta é a mesma lei de transformação que a dos vectores anteriormente vista.

Para resumir, a visão moderna é que um vector é uma tangente a uma curva, e é a função que fornece $d\phi / ds$ quando toma $\tilde{d}\phi$ como argumento.

<u>Coordenadas polares, vectores e co-vectores</u>

A transformação dos versores de base das coordenadas é:

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'} \vec{e}_{\mu} \qquad (16\text{-}19)$$

Isto pode-se obter da expressão de um vector, e a lei de transformação das suas coordenadas:

$$\vec{V} = V^{\mu} \vec{e}_{\mu} = V^{\nu'} \Lambda^{\mu}_{\nu'} \vec{e}_{\mu},$$

para que fique o vector invariante nas coordenadas ', o versor deve antri-transformar:

$$\vec{V} = V^{\nu'} \Lambda^{\mu}_{\nu'} \Lambda^{\alpha'}_{\mu} \vec{e}_{\alpha'} = V^{\nu'} \delta^{\alpha'}_{\nu'} \vec{e}_{\alpha'},$$

$$\vec{V} = V^{\nu'} e_{\nu'} \qquad (16\text{-}20)$$

Para as coordenadas polares teremos:

$$\vec{e}_r = \Lambda^x_r \vec{e}_x + \Lambda^y_r \vec{e}_y = \partial x / \partial r . \vec{e}_x + \partial y / \partial r \vec{e}_x = \cos\theta . \vec{e}_x + \operatorname{sen}\theta . \vec{e}_x , \qquad (16\text{-}21)$$

similarmente,

$$\vec{e}_\theta = \partial x / \partial \theta . \vec{e}_x + \partial y / \partial \theta . \vec{e}_y = -r \operatorname{sen}\theta \vec{e}_x + r \cos\theta . \vec{e}_y . \qquad (16\text{-}22)$$

A transformação é extremamente simples. É só ter em conta a ordem das derivadas e qual das matrices é a necessária em cada caso.

Para base dos co-vectores precisaremos

$\Delta^r_x = \partial r / \partial x$

é analogamente teremos:

$$\tilde{d}\theta = \partial\theta / \partial x . \tilde{d}x + \partial\theta / \partial y . \tilde{d}y = \frac{1}{r} \operatorname{sen}\theta . \tilde{d}x + \frac{1}{r} \cos\theta . \tilde{d}y$$

e para $\tilde{d}r$,

$\tilde{d}r = \cos\theta . \tilde{d}x + \operatorname{sen}\theta . \tilde{d}y$

Como vemos, os versores de base nas coordenadas polares verificam :

$\vec{e}_r$ mantém-se constante numa dada direção, mas não tem a mesma magnitude que os versores em coordenadas cartesianas. Por exemplo, se $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$, então $|\vec{e}_r| = 1$.

Já o versor na direção angular cresce como r.

No que diz respeito aos co-versores, $\tilde{d}r$ verifica a mesma propriedade que $\vec{e}_r$.

No entanto $\tilde{d}\theta$ decresce com 1/r.