Porto Alegre, 22 de novembro de 2005.

Relatividade Geral

Princípio de Equivalência

Em princípio, o postulado da RE sobre a existência de referenciais inerciais preenchendo o espaço todo não é mais do que uma idealização. Por exemplo, perto de uma massa, referenciais quaisquer serão acelerados de acordo à lei da gravitação.
Durante o curso de RE nunca introduziu-se um campo explicitamente. Fizemos um tratamento ad-hoc dos sistemas acelerados, só como uma extensão comparando-os com os sistemas inerciais que tem a mesma velocidade em cada instante. Más na verdade a mudança é muito mais profunda e envolve a própria estrutura do espaço-tempo.
Os referenciais inerciais poderão ser usados localmente, isto garante a conexão com a RE. Também nos fornece uma forma de encarar o tratamento dos campos: Deverá existir uma métrica espaço-temporal. Conjuntamente deverá existir um intervalo tipo tempo entre dois eventos, como aquele medido por um relógio que passa por ambos eventos e o intervalo tipo espaço como aquele medido por uma régua entre dois eventos num referencial no qual ambos são simultâneos.

Três reflexões ao pensamento clássico levam aos postulados da Relatividade Geral:
1- A equivalência entre um observador em queda livre é um referencial inercial (*que não nota a força de gravitação, porque os objetos que estão próximos dele também estão em queda livre. Ele tem a sensação que os objetos estão* ***flutuando*** *em torno dele. Parece que Einstein definiu como um dos momentos mais felizes da sua vida ter-se dado conta que em queda liuvre não se sente o peso.*) Este é o chamado **principio de equivalência fraco**.

2-A equivalência entre a massa gravitacional e a inercial. **Somado ao anterior constituem o principio de equivalência forte**. Isto leva a que acelerações de qualquer tipo são equivalentes à gravitacional

3-A influência do campo gravitacional sobre a luz .Porque este efeito, se existir, leva à universalidade da força gravitacional.

As forças conhecidas são:

As interaçòes fortes*, responsáveis pela unidade dos núcleos dos elementos (basta pensar que nos núcleos os protons (que se repelem por terem cargas iguais, devido à lei de Coulomb) estão "pacificamente co-abitando" num espaço da ordem de 10^{-15}m. O intervalo de ação desta força é desta ordem. Consideraremos aos efeitos de comparação sua intensidade 1. As partículas de interação são Pions e outras, com massa m > 0.1 Gev.*
A força eletromagnética*,responsável pela estrutura atómica, ela pode ser repulsiva ou atrativa, a sua intensidade relativa é 1/137, o intervalo de ação é infinito, as partículas de interação são os fotons, com massa nula e spin 1.*

A força fraca:*responsável pelo decaimento β, ou seja a emissào de um e^- por alguns núcleos, este decaimento é induzido pela interação de neutrinos, a sua intensidade é 10^{-5}, e o seu intervalo de ação é da ordem de 10^{-17} ou 0,1% do diâmetro do Próton, as partículas de interação são bosons vectroriais, com massas m>80Gev e spin 1.*

A força Gravitacional*, a sua intensidade é de $6x10^{-39}$, o intervalo de ação é infinito, a partícula de interação é o gráviton (Existe?), sua massa seria nula e o seu spin, de existir, seria 2.*

Porquê um **princípio de equivalência?.** Não são iguais as massas inercial e gravitacional?

Primeiramente é importante reflexionar sobre a gravitação. Ela é a mais universal das forçãs ,(para usar uma expressão politicamente correta: ela é *uma força democrática)* pois ela age indistintamente sobre corpos de qualquer natureza. Outra característica importante é que não existe gaiola de Faraday para a gravitação, ou seja, se colocarmos um corpo dentro de outro oco, seja qual for a natureza do segundo o corpo interno sofrerá a mesma aceleração que sofreria se o corpo externo não existisse.

Se analisarmos, por exemplo a aceleração (força por unidade de massa) que o Sol produz a uma certa distância só depende de uma propriedade sua, a massa, como aparece na lei de Newton, e da distância em questão que o separa da partícula de prova , não depende nem da natureza nem da massa da partícula de prova (asteróide, cometa, planeta, bolinhas de gude, ou partícula elementar, aço, madeira ou vidro). A força entre ambos sim depende também do corpo acelerado. Em conclusão, como vistos do Sol, a órbita de um asteróide uma bolinha de gude ou de um próton, que estiverem neste preciso instante à mesma distância que se encontra a Terra do Sol, e com a mesma velocidade ($\vec{r}_{0,} \vec{v}_0$) será a mesma que aquela que a Terra percorre. Então a aceleração gravitacional,

$$\vec{a} = \frac{GM_{Sol}}{r^3}\vec{r}$$

permite determinar a partir de quaisquer partículas de teste a **massa gravitacional** do Sol (ou, em geral, ela permite determinar a **massa gravitacional** de quaisquer objetos que tenham um satélite).

Como determinar então a massa de um corpo que não tem um satélite?

A dos corpos tipo planeta mencionados só pode-se inferir através da sua provável composição, ou mais modernamente, colocando um satélite em órbita em torno deles, como já foi feito com todos os planetas sem satélite do sistema solar e da maioria dos grandes satélites planetários.

Com corpos *manejáveis, a massa* pode-se medir a partir de experimentos que modifiquem o seu ***momento*** $\vec{p} = m\vec{v}$. Com efeito, a mudança de $\vec{v}$ implica numa aceleração $a = \Delta v / \Delta t$, e consequentemente na geração de uma força $\vec{f} = m\vec{a}$, se a massa for constante $\vec{f} = \dot{\vec{p}}$. Por exemplo, se lançarmos uma bolinha de gude, uma de aço ou de madeira, de uma certa altura h, todos esses corpos adquirirão uma velocidade, que pouco antes de atingir o chão vem dada por $v = (2gh)^{1/2}$ independente da sua composição, tamanho, etc, suposto que não há resistência do ar. Ao bater no chão elas freiar-se-ão até atingir uma velocidade nula. É evidente que se o tempo de freiamento é o mesmo, também o serão as suas desacelerações respectivas, as forças exercidas (medida pela deformação do chão, por exemplo) serão proporcionais a suas massas. Se o tempo do freiamento até atingir a velocidade nula for o mesmo, a desaceleração será a mesma e as massas medidas desses corpos nos diversos experimentos serão consequentemente as mesmas e **(aqui o principio de equivalência!!)**. Podemos fazer a medida da massa de uma outra forma, imprimindo uma velocidade às bolinhas com uma funda, um canhão ou, mais fácil ainda, simplesmente amarrando objeto ao extremo de um cordão e fazendo-ou girar, criando assim um campo central: a velocidade de rotação fornecera a aceleração, se coloco um aparelho para medir a tensão da corda (dinamômetro) tenho os dois ingredientes, a força e a aceleração, o que permite calcular ***a massa***. **Esta massa** *assim determinada é chamad*a **massa inercial** *(ou seja o corpo tem uma quantidade de inércia, que retiramos ao freia-lo, ou equivalentemente resiste a que o ponhamos em movimento).*

O Princípio de Equivalência diz que a massa inercial e gravitacional dos corpos são iguais.

O experimento de Eötvos demonstrou esta equivalência e também que a ação do campo gravitacional independe do tipo de elemento do qual está constituido o corpo. O experimento foi realizado em 1905 com uma precisão de uma parte em 10^8. e aperfeiçoado nos anos 60, por Dicke e colaboradores, que elevaram esta precisão a 1 parte em 10^{11}.

Por exemplo, para ver a importância desta universalidade da gravitação devemos meditar sobre outras forças. As massas das partículas carregadas determinam-se na câmara de Wilson pela força eletromagnética produzida por um campo elétrico.
O campo elétrico só age sobre partículas carregadas.
A força de Coulomb é proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional à distância que as separa,

$$f_C \propto \frac{qq'}{r^2} ,$$

ela é semelhante à estrutura da força gravitacional. Sem embargo existe uma assimetria notável entre as duas forças, e ela nota-se se analisarmos a aceleração, que é a determinante da trajetória que a partícula segue: A aceleração produzida pela força de Coulomb em cada um dos corpos que portam respectivamente as cargas q e q' é inversamente proporcional **à massa** de cada um deles
$f_C = m_{C1} a_{C1} = m_{C2} a_{C2}$.

Não se pode inferir a aceleração das partículas a partir das cargas somente! é um outro agente que as determina, **a massa**.

A assimetria mencionada anteriormente está em que o campo gravitacional é determinado pela própria massa ***"o agente que determina a força é o mesmo que entra na fórmula da aceleração"***, com efeito como antes dito:

$$f_G \propto \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{e} \quad f_G = m_{G1} a_{G1} = m_{G2} a_{G2} ,$$

Devemos ver esta forma de comportamento maravilhoso da natureza: na gravitação a aceleração está relacionada às massas que geram o campo.

O *principio de equivalência* garante que a massa atribuída a cada uma das partículas em quaisquer experimentos é a mesma.

Isto leva-nos à constatação de que o campo gravitacional possui uma universalidade maior que os outros campos.

Uma pergunta imediata é se o **campo gravitacional age** também sobre **fótons** ou em geral em partículas que não tem massa, mas carregam energia.

Um experimento proposto por Einstein, conceitualmente simples, mostra que se isto não acontece-se seria violado o 2do principio da termodinâmica ou a conservação da energia.

Se soltarmos um corpo de massa **m** de uma altura **h**, ao atingir o chão ele terá adquirido uma energia cinética $\mathbf{1/2mv^2=mgh}$**.** A energia total do corpo será nesta situação:

$$\mathbf{E'=m + 1/2mv^2+O(v^4)}$$

(fizemos esta aproximação quando vimos Momento-Energia).

Suponhamos um experimento no qual toda esta energia é transferida para um fóton que é emitido na direção vertical. Ele terá então ao ser emitido uma freqüência dada por $E'=h\nu'=m+1/2mv^2+O(v^4)$.
Lembremos que a freqüência equivalente à massa antes de ser emitida é $E=h\nu=m$.
Se o fóton não perde energia ao remontar o campo gravitacional, devemos admitir que teremos um ganho de energia

$$\Delta E=E'-E=\frac{1}{2}mv^2+O(v^4) .$$

Ou seja podemos permitir o moto perpétuo, já que transformando o fóton de novo numa massa, esta será maior que a original, e poderiamos transportar energia num campo gravitacional a custo zero..
Pode-se ver que mesmo se o processo não fosse 100% eficiente, ainda será contradito o 2do princípio da termodinâmica. Por exemplo, se supomos que só 10% da energia E´ transformada num foton, então supomos a massa m dividida em 10 pedazos iguais e para cada umd estes vale o mesmo principio, pois transportamos uma certa quantidade de energia a uma altura h sem aparentes perdas de energia ao remontar o campo. Pois então, o 2do principio requer que o foton perca uma energia equivalente a ΔE . Ou seja o foton chegará de novo à altura h com uma freqüência ν tal que $\nu'-\nu=\Delta E/h$. Obviamente a freqüência deste foton é menor que a daquele que foi liberado em terra.

Como **a freqüência marca tempos**, imediatamente deste exercício infere-se que o tempo deveria ser afetado pela gravitação. Num diagrama espaço tempo veríamos o assunto como na figura 14-1.
Esta experiência foi realizada por Pound, Rebka em 1960 e posteriormente por Pound e Snider em 1965 mediram a mudança de freqüência de um foton emitido na direção vertical remontando o campo gravitacional da Terra numa altura de 35 m. O experimento usou o efeito Mössbauer para adquirir uma grande precisão na medição das freqüências ν e ν' .

Onde Δt_i **e** Δt_f são os intervalos de tempo entre as duas cristas no momento da emissão e quando elas atingem a altura h.

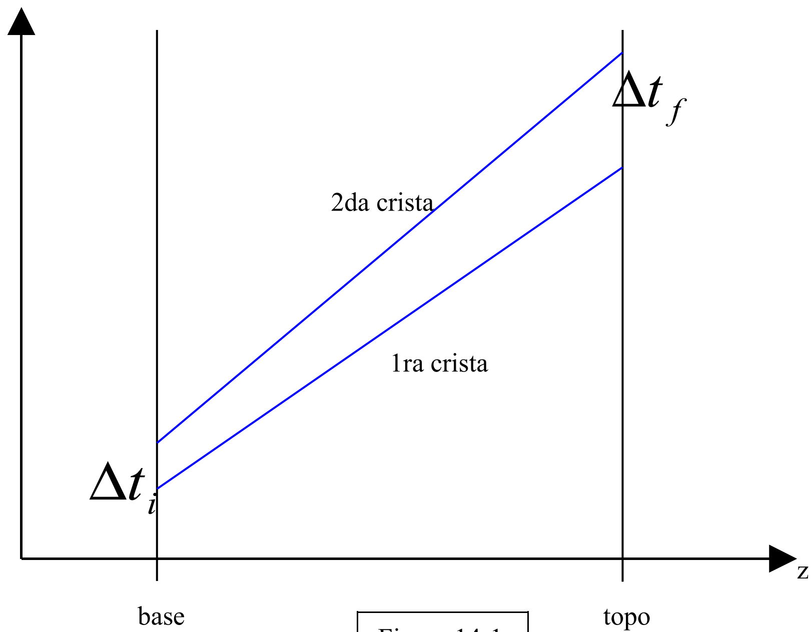


Figura 14-1

Nesta figura, o intervalo temporal entre as duas crístas deve ser igual ao inverso da freqüência, por tanto, se a freqüência varia tambem deve variar esse intervalo temporal. Como a luz propaga-se ao longo de geodésicas nulas, no diagrama de Minkowski teriamos a situação bizarra de que a distância entre duas geodésicas nulas deveria variar. Isto não pode acontecer num espaço plano, mas sim num espaço curvo. Por exemplo na superfície de uma esfera, as geodésicas (circulos máximos do tipo dos meridianos na superfície da Terra) podem afastar-se no seu polo, mas, são paralelos à altura do seu equador. Isto sugere que o e-t em presença de gravitação poder-se-ia representar por um espaço geométrico com curvatura. Como fazê-lo foi descoberto por Einstein com a Relatividade Geral.

O avermelhamento gravitacional de um outro ponto de vista

Vamos supor agora um elevador de altura l, com um observador no seu interior. No preciso instante em que é emitido um raio de luz do topo do elevador em direção ao piso, acontece que é cortado o cabo do elevador e ele começa a cair em queda livre. Um detetor fora do elevador, encontra-se nesse preciso instante rente ao piso do elevador. Analisaremos o que acontece com o raio de luz como visto pelo detetores interno e externo.

Mostramos na figura o 1eiro instante do elevador e em linha tracejada o 2do. O elevador caiu um Δl durante o tempo Δt que a frente de ondas emitido no teto do elevador

demorou em atingir o piso do mesmo. O Princípio de Equivalência entre os observadores inerciais requer que a Física que vê o observador em queda livre junto com o elevador, seja localmente e instantaneamente igual ao de um referencial inercial.

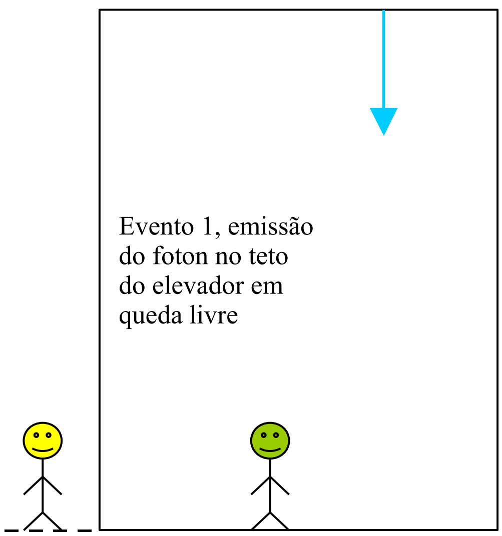


Figura 14-2a

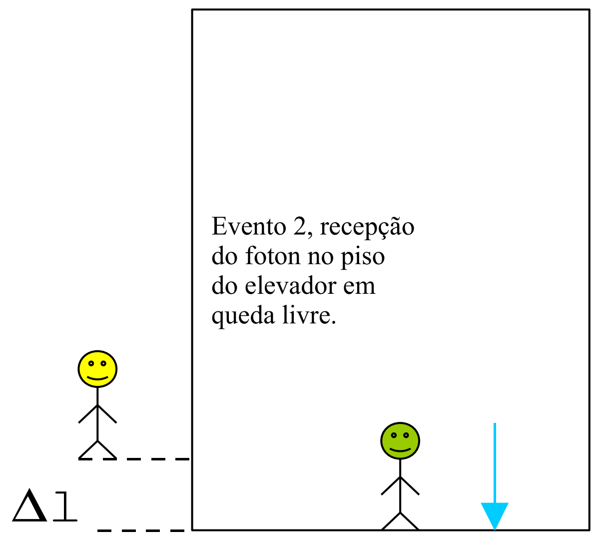


Figura 14-2b

O foton tarda $\Delta t = l$ **(c=1)** em atingir o fundo do elevador. Neste tempo o elevador adquiriu uma velocidade $V = g \,.\, \Delta t = g \,.\, l$. Para o observador fora da caixa do elevador o foton terá uma freqüência mudada pelo efeito Doppler, já que ele é emitido de um referencial em movimento. Podemos considerar que o observador está entrando na frente de ondas com a mesma velocidade da queda do elevador, enxergando em conseqüência

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1+V}{1-V} \approx 1+V \approx 1+gl \text{ , ou } \frac{v_0}{v} = 1-gl$$

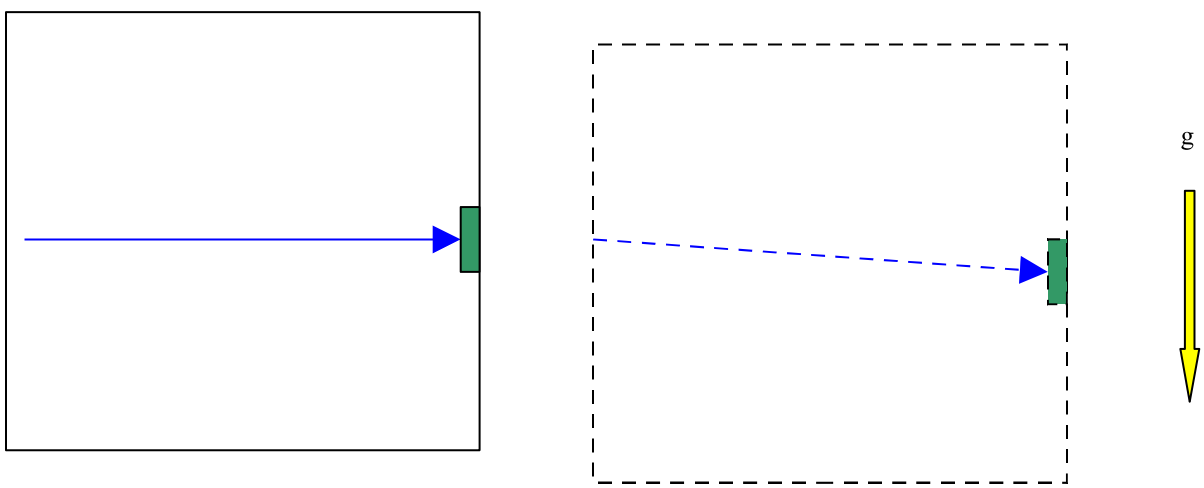
(a aproximação é para campos pequenos ou seja que V <<1).

Por tanto resulta, como demonstrado pelo outro método, que a freqüência da luz é alterada pelo campo gravitacional.

A curvatura de um ráio de luz por um campo gravitacional

O raio lateral sofre um desvio para o observador externo. Supondo que o elevador tem também uma largura l, segundo o observador interno este observador verá o raio de luz sair perpendicular à parede e percorrer a distância l em $\Delta t = l$, no mesmo inte3rvaslo de tempo a parede lateral deslocou-se com todo o elevador, ou seja que para o observador externo este ponto onde bate o raio de luz está Δl mais baixo e o raio de luz sofreu um desvio semelhante, por tanto o raio de luz é desviado por um campo gravitacional,

Figura 14-3



Raio de luz como visto pelo tripulante

Raio de luz como visto pelo obs. externo

_O $\Delta l = \frac{1}{2} g . \Delta t^2 = \frac{1}{2} g . l^2$, ou $\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} g l$.

Isto é, o desvio do raio de luz depende da intensidade do campo gravitacional.

Este efeito foi observado em 1919, na base Sobral por uma expedição inglesa, organizada por Sir Arthur Eddington, para medir as estrelas próximas ao limbo solar durante o eclipse solar total que aconteceu nessa região do Brasil. As posições das estrelas que estariam próximas do limbo do Sol durante o eclipse foram medidas 6 meses antes, quando estavam em oposição ao Sol, ou seja a trajetória de seus raios luminosos não poderia estar afetada pela massa do Sol. Estas posições foram comparadas com as observadas durante o eclipse, determinadose que durante o eclipse as estrelas estavam ligeiramente mais afastadas umas das outras, que era o efeito esperado.

<u>Sobre a não Existência de um sistema de Lorentz em repouso num campo gravitacional</u>

Do anteriormente dito, vemos que a equivalência entre um referencial em queda livre (uniformemente acelerado com os referenciais inerciais que tem a mesma velocidade instantânea, só pode ser feita ***localmente***, isto é numa região limitada de espaço e de tempo. Porque pode ser feita só desta maneira?. Porque o campo gravitacional de uma distribuição esférica de massa tem simetria esférica e os corpos caem na direção do centro da distribuição ou centro de forças, e por tanto não se movimentam ao longo de linhas paralelas mas suas trajetórias são convergentes. Corpos em queda livre ao logo de uma mesma trajetória, de outro lado, se afastarão devido à que estão submetidos a forças diferentes, porque as suas distâncias ao centro de forças são distintas.
Na figura 14-4a, entre os instântes t1 e t2, um observador em queda livre verá que as bolinhas se aproximam uma da outra.

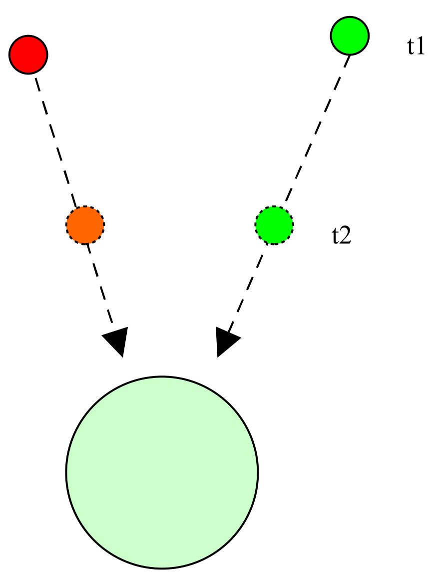


Figura 14-4a

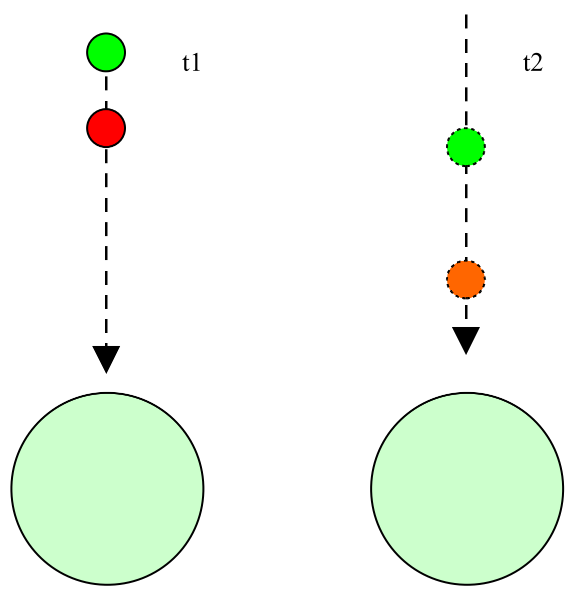


Figura 14-4b

Porem, na direção vertical as bolinhas afastar-se-ão. O observador em queda livre, que não sabe que esta caindo, nota um efeito estranho, uma distribuição esférica de bolinhas começa a se esticar e comprimir formando uma elipse. Ele pode, a partir deste efeito, concluir que

existe um campo de forças centrais e que vai se espatifar?, Ao que tudo indica, sim, más isto é matéria para mais adiante.

<u>O papel da curvatura</u>

Se observarmos o capitulo anterior vemos que o que acontece com um referencial em queda livre e semelhante ao que acontece com a superfície da Terra, ou com quaisquer superfícies não euclideas. Localmente linhas vem-se paralelas, mas globalmente elas não o são. Nós experimentamos uma situação semelhante todos os dias. Caminhamos na superfície de uma quase esfera, a Terra, mas os mapas das cidades estão com muita aproximação representados num plano. Se compramos um terreno, a ninguém ocorreria se queixar porque não é usada a trigonometria esférica para medir a superfície do mesmo. Sem embargo, se formos medir uma área de alguns milhares de quilômetros, veríamos que o que começou com tantos metros de frente fatalmente vai se estreitando por própria característica da geometria da Terra.
Einstein intuiu que esta geometria não euclidea, estudada por Riemman no século retrasado poderia tomar conta dos fenômenos físicos induzidos pela gravitação.

Mais ainda, ao estudarmos a RE, vimos que o espaço de Minkowski é plano, porem, ele não é precisamente euclideo, mais hiperbólico. Esta caracteristica introduz efeitos bizarros como que a distância percorrida por um raio de luiz é nula, ou seja o seu tempo próprio é nulo.

A distância entre pontos da geometria euclidea

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

que para mais dimensões deveria seguir somando diferenciais

$$\Delta l^2 = \Delta x_{1^2} + \ldots + \Delta x_n^2$$

transforma-se no espaço de Minkowski em :

$$\Delta\tau^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Nada mais linear que pensar que então, uma Física E-T da gravitação o que deve modificar é a estrutura da métrica, conservando o caracter da sua signatura (-,+,+,+) ou (+,-,-,-)

Ou seja que deviríamos ter, de acordo à geometria Riemmaniana uma métrica do tipo

$\Delta\tau^2 = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta$, com α e β , variando de 0 a 3.
Más isto é o assunto da próxima aula.